УДК 514.87

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНОЙ ПРОЕКЦИИ 6-МЕРНОГО КУБА НА ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

А.А. Поляков

Рассмотрены геометрические свойства проекции 6-мерного куба на трехмерное пространство, обладающей икосаэдрической симметрией, для оценки того, какими полиэдрами можно ее описать. Оказалось, что возможны три подхода к характеристике всех 64 точек проекции куба: 1) представление в виде объединения двух икосаэдров и двух додекаэдров, имеющих общий центр и единую ориентацию; 2) объединение большого звездчатого додекаэдра и малого звездчатого додекаэдра; 3) объединение ромбического триаконтаэдра и полиэдра, названного автором «симметричным звездчатым икосаэдром». Симметричный звездчатый икосаэдр можно описать, как икосаэдр с приклеенными к граням правильными треугольными пирамидами, причем ребра этих пирамид параллельны осям симметрии третьего порядка, а расстояние между внешними вершинами пирамид равно длине ребра внутреннего икосаэдра.

Ключевые слова: икосаэдрическая симметрия, 6-гиперкуб, квазипериодическая решетка.

Интерес к трехмерному паркету Пенроуза неизменен с конца XX века [1], в связи с тем, что эта квазипериодическая трехмерная решетка является моделью для кристаллической решетки икосаэдрических квазикристаллов [2]. В настоящее время изучаются возможности применения трехмерного паркета Пенроуза и других квазипериодических решеток для изготовления фотонных кристаллов [3].

Среди методик построения паркета Пенроуза в 3 измерениях [4] стандартной стала проекционная методика расчета точек. Шестимерная примитивная кубическая решетка проецируется на две взаимно-перпендикулярные 3-плоскости. При этом длина проекций единичных векторов решетки оказывается равной $1/\sqrt{2}$, их расположение можно описать векторами, направленными из центра к соседним вершинам икосаэдра. Для удобства будем считать ниже такие вектора единичными, обозначим центральный вектор как e_6, а соседние с ним вектора: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 (рис. 1).

Целью данной работы является изучение вида 6-мерного куба в такой проекции (рис. 2). Икосаэдрическая симметрия характеризуется наличием осей симметрии 5, 3 и 2 порядков, а также плоскостей зеркального отражения (рис. 1 и рис. 3). Додекаэдр имеет ту же симметрию, что и икосаэдр.

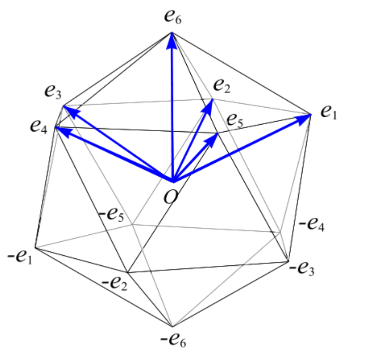

Рис. 1. Симметричная проекция 6-репера на трехмерное пространство. Тонкими линиями показан икосаэдр, построенный на единичных векторах проекции

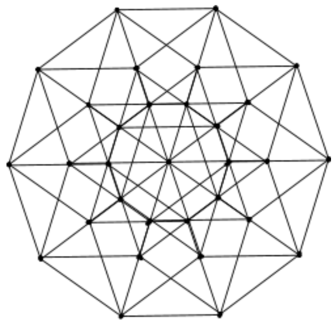

Рис. 2. Симметричная проекция 6-мерного куба на трехмерное пространство. Вид вдоль оси симметрии 5 порядка

Если совместить эти два полиэдра так, чтобы их оси симметрии совпали, а также совпадали центры ребер, то, если игнорировать ребра исходных полиэдров и соединить ближайшие вершины разноименных полиэдров, будет получен ромбический триаконтаэдр - полиэдр, гранями которого будут являться тридцать одинаковых ромбов [5]. (Рис. 4)

Ранее [1] отмечалось, что проекция 6-мерного куба на трехмерное пространство, которая состоит из $2^6 = 64$ вершин, ограничена триаконтаэдром (12+20 = 32 вершины). Таким образом, внутри поверхности проекции куба также расположены 32 вершины.

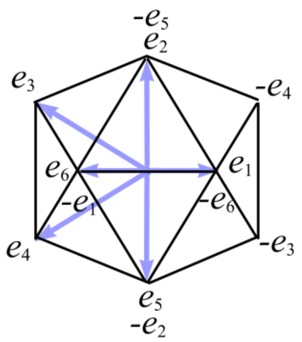

Рис. 3. Икосаэдр, построенный на единичных векторах проекции 6-репера. Вид вдоль оси симметрии 2 порядка

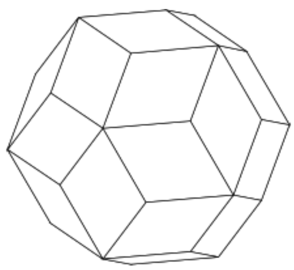

Рис. 4. Ромбический триаконтаэдр

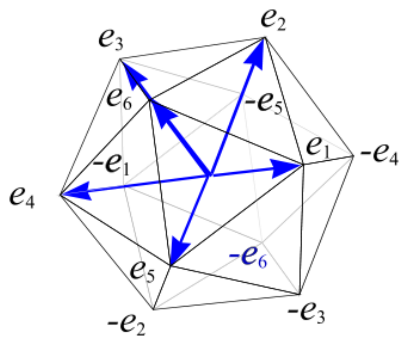

Рис. 5. Икосаэдр, построенный на единичных векторах проекции 6-репера. Вид вдоль оси симметрии 3 порядка

1. Проекция 6-мерного куба

При построении проекции куба вершины обозначаются 6-индексами вида $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)$, координаты точек определяются следующим образом:

$$r = i_1 e_1 + i_2 e_2 + i_3 e_3 + i_4 e_4 + i_5 e_5 + i_6 e_6,$$

где индексы $i = 0$ или 1.

Анализ свойств симметрии расположения вершин проекции куба удобнее проводить, расположив его центр в начале координат, для этого найдем координаты середины диагонали:

$$c = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)/2.$$

Новые координаты вершин проекции куба будут следующие:

$$r' = i_1e_1 + i_2e_2 + i_3e_3 + i_4e_4 + i_5e_5 + i_6e_6 - c =$$
$$= (i_1 - 0{,}5)e_1 + (i_2 - 0{,}5)e_2 + (i_3 - 0{,}5)e_3 + (i_4 - 0{,}5)e_4 + (i_5 - 0{,}5)e_5 + (i_6 - 0{,}5)e_6 =$$
$$= 0{,}5[(2i_1 - 1)e_1 + (2i_2 - 1)e_2 + (2i_3 - 1)e_3 + (2i_4 - 1)e_4 + (2i_5 - 1)e_5 + (2i_6 - 1)e_6] =$$
$$= 0{,}5[\,j_1e_1 + j_2e_2 + j_3e_3 + j_4e_4 + j_5e_5 + j_6e_6].$$

Здесь $i = 0; 1 \quad \to \quad j = -1; +1$. В индексах координат вершин проекции куба произойдет замена: вместо $i = 0$ ставится $j = -1$, индекс i =1 не изменяется.

При определении координат индексы нужно будет умножать на множитель 0,5. Подобное выражение будет наблюдаться в проекции 6-мерной решетки, если выбрать не примитивную, а объёмно-центрированную решетку.

2. Свойства реперных векторов

Характерные свойства рассматриваемых реперных векторов: шесть положительных и шесть отрицательных единичных векторов направлены к вершинам икосаэдра. Взаимное расположение вершин (12 единичных векторов) можно охарактеризовать следующим образом: вектора могут быть соседними, противоположными, либо несоседними (как например, e_1 и e_3). Вдоль единичных векторов направлены оси симметрии 5 порядка; сумма пяти соседних исходному вектору реперных векторов порождает вектор, направленный в ту же сторону.

Оси симметрии 3 порядка проходят через грани икосаэдра и вершины додекаэдра (см. рис. 6), их направления можно определить, как направления суммы трех соседних единичных векторов. Направление той же оси можно получить, если суммировать три вектора, соседние к этой тройке векторов (получится тройка несоседних векторов). На рис. 5 направление на ось 3 порядка определяет сумма соседних векторов $e_1 + e_6 + e_5$; ту же ось определяет тройка векторов $e_2 + e_4 - e_3$.

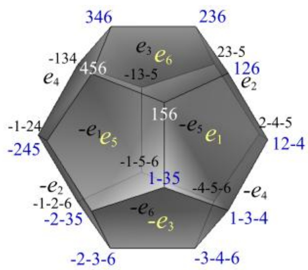

Рис. 6. Додекаэдр, построенный на единичных векторах проекции 6-репера. Вершины додекаэдра получены суммированием трех соседних векторов 6-репера

Ось 2 порядка определяет сумма двух соседних векторов; в направлении той же оси располагается сумма их двух соседей. На рис. 3: пара векторов $e_1 + e_6$ и пара векторов $e_2 + e_5$ (вторая пара векторов не является соседями).

При рассмотрении квазипериодических решеток, обладающих осями симметрии 5 порядка, постоянно используется число, которое исторически было названо золотым сечением $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$ [6]. Золотое сечение равно отношению диагонали правильного пятиугольника к его стороне. Любая целая степень золотого сечения может быть представлена в виде выражения, в которое входит τ в первой степени и целые числа; также можно выразить золотое сечение в виде суммы единичных векторов в симметричной проекции 6-мерной кубической решетки (см. Приложение 1).

Вершины икосаэдра расположены вдоль осей симметрии 5 порядка, поэтому можно построить икосаэдры с расстоянием от центра: равным единице с вершинами типа (000001), в τ раз больше ($0{,}5(111111)$), в тау раз меньше $0{,}5(11111\bar{1})$) (символ $\bar{1}$ обозначает –1; для объяснения выбора индексов см. Приложение 1). Вершины додекаэдра расположены по осям 3 порядка, поэтому можно построить додекаэдры с вершинами типа (110001), $(001\bar{1}10)$ (см. рис. 5, 6), а также с суммированием таких векторов с любым целым коэффициентом, если эти векторы параллельны.

Как относятся расстояния от центра до вершин додекаэдра в случае, когда они получены суммированием трех ближайших реперных векторов (типа (110001)) и суммированием трех реперных векторов, не являющихся соседями (типа $(001\bar{1}10)$)? Во втором случае расстояние меньше. Отношение размеров додекаэдров равно $\tau^3{:}\,1$ (это соотношение получено в разделе «5. Определение координат вершин…»).

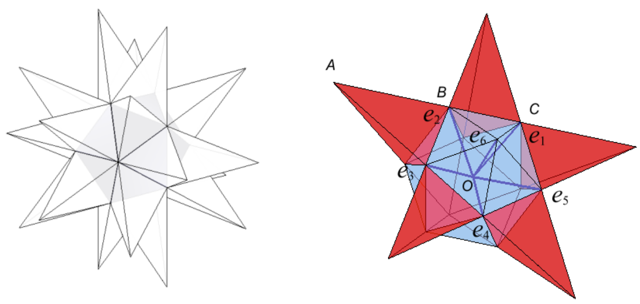

Рис. 7. Большой звездчатый додекаэдр.
Ядро – икосаэдр показано синим цветом.
На правом рисунке оставлено только пять лепестков

При анализе расположения точек в проекции 6-мерного куба потребуется также оценить наличие в структуре звездчатых полиэдров – большого и малого звездчатых додекаэдров.

3. Определение вершин лепестков большого звездчатого додекаэдра

На рис. 7 показан большой звездчатый додекаэдр [5]. Видно, что ядром звезды является икосаэдр (выделен синим цветом). Также этот многогранник можно описать как икосаэдр с приклеенными к граням треугольными пирамидами. Соотношение величин боковых ребер пирамид к основанию равно золотому сечению (свойство правильной пятиконечной звезды).

Оценим, как можно описать такую фигуру, используя реперные вектора.

Положение вершины А можно определить, как сумму векторов:

$$OA = OB + \tau BC = e_2 + \tau(e_2 - e_1) = e_2(\tau + 1) - e_1\tau.$$

Запишем эти выражения в виде 6-векторов (см. Приложение 1):

$$OA = (010000)\tau + (010000) - (100000)\tau =$$
$$= 0{,}5(111\bar{1}\bar{1}1) + (010000) - 0.5(11\bar{1}\bar{1}11) = (0110\bar{1}0).$$

Если выразить через реперные вектора, то:

$$OA = e_2 + e_3 - e_5.$$

Таким образом, координаты вершины лепестка этой звезды определяется суммой векторов, направленных из центра в три вершины икосаэдра - ядра звезды, прилегающие к этому лепестку.

4. Определение координат вершин лепестков малого звездчатого додекаэдра

Малый звездчатый додекаэдр [5] (рис. 8) можно построить как продлением граней ядра-додекаэдра, так и продлением его ребер. Применим ту же методику определения вершины, что и выше, так как грани полиэдра можно описать правильной пятиконечной звездой:

$$OA = OB + \tau BC = e_{126} + \tau(e_{126} - e_{12\bar{4}}).$$

Здесь $e_{ij\bar{k}} = e_i + e_j - e_k$. Вершины додекаэдра будем описывать суммой трех соседних реперных векторов (см. рис. 6).

Запишем эти выражения в виде 6-векторов:

$$\begin{aligned} OA &= (110001)\tau + (110001) - (110\bar{1}00)\tau = \\ &= 0{,}5(331\bar{1}13) + (110001) - 0{,}5(33\bar{1}\bar{3}\bar{1}1) = \\ &= (111112) = e_6(2\tau + 1) = e_6\tau^3. \end{aligned}$$

Для умножения векторов на золотое сечение τ здесь использовалась матрица M (см. Приложение 1).

Таким образом, если описывать вершины додекаэдра тройками соседних реперных векторов, то вершина лепестка малого звездчатого додекаэдра определяются реперным вектором, направленным в центр грани додекаэдра - ядра, умноженным на золотое сечение в кубе.

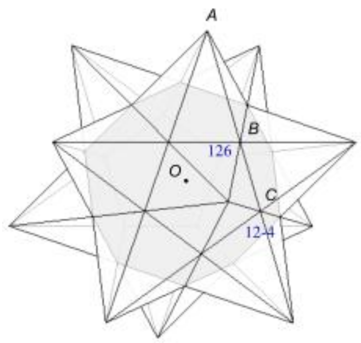

Рис. 8. Малый звездчатый додекаэдр. Ядро-додекаэдр показано серым цветом

Как отмечалось выше, додекаэдр может быть построен на тройках несоседних реперных векторов. Проведем расчет координат вершины лепестка малого звездчатого додекаэдра для оценки отношения размеров таких додекаэдров. В этом случае вектор e_{126} можно заменить на параллельной ему вектор $e_{3\bar{4}5}$, а вектор $e_{12\bar{4}}$ на $e_{\bar{3}\bar{5}6}$ (см. рис. 5). Применив описанную выше методику, получим вектор e_6. Таким образом, додекаэдр, построенный на сумме тройки соседних реперных векторов в τ^3 раз больше додекаэдра, построенного с использованием суммы тройки несоседних векторов.

5. Определение двух икосаэдров и додекаэдров в составе проекции 6-куба

Рассмотрим все точки проекции 6-мерного куба; их можно получить, рассматривая все сочетания с повторениями 0 и 1 в 6-векторе. Как было показано выше (в разделе «1. Проекция 6-мерного куба»), при перенесении начала координат в центр куба нули в 6-векторе заменяются на –1 и результат умножается на 1/2.

Перебор вариантов будет производиться с учетом свойств симметрии найденных точек, так как любая точка будет лежать на оси 5 порядка, или на оси 3 порядка (см. рис. 1, 2, 3, 5).

Точки с икосаэдрической симметрией:

$$e_6||0{,}5(111111);\ e_1||0{,}5(11\bar{1}\bar{1}11);\ e_2||0{,}5(111\bar{1}\bar{1}1);\ e_3||0{,}5(\bar{1}111\bar{1}1);$$
$$e_4||0{,}5(\bar{1}\bar{1}1111);\ e_5||0{,}5(1\bar{1}\bar{1}111).$$

Всего 12 точек, с учетом противоположных («$e_k||$» означает, что вектор параллелен e_k).

Аналогично, более близкие точки: всего 12, с учетом противолежащих:

$$e_6||0{,}5(11111\bar{1});\ e_1||0{,}5(\bar{1}1\bar{1}\bar{1}11);\ e_2||0{,}5(1\bar{1}1\bar{1}\bar{1}1);\ e_3||0{,}5(\bar{1}1\bar{1}1\bar{1}1);$$
$$e_4||0{,}5(\bar{1}\bar{1}1\bar{1}11);\ e_5||0{,}5(1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}1).$$

Эти точки соответствуют вершинам икосаэдра.

Додекаэдрические точки:

$$e_{126}||0{,}5(111\bar{1}11);\ e_{236}||0{,}5(1111\bar{1}1);\ e_{346}||0{,}5(\bar{1}11111);$$
$$e_{456}||0{,}5(1\bar{1}1111);\ e_{156}||0{,}5(11\bar{1}111);$$
$$e_{12\bar{4}}||0{,}5(11\bar{1}\bar{1}\bar{1}1);\ e_{23\bar{5}}||0{,}5(\bar{1}11\bar{1}\bar{1}1);\ e_{\bar{1}34}||0{,}5(\bar{1}\bar{1}11\bar{1}1);$$
$$e_{\bar{2}45}||0{,}5(\bar{1}\bar{1}\bar{1}111);\ e_{1\bar{3}5}||0{,}5(1\bar{1}\bar{1}\bar{1}11).$$

Плюс противоположные – всего 20.

Додекаэдрические точки – всего 20 – более близкие к центру:

$$e_{126}||0{,}5(11\bar{1}1\bar{1}1);\ e_{236}||0{,}5(\bar{1}11\bar{1}11);\ e_{346}||0{,}5(1\bar{1}11\bar{1}1);$$
$$e_{456}||0{,}5(\bar{1}1\bar{1}111);\ e_{156}||0{,}5(1\bar{1}1\bar{1}11);$$
$$e_{12\bar{4}}||0{,}5(111\bar{1}1\bar{1});\ e_{23\bar{5}}||0{,}5(1111\bar{1}\bar{1});\ e_{\bar{1}34}||0{,}5(\bar{1}1111\bar{1});$$
$$e_{\bar{2}45}||0{,}5(1\bar{1}111\bar{1});\ e_{1\bar{3}5}||0{,}5(11\bar{1}11\bar{1}).$$

Итого: 24+40=64 – все возможные вершины 6-мерного куба.

Дальние икосаэдрические точки находятся на расстоянии τ, а более близкие – на расстоянии $1/\tau$ от центра. То есть большой икосаэдр в τ^2 раз больше малого.

Заметим, что додекаэдрические точки всегда получены суммированием двух троек единичных векторов, причем одна тройка состоит из соседей, вторая – из несоседних векторов. Отношение размеров большого к малому додекаэдру равно:

$$D_b/D_s = \tau^3 + 1)/(\tau^3 - 1) = \tau^3 = 2\tau + 1| = (2\tau + 2)/2\tau = (\tau + 1)/\tau = \tau.$$

Таким образом, проекция 6-мерного куба может быть описана следующим образом: вершины куба можно описать вершинами двух икосаэдров и двух додекаэдров, имеющих единый центр и общие оси симметрии, причем отношение размера додекаэдров равно $\tau : 1$, а отношение размеров икосаэдров равно $\tau^2 : 1$.

Возможны также два других описания, которые мы рассмотрим ниже.

6. Большой и малый звездчатый додекаэдры в составе 6-куба

Другой вариант описания точек 6-куба: все точки описываются большим и малым звездчатыми додекаэдрами, имеющими общий центр и общие оси симметрии.

Большой звездчатый додекаэдр: сумма соседних векторов малого икосаэдра должна порождать координату лепестка звезды. Проверим это свойство, суммируем три точки малого икосаэдра:

$$(e_6 + e_1 + e_2)/\tau = 0{,}5\big((11111\bar{1}) + (\bar{1}1\bar{1}\bar{1}11) + (1\bar{1}1\bar{1}\bar{1}1)\big) = 0{,}5(111\bar{1}11).$$

Это вершина додекаэдра, свойство подтвердилось.

Малый звездчатый додекаэдр: вершина лепестка равна единичному вектору, умноженному на τ^3, если сумма трех соседних единичных векторов порождала вершину додекаэдра-ядра звезды.

Для проверки этого свойства мы вначале умножим вершину большого икосаэдра на τ^{-3}, а затем сложим три таких соседних вектора, должны получиться вектора, описывающие малый додекаэдр.

Заметим, что расстояние до вершины большого икосаэдра равно $|0.5(111111)| = \tau$. Поэтому $\tau^{-3}\tau = \tau^{-2} = 2 - \tau$, тогда:

$$\begin{gathered}(110001)(2-\tau) = (220002) - (110001)\tau = \\ = |\text{используем матрицу } M \text{ из Приложения 1}| = \\ = 0{,}5(11\bar{1}1\bar{1}1)\ .\end{gathered}$$

Результат соответствует вершине малого додекаэдра в направлении $e_6 e_1 e_2$. Таким образом, был подтвержден второй вариант описания: все точки проекции 6-куба описываются вершинами большого и малого звездчатого додекаэдров, имеющих один и тот же центр и общие оси симметрии.

7. Ромбический триаконтаэдр

Возможно и третье описание точек проекции 6-куба: внешние точки являются вершинами ромбического триаконтаэдра, внутренние точки – вершинами полиэдра, который требует более подробного описания.

У триаконтаэдра (рис. 4) грани-ромбы описываются двумя парами точек, которые расположены по осям пятого и третьего порядков, то есть пара точек большого додекаэдра и большого икосаэдра. Если эти точки лежат в одной плоскости, то середина ромба должна быть описана с помощью любой из двух пар векторов, описывающих вершины ромба. Нужно показать, что вектор, описывающий середину ребра большого икосаэдра:

$$C_1 = 0{,}5(e_1 + e_2)\tau,$$

равен вектору, описывающему середину ребра большого додекаэдра:

$$C_2 = 0{,}5(e_{126} + e_{156})$$
$$C_1 = 0{,}5((111111) + (111\bar{1}\bar{1}1)) = (110011)$$
$$C_2 = 0{,}5((111\bar{1}11) + (11\bar{1}111)) = (110011).$$

Равенство подтверждено, поэтому подтверждается наличие в структуре 6-куба триаконтаэдра, что обычно отмечают при рассмотрении трехмерного паркета Пенроуза [1].

8. Внутренняя звезда – симметричный звездчатый икосаэдр

Внутри триаконтаэдра остаются точки, которые мы предлагаем назвать *симметричный звездчатый икосаэдр*, икосаэдр с правильными треугольными пирамидами, приклеенными к граням (рис. 9). Особенности этого полиэдра: 1) ребра его лепестков параллельны осям 3 порядка; 2) в проекции, нормальной оси 5 порядка вершины расположены как в двумерном паркете Пенроуза; 3) в проекции нормальной оси 2 порядка некоторые ребра лепестков образуют квадрат. Кроме того, расстояние между вершинами лепестков равно ребру внутреннего икосаэдра, то есть, ребра малых икосаэдра и додекаэдра равны.

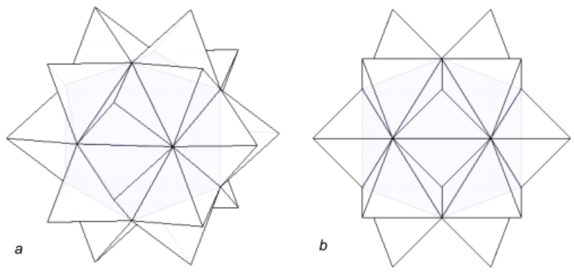

Рис. 9. Симметричный звездчатый икосаэдр:
a) общий вид;
b) вид вдоль оси симметрии 2 порядка

Рассмотрим, как можно подтвердить некоторые из этих свойств. Найдем вектор, описывающий ребро лепестка этой звезды (из вектора, описывающего вершину малого додекаэдра, вычитаем вектор, соответствующий вершине малого икосаэдра):

$$e_{612} - e_6 = 0{,}5\big((11\bar{1}1\bar{1}1) - (11111\bar{1})\big) = (00\bar{1}0\bar{1}1).$$

Это сумма трех несоседних единичных векторов, что подтверждает утверждение о том, что ребра лепестков параллельны осям третьего порядка (см. раздел «2. Свойства реперных векторов»).

Сравним векторы, описывающие ребро икосаэдра R_{12} и расстояние между вершинами лепестков симметричного звездчатого икосаэдра L:

$$R_{12} = e_2 - e_1 = 0{,}5\big((1\bar{1}1\bar{1}\bar{1}1) - (\bar{1}1\bar{1}\bar{1}11)\big) = (1\bar{1}10\bar{1}0);$$
$$L = e_{126} - e_{12-4} = 0{,}5\big((11\bar{1}1\bar{1}1) - (111\bar{1}1\bar{1})\big) = (00\bar{1}1\bar{1}1).$$

Видно, что полученные векторы в том и другом случае образуются суммой пары соседних реперных векторов и пары несоседних, причем результирующие вектора каждой пары направлены противоположно. Это дает одинаковую длину векторов, а, следовательно, подтверждает равенство ребер малых додекаэдра и икосаэдра. Третье свойство объясняется равенством ребер малых икосаэдра и додекаэдра: при рассматривании полиэдра вдоль оси 2 порядка некоторые ребра икосаэдра и додекаэдра оказываются взаимно ортогональными, что дает квадрат в проекции.

Приложение 1. Свойства золотого сечения

Золотое сечение $\tau = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$ равно отношению диагонали правильного пятиугольника к его стороне. Также отношение длины ребра лепестка правильной пятиконечной звезды к стороне ядра-пятиугольника этой звезды равно золотому сечению. Золотое сечение является решением уравнения:

$$\tau^2 = \tau + 1.$$

Проанализировав это уравнение, можно показать, что любая целая степень золотого сечения представима в виде суммы $A\tau + B$, где A и B – целые числа.

Таблица

Представление целой степени золотого сечения $\boldsymbol{\tau^N}$
в виде суммы вида $\boldsymbol{A\tau + B}$

N	*A*	*B*	*N*	*A*	*B*
0	0	1	–1	1	–1
1	1	0	–2	–1	2
2	1	1	–3	2	–3
3	2	1	–4	–3	5
4	3	2	–5	5	–8

Здесь $B(i) = A(i-1)$ и $A(i) = A(i-1) + B(i-1)$.

В связи с тем, что золотое сечение характеризует свойства правильного пятиугольника, эта величина постоянно встречается и в двумерном паркете Пенроуза [7], и в трехмерном паркете Пенроуза [1, 4]. Получим умножение единичного вектора на золотое сечение в трехмерной проекции 6-репера, произведенное таким образом, что результат можно будет описать суммой единичных векторов. Рассмотрим суммирование шести соседних единичных векторов (см. рис. 1). Пятерка симметрично расположенных векторов e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 дают вектор, параллельный e_6 (см. рис. 3 – проекция вдоль оси 2 порядка). В этой проекции икосаэдра можно заметить, что высота и ширина икосаэдра в τ раз больше его длины ребра (а), так как они являются диагональю пятиугольника из ребер. Проекция вектора е6 равна а/2, а проекция суммы векторов $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$ равна проекции суммы $e_3 + e_4$, по рисунку видно, что она равна ширине икосаэдра – τa. Поэтому можно сделать вывод, что длина вектора суммы шести ближайших векторов равна 2τ. Очевидно, что для умножения единичного вектора на золотое сечение нужно суммировать этот вектор и соседние, затем поделить полученную величину на 2. Поделить на τ можно следующим образом: по формуле $1/\tau = \tau - 1$ => суммируем соседние выбранному вектору единичные вектора, вычитаем центральный вектор, а затем результат делим пополам.

И то, и другое действие можно осуществить, используя векторы решетки, если для проецирования взять не примитивную кубическую решетку, а объемно-центрированную.

Запишем матрицы умножения и деления на золотое сечение произвольного вектора проекции 6-мерной кубической решетки:

$$\tau X = \frac{1}{2}MX = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X;$$

$$\frac{1}{\tau}X = \frac{1}{2}M'X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 \\ 1 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & 1 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 1 & 1 \\ 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{1} \end{pmatrix} X,$$

здесь $X = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$ – столбец индексов.

Для построения матриц выбирались пятерки соседних векторов у каждого вектора 6-репера в трехмерном пространстве. У вектора e_6 соседние вектора – $e_1..e_5$, у вектора e_i $(i \neq 6)$ соседними являются e_6, e_{i+1}, e_{i-1}, $-e_{i+2}$, $-e_{i-2}$, здесь индексы $k = i + j$ выбираются в пределах от 1 до 5 таким образом, что если они не попадают в этот интервал, то прибавляется или вычитается 5 (более строго: $k = mod_5\ (i + j - 1) + 1$ – индекс реперного вектора определяется наименьшим неотрицательным вычетом по модулю 5 величины $i + j - 1$).

Библиографический список

1. Levin, D., Steinhardt P.J. Quasicrystals. I. Definition and structure/ D. Levin, P.J. Steinhardt // Phys.Rev.B. – 1986. – V. 34 (2), Pp. 596–616.

2. Shechtman, D. Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry / D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53(20). – Pp. 1951–1953.

3. Steurer, W., Sutter-Widmer, D. Photonic and phononic quasicrystals / W. Steurer, D. Sutter-Widmer // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2007. – V. 40, Pp. 229–247.

4. Katz, A., Duneau, M. Quasiperiodic structures obtained by the projection method // A. Katz, M. Duneau // J.Phys. Colloques. – 1986. – V. 47(C3). – Pp. 103–113.

5. Coxeter, H.S.M. Regular polytopes / H.S.M. Coxeter // Methuen and Co., London, 1948. – 321 P.

6. Dunlap, R.A. The golden ratio and Fibonacci numbers / R.A. Dunlap // Singapore: World Scientific. – 2003. – 162 P.

7. Penrose, R. Pentaplexity: A Class of Nonperiodic Tilings of the Plane / R. Penrose // Eureka. – 1978. – V.39. – Pp. 16–22.

К содержанию