УДК 517.9

ПРОПАГАТОРЫ УРАВНЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ВОЛН

Е.В. Бычков

В статье исследуется начально-краевая задача для уравнения инерционных волн. Решением этой задачи являются инерционные (гироскопические) волны, возникающие под воздействием силы Архимеда и силы инерции. В работе показано, что спектр пучка операторов относительно оператора Лапласа ограничен. На основе теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов и теории уравнений соболевского типа высокого порядка строятся пропагаторы уравнения инерционных волн, заданного в цилиндрической области и в параллелепипеде.

Ключевые слова: (A, p)-ограниченные пучки операторов, уравнение инерционных волн, пропагаторы.

Введение

Во внутренних волнах максимальные вертикальные смещения частиц возникают не на поверхности жидкости, а в толще, например, на границе раздела двух областей жидкости с различными плотностями. В природе данное явление можно наблюдать при впадении рек, несущих пресную воду, в моря с соленой водой. А также в океане, когда опресненная вода поднимается над более тяжелой водой с большей соленостью, такое явление было названо «мертвая вода». При прохождении кораблей через «мертвые воды» часть мощности двигателя расходуется на возбуждение внутренних волн, что приводит к снижению его скорости. Такая двухслойная модель жидкости является простейшей, для которой внутренние волны совершенно аналогичны поверхностным. В обоих случаях волны сосредоточены вблизи границы раздела сред. Если допустить, что по обе стороны от границы раздела сред жидкость заполняет целиком каждое полупространство, то дисперсионное соотношение для внутренних волн будет аналогично волновому соотношению $\omega^2 = gk$ [1] для гравитационных волн, но с другим, эффективным значением ускорения силы тяжести.

Инерционные (гравитационно-гироскопические) волны в однородной несжимаемой жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$, описываются линейной системой уравнений гидродинамики (системой уравнений Соболева [2]).

$$\begin{cases} \vec{v}_t + \frac{1}{\rho_0}\nabla p + 2[\vec{\Omega}\times\vec{v}] = 0, \\ \rho_t = 0, \\ \nabla\vec{v} = 0, \end{cases}$$

где $\vec{v} = \{u, v, w\}$ – вектор скорости частицы жидкости, $\rho_0 = const$ – равновесная плотность, частота плавучести N^2 равна нулю. Если направить ось Oz параллельно вектору $\vec{\Omega}$, то получим уравнение для вертикальной компоненты скорости частиц жидкости (уравнение Соболева [3]):

$$\Delta w_{tt} + F^2 w_{zz} = 0, \qquad (1)$$

где $2[\vec{\Omega}\times\vec{v}] = \{-Fv, Fu, 0\}$, $F = 2\Omega$ – параметр Кориолиса. Волновые решения, удовлетворяющие уравнению (1), называются инерционными или гироскопическими волнами распространяющиеся на поверхности вращающейся жидкости. В работе [2] получено решение уравнения (1) в неограниченной области методом функции Грина. Описано поведение решений двумерных Гамильтоновых систем, возникающих в теории малых колебаний вращающейся идеальной жидкости, и построена математическая модель зарождения вихревой структуры в работе [4].

В данной работе мы исследуем уравнение (1) в ограниченной области $D \subset R^3$ с гладкой границей ∂D. На границе области зададим однородное условие Дирихле:

$$w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D \times R \qquad (2)$$

и в начальный момент времени зададим условие Коши:

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0. \qquad (3)$$

Решение задачи (1)–(3) будем искать в рамках теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов, разработанной А.А. Замышляевой [5]. В монографиях [3, 6, 7] подробно исследуются уравнения соболевского типа и уравнения, неразрешенные относительно старшей производной по времени.

(A, p)-ограниченные пучки операторов

Пусть пространства U, F банаховы, операторы $A, B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in L(U;F)$ линейные и непрерывные. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов $B_{n-1}, \ldots, B_1, B_0$. Множества комплексных чисел $\sigma^A(\vec{B}) = \overline{C} \setminus \rho^A(\vec{B})$ и $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in C : (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in L(F;U)\}$ назовем, соответственно, A-*резольвентным множеством* и A-*спектром* пучка $\vec{B}$. Оператор-функцию комплексной переменной $R_\mu^A(\overleftarrow{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\vec{B})$ назовем A-*резольвентой* пучка $\vec{B}$.

Пучок $\vec{B}$ называется *полиномиально* A-*ограниченным,* если $\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \in L(F;U)).$ Причем если существует оператор $A^{-1} \in L(F;U)$, то пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен.

В работе [8] получено необходимое условие существования проекторов:

$$\int\limits_\gamma \mu^k R_\mu^A(\vec{B})d\mu \equiv \mathbb{O}, \quad k = 0,1,\ldots,n- \tag{4}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Лемма 1. [8] Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и условие (4) выполнено. Тогда операторы:

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^A(\vec{B})\mu^{n-1}Ad\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu^{n-1}AR_\mu^A(\vec{B})d\mu$$

являются проекторами в пространствах U и F, соответственно.

Обозначим $U^0 = \ker P, \quad F^0 = \ker Q, \quad U^1 = \operatorname{im} P, \quad F^1 = \operatorname{im} Q$. В силу леммы (1) $U = U^0 \oplus U^1, \quad F = F^0 \oplus F^1$. Обозначим A^k (B_l^k) сужения операторов A (B_l) на $U^k, k = 0,1; l = 0,1,\ldots,n-1.$

Теорема 1. Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и условие (4) выполнено. Тогда

(i) $A^k \in L(U^k;F^k), k = 0,1;$

(ii) $B_l^k \in L(U^k;F^k), k = 0,1, l = 0,1,\ldots,n-1;$

(iii) оператор $(A^1)^{-1} \in L(F^1;U^1)$ существует;

(iv) оператор $(B_0^0)^{-1} \in L(F^0;U^0)$ существует.

По теореме 1 можно построить операторы $H_0 = (B_0^0)^{-1}A^0 \in L(\mathrm{U}^0)$, $H_1 = (B_0^0)^{-1}B_1^0 \in L(\mathrm{U}^0), \cdots,$ $H_{n-1} = (B_0^0)^{-1}B_{n-1}^0 \in L(\mathrm{U}^0)$ и $S_0 = (A^1)^{-1}B_0^1 \in L(\mathrm{U}^1)$, $S_1 = (A^1)^{-1}B_1^1 \in L(\mathrm{U}^1)$, $\cdots$, $S_{n-1} = (A^1)^{-1}B_{n-1}^1 \in L(\mathrm{U}^1)$.

Введем *семейство операторов* $\{K_q^1, K_q^2, \ldots, K_q^n\}$ как:

$$K_0^s = O, s \neq n, K_0^n = I,$$

$$K_1^1 = H_0, K_1^2 = -H_1, \ldots, K_1^s = -H_{s-1}, \ldots, K_1^n = H_{n-1},$$

$$K_q^1 = K_{q-1}^n H_0, K_q^2 = K_{q-1}^1 - K_{q-1}^n H_1, \ldots, K_q^s = K_{q-1}^{s-1} - K_{q-1}^n H_{s-1}, \ldots,$$

$$K_q^s = K_{q-1}^{n-1} - K_{q-1}^n H_{n-1}, \ q = 1,2,\ldots.$$

Точка ∞ называется

• *устранимой особой точкой* A-*резольвенты пучка* $\vec{B}$, если $K_1^s \equiv \mathbb{O}, s = 1,2,\ldots,n$;

- *полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$ A*-резольвенты пучка* $\vec{B}$, если $\exists p$ такое что $K_p^s \not\equiv \mathbb{O}, s = 1,2,\dots,n$, но $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}, s = 1,2,\dots,n$;
- *существенно особой точкой* A*-резольвенты пучка* $\vec{B}$, $K_q^n \not\equiv \mathbb{O}$ $q \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем устранимую особую точку A-резольвенты пучка $\vec{B}$ будем называть полюсом порядка 0. Если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и ∞ полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, тогда пучок $\vec{B}$ будем называть (A, p)-*ограниченным*.

Задача Коши для абстрактного уравнения соболевского типа

Пусть U, F – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 : U \to F$ – линейно и непрерывно. Рассмотрим задачу Коши для уравнения соболевского типа второго порядка:

$$\begin{aligned} &u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_1, \\ &A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0 u. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение задачи (5) в терминах теории вырожденных групп получено в [7], при условии (A, p)-ограниченности пучка $\vec{B}$.

Теорема 2. [7] Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и условие (4) выполнено. Тогда существует единственное решение (5), которое к тому же имеет вид $u(t) = U_1^t u_1 + U_0^t u_0$, где $U_k^t, (k = 0,1)$ – пропагаторы вида:

$$\begin{aligned} U_0^t &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1)e^{\mu t} d\mu, \\ U_1^t &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь контур $\gamma \in \mathbf{C}$ ограничивает область, содержащую A-спектра пучка $\vec{B}$, и начальные данные такие, что $u_k \in \mathrm{i}mU_1^0 = \mathrm{i}mU_0^0, (k = 0,1)$, причем $\mathrm{i}mU_1^0$ и $\mathrm{i}mU_0^0$ подпространства в $\mathbb{U}$.

Пропагаторы уравнения инерционных волн

Вообще говоря, существуют области на которых оператор $\Delta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ имеет участки непрерывного спектра. Поэтому необходимо тщательно подходить к выбору области. Выберем пространства так, чтобы оператор Δ^{-1} был компактным, а оператор $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ был ограниченным в них, тогда их композиция также будет компактным оператором. В этом случае спектр оператора $\Delta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ будет ограниченным. Позже мы также непосредственно покажем, что A-спектр пучка $\vec{B}$, который совпадает со спектром оператора $\Delta^{-1}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, будет также ограничен.

Пусть область D параллелепипед $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$. Математическая модель (1)–(3) может быть редуцирована к задаче Коши для абстрактного уравнения соболевского типа (5). Введем пространства $U=W_2^{l+2}(D)$, $F=W_2^l(D)$ и зададим операторы $A=\Delta,\ B_1=O,\ B_0=-F^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$. Для любого $l\in\{0\}\cup\mathrm{N}$ операторы $A,B_1,B_0\ \in\ L(U,F)$. Обозначим через $-\lambda_{k,m,n}^2=-\left(\dfrac{\pi k}{a}\right)^2-\left(\dfrac{\pi m}{b}\right)^2-\left(\dfrac{\pi n}{c}\right)^2$ собственные значения однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, а через $\varphi_{k,m,n}=\sin\left(\dfrac{\pi kx}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi my}{b}\right)\sin\left(\dfrac{\pi nz}{c}\right)$ соответствующие $\{-\lambda_{k,m,n}^2\}$ ортогональные собственные функции в смысле скалярного произведения в $L^2(D)$.

Поскольку $\{\varphi_{k,m,n}\}\subset C^\infty(D)$, тогда:

$$\mu^2A-\mu B_1-B_0=\sum_{k,m,n=1}^{\infty}[-\lambda_{k,m,n}^2\mu^2-F^2\left(\frac{\pi n}{c}\right)^2)]<\varphi_{k,m,n},\cdot>\varphi_{k,m,n},$$

где $<\cdot,\cdot>$ скалярное произведение в $L^2(D)$. Составим уравнение для определения относительного спектра:

$$\lambda_{k,m,n}^2\mu^2+F^2\left(\frac{\pi n}{c}\right)^2=0,$$

$$\mu_{k,m,n}^{1,2}=\pm\frac{F_n\pi n}{c\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}}i.$$

A-спектр пучка $\vec{B}$ $(\sigma^A(\vec{B})=\{\mu_{k,m,n}^{1,2}\})$ ограничен, поскольку $|\mu_{k,m,n}^{1,2}|\le F$. Так как оператор A непрерывно обратим, то условие (4) выполнено, и следовательно, условия леммы (1) имеют место.

Построим пропагаторы по формуле (6), в силу дискретности относительного спектра пучка операторов $\vec{B}$, получим:

$$U_0^tw_0=\sum_{k,m,n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{F\lambda_n}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}}t\right)<\varphi_{k,m,n},w_0>\varphi_{k,m,n},$$

$$U_1^tw_1=\sum_{k,m,n=1}^{\infty}\frac{F\lambda_n}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}}\sin\left(\frac{F\lambda_n}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}}t\right)<\varphi_{k,m,n},w_1>\varphi_{k,m,n}.$$

Условия теоремы 2 выполнены, и следовательно, решение задачи (1)–(3) имеет вид:

$$w(x,t) = U_0^t w_0 + U_1^t w_1.$$

Библиографический список

1. Бреховских, Л.М. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) / Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров. – М.: Наука, 1982.

2. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР, Сер. Матем. – 1954. – Т. 18. – С. 3–50.

3. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998.

4. Фокин, М.В. Гамильтоновы системы в теории малых колебаний вращающейся идеальной жидкости. I / М.В. Фокин // Математические труды. – 2001. – Т. 4, № 2. – С. 155–204.

5. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45–54.

6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.

7. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012.

8. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 252–260.

К содержанию