

УДК 621.372.2

ПРОБЛЕМА ИСХОДНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ ВАРИАЦИОННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА МИНИМУМА ПОТЕРЬ

М.И. Грамм, И.Е. Киселю

Обсуждаются возможности практического применения топологического толкования итераций в каузальном графе электрической цепи при формировании исходного приближения для методов поиска экстремума функционала электрической цепи на основе принципа минимума потерь. Значительный прогресс современного ПО для вариационных методов в большинстве современных математических пакетов для ПК не снимает проблемы исходного приближения. Предлагаемый алгоритм его формирования позволяет использовать принцип минимума потерь не только при включении в функционал цепи неэлектрических мощностей, но и применять вариационные методы в нелинейных задачах.

Ключевые слова: электрическая цепь, вариационные методы, минимум функционала, надёжность расчёта, мультиорграф цепи.

Введение. Процессы в электрических цепях следуют принципу минимума потерь [1]. Аналитическое и численное использование этого экстремального свойства цепей при вычислении вектора \mathbf{x} текущего состояния цепи с матрицей \mathbf{Y} системы уравнений $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{J}$ цепи в однородном базисе возможно как отыскание минимума функционала потерь следующего вида:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{x} - 2 \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{x}. \quad (1)$$

Отметим, что в случае комплексных элементов в \mathbf{Y} , \mathbf{x} и \mathbf{J} форма (1) несколько изменяется (см. ниже). Известные преимущества вариационных методов заключаются в простоте составления функционалов типа (1) ввиду прозрачности физики их слагаемых. Например, в цепи постоянного тока первое слагаемое в (1) есть просто сумма мощностей на резисторах (квадрат тока снимает правило знаков), а второе слагаемое – сумма мощностей источников. При соблюдении определённых ограничений на вольтамперные характеристики элементов, принцип минимума может служить основой и для расчётов нелинейных цепей. Немаловажной оказывается и возможность включения в состав функционала (1) описаний и неэлектрических потерь, а также параметров источников неэлектрической энергии.

Сложности практического применения экстремальных принципов заключаются в недоступности до недавнего времени действительно эффективных программных реализаций методов отыскания экстремумов. Ныне в

обращении находятся доступные на инженерном уровне программы для ПК отыскания экстремумов широкого класса функций, что делает принцип минимума потерь чрезвычайно полезным при расчётах сложных систем. Однако, проблема обязательного задания исходного вектора $\mathbf{x}^{(0)}$ для запуска процесса поиска экстремума в них не имеет универсального решения. Вместе с тем из-за неудачного выбора $\mathbf{x}^{(0)}$ любой алгоритм может выводить на решения, надёжность которых легко подпадает под подозрение.

Суть предложения. Ниже представлен связанный со структурой цепи алгоритм организации $\mathbf{x}^{(0)}$, надёжность использования которого обеспечена его происхождением – прямой привязкой формирования $\mathbf{x}^{(0)}$ к каузальному (причинно-следственному) графу цепи, использование которого при расчётах цепей предложено в [2]. Первый шаг поиска экстремума в предлагаемом алгоритме является приближённым решением системы $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{J}$, обязательно входящим в полное разложение дальнейшего точного решения. При этом технология получения такого $\mathbf{x}^{(0)}$ проста. Попутно далее обсуждаются и некоторые другие полезные свойства $\mathbf{x}^{(0)}$, получаемого на основе предлагаемой методики.

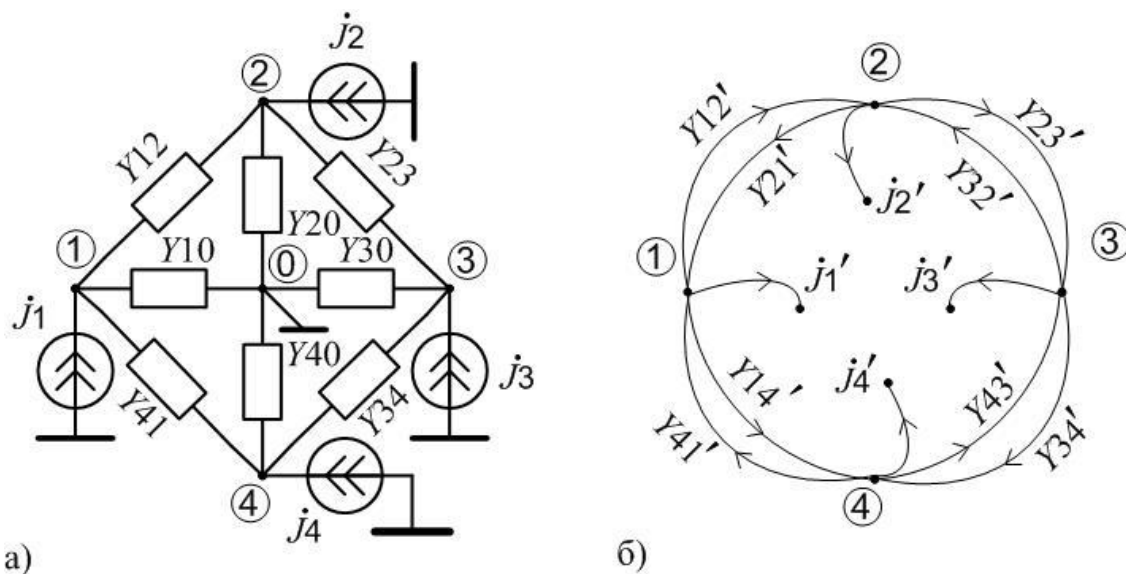


Схема (а) и её каузальный мультиорграф (б)

Пусть требуется рассчитать вектор $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}$ потенциалов узлов схемы по рис. а. С некоторыми ограничениями, о которых договоримся ниже, можем допустить, что схема содержит источники синусоидального тока и комплексные проводимости в ветвях. Полагаем, что есть возможность организации системы уравнений $\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{J}$ в однородном базисе для потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ с матрицей \mathbf{Y} проводимостей.

Точное решение для вектора Φ потенциалов может быть получено в линейном случае и без привлечения вариационных алгоритмов стандартным обращением $\Phi = Y^{-1} \cdot J$ матрицы Y . Однако вариационный подход на основе принципа минимума потерь открывает новые возможности. При этом объём работы компьютера в связи с привлечением обычно сложных алгоритмов поиска экстремума увеличивается, но объём подготовительной работы инженером уменьшается. Действительно, в случае цепи постоянного тока по рис. а все компоненты (1) вещественны и функционалом $f(\Phi)$ является функция многих переменных с физически прозрачными компонентами (мощностями):

$$f(\Phi) = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \cdot y_{12} + (\varphi_2 - \varphi_3)^2 \cdot y_{23} + (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \cdot y_{34} + (\varphi_4 - \varphi_1)^2 \cdot y_{41} + \varphi_1 \cdot y_{10} + \varphi_2 \cdot y_{20} + \varphi_3 \cdot y_{30} + \varphi_4 \cdot y_{40} - 2 \cdot J_1 \cdot \varphi_1 - 2 \cdot J_2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot J_3 \cdot \varphi_3 - 2 \cdot J_4 \cdot \varphi_4. \quad (2)$$

Задача отыскания координат Φ экстремума функции (2) в различных современных математических пакетах для ПК обеспечена алгоритмами и решается, например, в Matlab`е применением функций `fmins`, `fminsearch`, `fminu`. Первые две реализуют симплекс-метод Нелдера-Мида. Функция `fminu` реализует метод градиентного спуска. Используется и функция `leastsq` – метод наименьших квадратов. Любой из алгоритмов требует вектор $\Phi^{(0)}$ исходного приближения. Опишем предлагаемый подход для $\Phi^{(0)}$.

Пусть систему $Y \cdot \Phi = J$ решаем методом последовательных приближений. Простейшим является алгоритм Ричардсона [3], использующий вектор $\Phi^{(k)}$ предыдущего приближения для вычисления вектора $\Phi^{(k+1)}$ следующего приближения:

$$\Phi^{(k+1)} = J' + A \cdot \Phi^{(k)}, \quad (3)$$

где J' – «нормализованный» вектор источников, A – матрица смежностей узлов каузального мультиорграфа цепи (рис. б).

Нормализация системы $Y \cdot \Phi = J$ и организация по ней матрицы A заключается в делении каждой из i -й строк матрицы Y на элемент y_{ii} её главной диагонали (например, $y_{22} = Y_{12} + Y_{23} + Y_{20}$, рис. а). Элементы нормализованной системы далее помечаем штрихом. Естественно, вектор Φ неизвестных при нормализации остаётся неизменным, но превращение главной диагонали нормализованной матрицы Y' в диагональ из единиц позволяет систему $Y \cdot \Phi = J$ заменить равноценной системой $(1 - A) \cdot \Phi = J'$ и далее организовать процесс (3). Например, для графа по рис. б при вещественных проводимостях y_{ik} матрица A будет иметь вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & y_{12}/y_{11} & 0 & y_{14}/y_{11} \\ y_{12}/y_{22} & 0 & y_{23}/y_{22} & 0 \\ 0 & y_{23}/y_{33} & 0 & y_{34}/y_{33} \\ y_{14}/y_{44} & 0 & y_{34}/y_{44} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12}' & 0 & Y_{14}' \\ Y_{21}' & 0 & Y_{23}' & 0 \\ 0 & Y_{32}' & 0 & Y_{34}' \\ Y_{41}' & 0 & Y_{43}' & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Очевидно, матрица A смежностей графа по рис. б не будет симметричной, что вызывает квалификацию соответствующего ей графа по рис. б как «мультиорграф» с ориентированными встречными рёбрами с неодинаковыми передачами [4]. После организации матрицы A возможна запись вида $\varphi = J' + A \cdot \varphi$ и весь процесс (3) может быть сведён к достаточно простому бесконечному ряду:

$$\varphi^{(k+1)} = A^0 \cdot J' + A \cdot J' + A^2 \cdot J' + A^3 \cdot J' + \dots + A^k \cdot J' + \dots + A^{k+1} \cdot J'. \quad (5)$$

Именно ряд (5) и порождает простую эвристику организации компонент вектора $\varphi^{(0)}$ исходного приближения. Дело в том, что каждый из элементов вектора φ строится в соответствии с рядом (5) как сумма произведений передач рёбер мультиорграфа по рис. б на пути от данного узла до «поглощающего» узла с весом нормализованного источника. «Поглощающим» узлом считается любой узел, не инцидентный ребру от этого узла. При составлении слагаемых (5) длина пути берётся равной номеру слагаемого в ряду (5). Это несложно выяснить, выполняя поточечно операции по (5).

Например, потенциал узла 1 схемы по рис. а при учёте первых двух слагаемых (берём пути длиной не более двух рёбер) ряда (5) равен:

$$\varphi_1 = J_1' + J_2' \cdot Y_{12} + J_4' \cdot Y_{14}' = J_1/y_{11} + J_2 \cdot y_{12}/y_{11} \cdot y_{22} + J_4 \cdot y_{14}/y_{11} \cdot y_{44}. \quad (6)$$

Как видим, техника организации исходного приближения предельно проста, хотя приведённое выше доказательство этой техники требует привлечения относительно сложных сведений.

В связи с этой доказанной выше корректностью представленного метода необходимо отметить и иные возможные применения оценочных вычислений на его основе.

В частности, использование дальнейших слагаемых ряда (5) в поточечном варианте позволяет вычислять с той или иной управляемой точностью потенциал одного или любого конечного числа нужных узлов, не прибегая к требующемуся в общем анализе цепей построению и решению системы для всей цепи. При слабых межузловых связях использование только первых двух-трёх приближений может давать вполне удовлетворительные для практики результаты по потенциалу. Другой полезной возможностью является возможность автономного расчёта входного сопротивления цепи со стороны конкретного узла, а также возможность построения описания переходного процесса при коммутации в данном узле на основе величины

входного сопротивления. Подход может оказаться чрезвычайно полезным и в условиях отсутствия достоверных сведений об удалённой периферии обширной сети.

Каковы возможности оценки точности величин, получаемых по (5)? Поскольку ряд (5) является суммой геометрической прогрессии со знаменателем в виде матрицы \mathbf{A} , то его сходимость определяется модулями собственных чисел матрицы \mathbf{A} , а также соотношением между собственными векторами при этих собственных числах и вектором \mathbf{J}' нормализованных источников. Например, если вектор \mathbf{J}' совпал с собственным вектором для некоторого собственного числа λ_i , то степени матрицы \mathbf{A} в (5) могут быть просто заменены скалярными степенями числа λ_i . Отсюда ясно, что чем меньше λ_i по модулю относительно единицы, тем быстрее сходится ряд (5). Весьма подробно спектральные свойства матриц типа матрицы \mathbf{A} рассмотрены в [1].

Обсуждаемый алгоритм организации приближённого расчёта вектора исходного приближения по мультиорграфу цепи может быть распространён при определённых ограничениях и на цепи синусоидального тока при задании всех параметров в комплексной форме.

Во-первых, в этом случае функционал (1) должен быть переписан в форме с сопряжёнными составляющими величинами:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \bar{\mathbf{x}} - 2 \cdot \mathbf{J}^T \cdot \bar{\mathbf{x}}. \quad (7)$$

Во-вторых, использование в комплексном случае того или иного конкретного программного обеспечения может либо предполагать, что поиски минимума (7) будут подразумевать минимум по модулю (7), либо поиски ориентированы на минимум вещественной части (7) – минимум по активной мощности цепи. Очевидно, последнее и является реализацией принципа минимума потерь. В остальном логика использования описанного алгоритма формирования исходного приближения в комплексном случае остаётся идентичной представленной выше.

Заключение. В отсутствие в электрической цепи элементов с неоднозначной вольтамперной характеристикой функционал общей мощности цепи имеет одну точку минимума. Однако современное разнообразие практических вариационных алгоритмов требует осторожности при задании исходного приближения для того, чтобы полученное на ПК решение на основе принципа минимума потерь не вызывало сомнений.

Предложенный в статье алгоритм формирования исходного приближения на основе представления структуры цепи с помощью каузального мультиорграфа не только обеспечивает надёжность результата вариационного поиска минимума потерь в цепи, но и открывает некоторые новые возможности по оценочному расчёту отдельных параметров состоя-

ния цепи без необходимости рассчитывать полный комплект токов и напряжений цепи.

Необходимо также отметить, что каузальный мультиорграф можно строить и не только при расчётах потенциалов узлов цепи, но и для любых сложных систем [5]. Описанный алгоритм организации исходного приближения на основе мультиорграфа носит универсальный характер.

Библиографический список

1. Грамм, М.И. Матрично-спектральные методы расчётов в электротехнике и принцип минимума потерь / М.И. Грамм, Ю.Н. Немов, Ф.Н. Шакирзянов. – М.: Изд. Дом МЭИ, 2006. – 204 с.
2. Грамм, М.И. Вариант дедуктивной организации курса теоретической электротехники / М.И. Грамм // Электричество. – 1996. – № 10. – С. 62–70.
3. Хейгеман, Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М.: Мир, 1986. – 436 с.
4. Цветкович, Д. Спектры графов – теория и применение / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс. – Киев.: Наукова думка, 1984. – 386 с.
5. Грамм, М.И. Электрофизические модели сложных экономик / М.И. Грамм, Ф.Н. Шакирзянов // Электричество. – 2015. – № 3. – С. 52–60.

[К содержанию](#)