

УДК 624.042.8:534.1

УЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В РАСЧЕТЕ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

А.Н. Потапов, О.В. Карамышева, Р.А. Федас

Предложен метод расчета статически неопределимых рам с учетом пластических деформаций. Расчет основан на использовании диаграммы материала с упрочнением, приводящий к появлению пластической зоны (ПЗ). При реализации метода перемещений (МП) используются (как и при упругом решении задачи) два типа стандартных балок, но с тем отличием, что стандартные балки содержат ПЗ. Для обоих типов балок выполнены расчеты на все единичные и грузовые воздействия. Расчет рамы состоит из двух этапов. На упругом этапе определяются НДС системы и нагрузка, соответствующие предельно-упругому состоянию эпюры моментов. Пластический этап расчета выполняется при заданной длине ПЗ по методу последовательных нагружений. На каждой ступени нагружения приращение изгибающих моментов связывается с приращением нагрузки и вычисляется длина ПЗ.

Ключевые слова: метод перемещений, предел текучести, напряжение, пластическая зона, изгибающий момент, жесткость.

Введение. Учет упругопластических деформаций проводится, как правило, в рамках теории предельного равновесия (ТПР), которая основана на представлении идеальной упругопластической работы материала, описываемой диаграммой Прандтля. Разработка теории, проведенная советским ученым А.А. Гвоздевым [1], позволила создать эффективные методы расчета и проектирования многих конструкций, особенно ж/бетонных конструкций. Положения этой теории вошли в основные нормативные документы [2, 3].

Согласно диаграмме Прандтля напряжения материала конструкции в наиболее нагруженном элементе не могут превышать предела текучести и в случае увеличения нагрузки будет происходить перераспределение внутренних усилий от более нагруженных элементов к менее нагруженным, где пластическое состояние еще не достигнуто. При этом предполагается, что в изгибаемом элементе, достигшем предельного равновесия, поперечное сечение полностью находится в пластическом состоянии, а соседние с ним сечения находятся в упругопластическом состоянии.

В статье предлагается новый подход к расчету статически неопределимых рам, основанный на физически нелинейной работе материала, подчиняющейся диаграмме деформирования с упрочнением или билинейной диаграмме (рис. 1). Согласно этой диаграмме при появлении предельного

состояния в каком-либо сечении конструкции дальнейшее увеличение нагрузки будет приводить к увеличению внутренних усилий и напряжений, превышающих величину предела текучести (рис. 2, а). Тогда в окрестности рассматриваемого сечения будет возникать пластическая зона (ПЗ) некоторой длины l_p , на границах которой напряжения соответствуют предельному пластическому напряжению (сечения 1 и 3, рис. 2, б). Эти границы определяются уровнем предельного пластического момента M_0 [4]. Внутри этой зоны нормальные напряжения $\sigma_{\max} > \sigma_T$ (рис. 2, в).

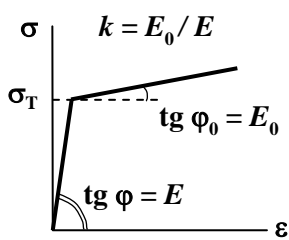


Рис. 1. Диаграмма деформирования линейно упрочняющегося материала

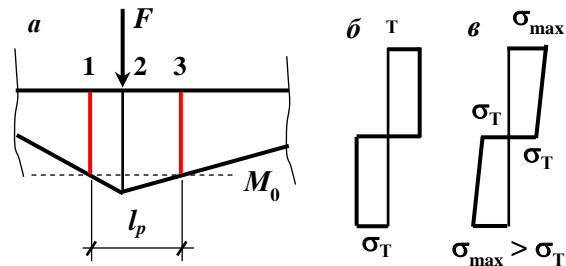


Рис. 2. Состояние текучести в несущем элементе: а – ПЗ в области сечения 2; б – напряжения в сеч. 1 и 3; в – то же в сеч. 2

В научной литературе понятие ПЗ используется главным образом в сейсмостойком строительстве. Впервые понятие ПЗ было введено в работе Полая и Булла [5] при расчете ж/бетонных сейсмостойких каркасов. Специалистами давно подмечено, что пластические деформации обладают способностью поглощать энергию сейсмических воздействий, преобразуя ее в тепловую энергию и затем рассеивая в окружающую среду. Вследствие этого обеспечивается снижение сейсмического воздействия на каркас, т.е. конструкция работает как энергопоглотитель.

Разработки по ПЗ вызвали большой интерес у специалистов; они получили закрепление в кодах США и других стран [6–8]. Разработки касаются вопросов, связанных с параметрами ПЗ (длины, места расположения ПЗ в конструкции, количество ПЗ) [9–13]. В России и на постсоветском пространстве данная проблема также нашла свое отражение [14–16]. Отметим, что как за рубежом, так и в России, понятие ПЗ рассматривается вне связи с упрочняющимся материалом. Под ПЗ понимается зона равного сопротивления [15], построение которой основано на ТПР. В контексте с билинейной диаграммой понятие ПЗ в научной литературе не обнаружено.

Основная идея подхода. Для учета ПЗ на основе бидиагональной диаграммы в качестве расчетного алгоритма используется МП. При проектировании строительных конструкций напряжения выше предела текучести не допускаются, поэтому при конструировании ПЗ необходимо проведение

специальных мероприятий по ее преобразованию в пластическую зону равного сопротивления (ПЗРС). Решение этой задачи должно быть встроено в расчетный алгоритм и выполняться параллельно с нелинейным процессом по определению предельной нагрузки.

При нелинейном расчете статически неопределимых рам МП, также как и в классическом варианте этого метода, используются стандартные стержни с двумя типами закреплений: «заделка – шарнир» и «заделка – заделка», которые должны быть рассчитаны на различные виды единичных и грузовых воздействий. В отличие от классического варианта, расчеты этих стержней должны проводиться с учетом ПЗРС. При этом зоны должны описываться специальными функциями, зависящими от ряда параметров: относительной длины зон, их расположения в пролете и физико-механические свойства материала.

Для практической реализации МП в нелинейном расчете рамы требуется ввести две дополнительные предпосылки помимо тех, которые известны в классическом варианте метода, ориентированного на линейный расчет.

Первая предпосылка полагает, что *переход от предельно-упругой эпюры напряжений к предельной пластической эпюре происходит мгновенно*. Иначе говоря, предельно-упругая эпюра в момент ее появления заменяется на предельную пластическую эпюру напряжений. Точно также предельно-упругий момент M_{el} заменяется на предельный пластический момент M_0 .

Вторая предпосылка регламентирует жесткость стержня на участке с упругопластическими деформациями, расположенном между предельно упругой и предельной пластической эпюрами напряжений и принимается равной E_0I (E_0 – модуль упругости). Т.е. реальная жесткость переменной величины заменяется заниженной постоянной жесткостью E_0I (рис. 1).

Обе предпосылки упрощают расчет, а вторая предпосылка работает в запас прочности конструкции, так как идеализация жесткости в сторону ее снижения на участке с реальными упругопластическими деформациями приводит к недооценке (снижению) предельной нагрузки (действительная предельная нагрузка будет выше расчетной предельной нагрузки).

Расчет рамы состоит из двух самостоятельных этапов (упругого и пластического). Упругий этап расчета проводится при заданных нагрузках F и геометрических размерах рамы. Он включает построение эпюры изгибающих моментов M , нахождение опасного сечения с максимальным моментом M_{max} и соотношения:

$$m = M_{el} / M_{max}. \quad (1)$$

По коэффициенту m строится предельно-упругая эпюра моментов и предельная нагрузка:

$$M_{lin} = mM, \quad F_0 = mF. \quad (2)$$

На эпюре M_{lin} все сечения являются упругими, кроме одного сечения (в силу первой предпосылки) с максимальным моментом, равным M_0 .

Пластический этап расчета проводится при заданной длине l_p с использованием методики последовательных нагружений. Для ступеней нагружения dF_0 в основной системе МП строятся эпюры приращений моментов. Для первой ступени нагружения длину l_{p1} ПЗРС можно принять из характера распределения усилий, например, для эпюры M_{lin} , умноженной на коэффициент $n = 1 + dF_0 / F_0$. На основе вычисленных поправочных (нелинейных) функций $f_{j1}(\alpha, k)$, где $\alpha = l_{p1} / l$, $k = E_0 / E$, l – длина балки, формируются коэффициенты системы канонических уравнений и правые части уравнений от приращений внешней нагрузки dF_0 . После решения системы и получения эпюры приращений моментов dM_{p1} , строятся результирующая эпюра: $M_{p1} = M_{lin} + dM_{p1}$ и предельная нагрузка: $F_{p1} = F_0 + dF_0$. Из эпюры M_{p1} по наибольшему значению момента ($M_{max} > M_0$) вычисляется длина l_{p2} ПЗ и функций $f_{j2}(\alpha, k)$ для следующей итерации во второй ступени нагружения. В каждой i -й итерации строятся: эпюра приращений моментов dM_{pi} , результирующая эпюра, результирующая предельная нагрузка:

$$M_{pi} = M_{p,i-1} + dM_{pi}, \quad F_{pi} = F_{p,i-1} + dF_0 \quad (3)$$

и длина $l_{p,i+1}$ ПЗ. Процесс нагружения протекает до тех пор, пока найденная величина не достигнет заданной длины l_p в соответствии с неравенством:

$$(l_p - l_{p,i+1}) \leq \text{eps}. \quad (4)$$

Пластические зоны равного сопротивления. При деформировании каркасов, вызванным сейсмическим воздействием, ПЗ возникают в горизонтальных несущих элементах каркаса – ригелях (рис. 3). Максимальные изгибающие моменты возникают в концевых частях ригелей. Поскольку регламенты не допускают наличия пластических деформаций в узлах элементов конструкций, то ПЗ проектируют на некотором расстоянии b от колонны, т.е. создаются зоны усиления, где несущая способность ригеля обеспечивается за счет его повышенной жесткости [15, 16].

Так как эпюра моментов имеет линейный закон (рис. 3), то для создания ПЗРС также принимается линейный закон изменения момента инерции

$$I_x = I \frac{x}{l(1-\beta-\alpha)}. \quad (5)$$

Данная зависимость момента инерции в пределах длины ПЗ обеспечивает в этой зоне равную несущую способность с напряжениями σ_T .

Предложенный подход иллюстрируется примером статического расчета двухэтажного каркаса на действие горизонтальных сил, моделирующих сейсмическое воздействие.

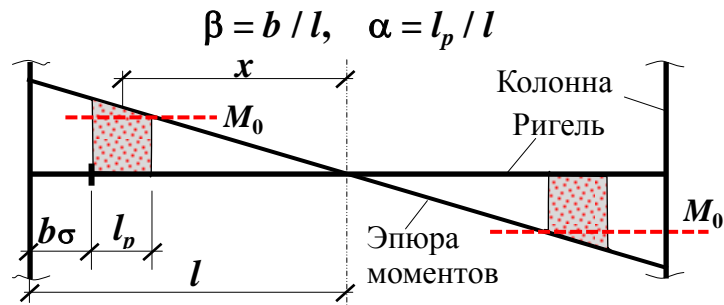


Рис. 3. ПЗ в ригеле сейсмостойкого каркаса

Пример. Расчетная схема 2-этажной стальной рамы представлена на рисунке 4,а ($F = 75$ кН, $l = 450$ см, $h_1 = 1.9l$, $h_2 = 1.6l$). Материал рамы – сталь 09Г2. Горизонтальные элементы – ригели изготовлены из двутавра № 40 ($I_x = 19062$ см⁴; $W_x = 953,1$ см³); вертикальные элементы квадратного сечения 30×30 см² выполнены из 4-х равнобоких уголков № 14 ($d = 12$ мм).

Характеристики прочности и деформативности: $\sigma_T = 305$ МПа, $\sigma_B = 440$ МПа, остаточное удлинение при разрыве $\delta_B = 0,21$. Модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, модуль упругости на участке упрочнения материала $E_0 = (\sigma_B - \sigma_T) / (\delta_B - \sigma_T / E) = 647,33$ МПа. Отсюда предельно-упругий момент $M_{el} = W_x \sigma_T = 328,82$ кН·м (согласно первой предпосылке $M_{el} = M_0$); изгибные жесткости стержней $EI = 40030,2$ кН·м², $E_0I = 123,4$ кН·м².

Предварительный расчет показывает, что наибольшие изгибающие моменты возникают в концевых частях ригеля 1-го этажа. ПЗ проектируется на расстоянии $b = 0,05l$ от узла (зона усиления с жесткостью $2EI$, рис. 4, а).

Цель примера: показать, как определяются предельные нагрузки F_p для заданных длин l_p ПЗРС с использованием МП. Рассматриваются длины ПЗ от 5 см до 35 см, кратные шагу 5 см.

Ввиду симметрии рамы, основная система МП имеет четыре неизвестных – два угловых и два линейных перемещения Z_k (рис. 4, б). Нумерация дополнительных связей показана цифрами в квадратах.

Расчет стандартной балки при единичном повороте заделки (рис. 4, в) выполнен для момента инерции (5) на участке длиной l_p . Поправочная функция f_1 в выражении момента M_A содержит величину δ_{pi} , которая отвечает за податливость на данном участке с переменной жесткостью:

$$\delta_{pi} = \int_{l-b-l_{pi}}^{l-b} \frac{x^2 dx}{E_0 I_x} = \int_{l-b-l_{pi}}^{l-b} \frac{x(1-\beta-\alpha_i) dx}{E_0 I} = \frac{l^3}{3EI} \cdot v_{pi},$$

где

$$v_{pi} = 3\alpha_i(1-\beta-\alpha_i)(1-\beta-\alpha_i/2)/k. \quad (a)$$

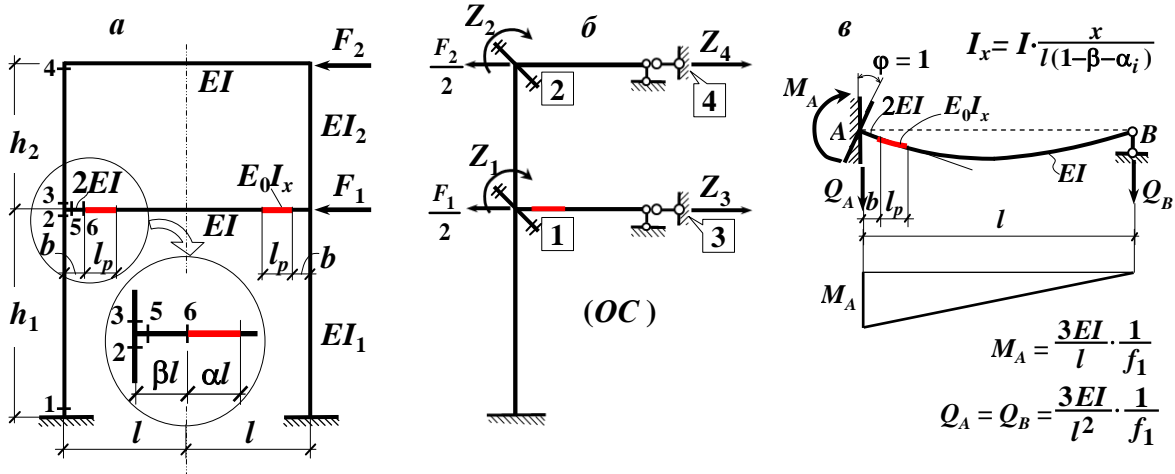


Рис. 4. Расчетная схема 2-этажного каркаса с ПЗ в ригеле первого этажа (а); б – основная система МП с учетом симметрии каркаса; в – деформированное состояние балки с ПЗ при единичном повороте жесткого узла

Момент M_A и функция f_1 имеют вид:

$$M_A = \frac{3EI}{l} \cdot \frac{1}{f_1}, f_1 = (1 - \alpha_i)^3 - [1 - (1 - \beta)^3]/2 - 3\alpha_i\beta (\alpha_i + \beta - 1) + \nu_{pi}, \quad (6)$$

где: $\beta = b/l$, $\alpha_i = l_{pi}/l$, $k = E_0/E$. Относительная длина α_i ПЗ формируется в нелинейном процессе на каждой i -й ступени нагружения.

Из предварительного расчета рамы (при $F = 75$ кН) следует, что все сечения отвечают упругому состоянию, а наибольшие напряжения соответствуют сечению 6 (рис. 4, а) с изгибающим моментом $M_6 = 277,93$ кН·м. Вычислив коэффициент (1) $m = M_0 / M_6 = 1,183$, по итогам упругого расчета будем иметь эпюру моментов (2) M_{lin} с моментом $M_0 = 328,82$ кН·м (в сечении 6) и предельную нагрузку $F_0 = 88,73$ кН. Эпюра M_{lin} условно показана на рисунке 5 на левой половине рамы. Ее особенностью является то, все сечения рамы работают упруго (хотя по 1-й предпосылке принято, что сечение 6 полностью находится в области пластической деформации).

В нелинейном расчете принималась ступень нагружения $dF = 0,01F_0$. Система канонических уравнений при i -й ступени нагружения, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1dF} \\ R_{2dF} \\ R_{3dF} \\ R_{4dF} \end{bmatrix} = 0,$$

где: $r_{11} = (4,145 + 3 \cdot \frac{1}{f_1}) \frac{EI}{l}$, $r_{12} = 1,125 \frac{EI}{l}$, $r_{13} = 0,614 \frac{EI}{l^2}$, $r_{14} = -2,109 \frac{EI}{l^2}$,

$r_{22} = 5,25 \frac{EI}{l}$, $r_{23} = -r_{14}$, $r_{24} = r_{14}$, $r_{33} = 4,211 \frac{EI}{l^2}$, $r_{34} = -2,637 \frac{EI}{l^3}$, $r_{44} = -r_{34}$;

$R_{1dF} = R_{2dF} = 0$, $R_{3dF} = -0,5dF$, $R_{4dF} = dF$.

Нелинейный процесс зависит только от коэффициента r_{11} , содержащего поправочную функцию f_1 . В ходе итераций при отыскании предельной нагрузки для заданной длины l_p происходит корректировка параметров α_i , ν_{pi} в (а), (б) и функции f_1 пока не удовлетворится неравенство (4).

На правой половине рамы (рис. 5) показаны эпюры изгибающих моментов для ПЗРС с длиной $l_p = 15$ см (синий цвет линий) и с длиной $l_p = 30$ см (зеленый цвет линий). При длине l_p , равной 20 см и более, ПЗ появляются в сечениях 4 и 1 (стойки рамы), а также в ригеле 2-го этажа.

На рис. 6 дана общая картина изменения предельных нагрузок в зависимости от длин ПЗ. Уровень разрушающей нагрузки, полученной по методу предельного равновесия, на 10,2 % выше предельной нагрузки для ПЗ длиной $l_p = 15$ см (черная горизонтальная прямая). Однако, он ниже уровней предельных нагрузок для зон длиной l_p более 21 см (синяя горизонтальная прямая на рисунке соответствует длине $l_p = 30$ см). Это свидетельствует о новых возможностях предложенного подхода и скрытых резервах материала конструкции при учете свойств упрочнения.

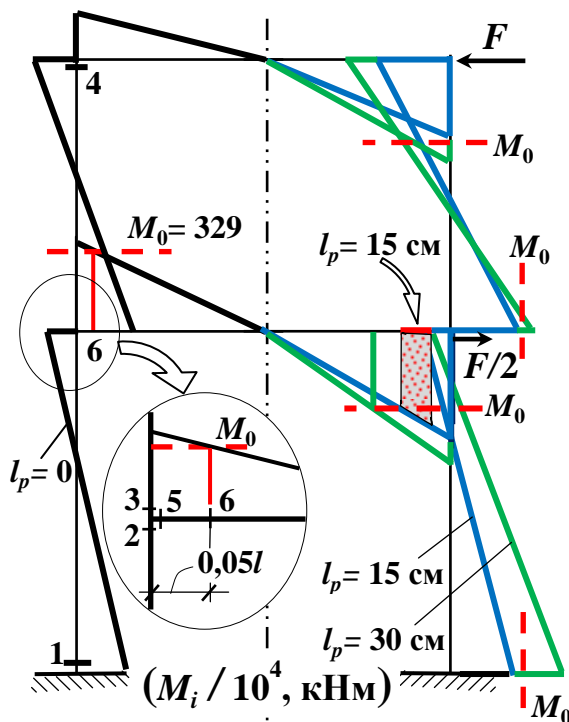


Рис. 5. Эпюры изгибающих моментов при длине ПЗ: $l_p = 0$ (черный цвет); $l_p = 15$ см (синий цвет); $l_p = 30$ см (зеленый цвет)

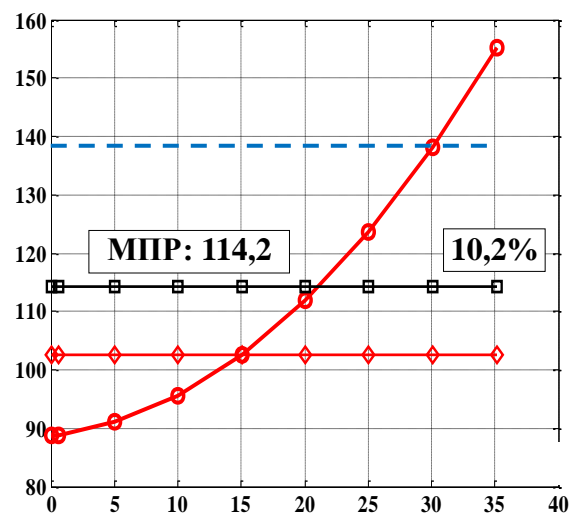


Рис. 6. Предельные нагрузки для соответствующих ПЗ

Выводы

1. Использование билинейной диаграммы при построении ПЗ равного сопротивления позволяет рассчитывать предельные нагрузки, которые в зависимости от длины ПЗ по величине могут быть как выше, так и ниже разрушающих нагрузок, полученных в рамках ТПР.
2. Выполнение расчетов по предложенной методике позволяет более реально оценивать предельные нагрузки для заданных ПЗ и тем самым создавать более экономичные и более надежные конструкции.
3. Метод расчета при построении ПЗ равного сопротивления может быть рекомендован при проектировании сейсмостойких каркасов.
4. Предложенный метод может быть использован в учебном процессе при изучении дисциплины «Нелинейные задачи строительной механики».

Библиографический список

1. Гвоздев, А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / А.А. Гвоздев. – М.: Стройиздат, 1949. – 280 с.
2. СП 63.13330.2012. (СНиП 52-01-2003) Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения (Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003). – М.: ГУП ЦПП, 2012. – 128 с.
3. СП 16.13330.2017 Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. – М.: Минстрой России, 2017. – 148 с.
4. Биргер, И.А. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.
5. Paulay, T. Shear Effect on Plastic Hinges of Earthquake Resisting Reinforced Concrete Frames, Structural Concrete under Seismic Actions / T. Paulay, I.N. Bull // Bulletin D, Information, Comite Euro-International du Beton, Paris, 1979, № 132, Pp. 165–172.
6. ATC-40 Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings, California, USA, 1996. – 334 с.
7. NZS 3101. Part 2. 2. 2006 Code of Design Practice for the Design of Concrete Structures, New Zealand Standards Association, Wellington. – 17 с.
8. ACI 318-14 Building Code Requirements for Structural Concrete, Michigan, USA, 2014. – 509 с.
9. Kailai, D. Experimental and Analytical Study of Fully Prefabricated Damage-Tolerant Beam to Column Connection for Earthquake-Resilient Frame / D. Kailai, Z. Di, Y. Cheng, X. Tengfei // ASCE Journal of Structural Engineering. – 2019. – Vol. 145, № 3.
10. Tae-Sung, E. Plastic Hinge Relocation Methods for Emulative PC Beam–Column Connections / E. Tae-Sung, P. Hong-Gun, H. Hyeon-Jong, K. Su-Min // ASCE Journal of Structural Engineering. – 2016. – Vol. 142, № 2.
11. Chao-Lie, N. Probabilistic Approach for Estimating Plastic Hinge Length of Reinforced Concrete Columns / N. Chao-Lie, L. Bing // ASCE Journal of Structural Engineering. – 2016. – Vol. 142, № 3.

12. Megalooikonomou, K.G. Effect of yield penetration on column plastic hinge length / K.G. Megalooikonomou, S.P. Tastani, S.J. Pantazopoulou // *Journal of Engineering Structures*. – 2018. – Vol. 156. – Pp. 161–174.
13. Fang, Y. Effect of load cycling on plastic hinge length in RC columns / Y. Fang, W. Yu-Fei. – 2017. – Vol. 147. – Pp. 90–102.
14. СНиП II-7-81*. Строительство в сейсмических районах / Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2002. – 44 с.
15. Пособие по расчету и конструированию стальных сейсмостойких каркасов многоэтажных зданий (в развитие СНиП РК 2.03-04-2001), Часть I., Мин-ва индустрии и торговли Респ. Казахстан (МИТ РК). – 2003. – С. 52.
16. Соснин, А.В. Методика двухстадийного расчета армирования элементов ж/бетонных каркасных зданий и сооружений на действие сейсмических сил с применением концепции нелинейного статического анализа. Часть 1: постановка задачи, структура методики, информационная база исследования и стратегия определения параметров зон пластичности / А.В. Соснин // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура»*. – 2018. – Т. 18, № 1. – С. 5–31.

[К содержанию](#)