

УДК 004.896 + 004.4

ФОРМАЛИЗМ ВЫПИСЫВАНИЯ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.Н. Тимофеев

Рассматриваются механические системы (МС), состоящие из вращательных (ВКП) и поступательных (ПКП) кинематических пар (КП). Предлагается формализм выписывания статических моментов (СМ) подсистем МС относительно полюсов их корневых тел. Этот формализм положен в основу алгоритма автоматической генерации (на ЭВМ) СМ и уравнений динамики МС. Рассмотрены примеры выписывания СМ реальных МС.

Ключевые слова: статический момент, механическая система, выписывание уравнений, генератор формул, орты осей.

Введение. СМ МС используются в решении задач статики МС. Например, для исследования статически устойчивой ходьбы шагающих аппаратов (ША) используются СМ ног ША относительно точек их подвеса к корпусу. Выражения СМ составляют основную часть формул вычисления сил в КП МС. Поэтому вывод и упрощение СМ является актуальной задачей.

На основе формализмов ручного выписывания математических моделей МС разрабатываются алгоритмы автоматического (на ЭВМ) вывода формул их математических моделей. Для этого, как правило, используются системы аналитических вычислений (САВ), например, Maxima, Mathematica, Maple. Основной проблемой при использовании САВ в задачах вывода математических моделей МС является упрощение выведенных уравнений кинематики, статики и динамики МС, например, поиск и приведение подобных, тригонометрические упрощения, введение обозначений для постоянных подвыражений. Здесь предлагаются пути решения этой проблемы. Первый шаг на этом пути связан с выводом общих формул кинематики, статики и динамики МС, из которых, как частный случай, путём выписывания получаются соответствующие формулы для конкретных МС.

Здесь используются общие формулы СМ подсистем МС, полученные в работах [1, 2] и содержащие в явном виде структурные, геометрические, кинематические и статические параметры МС, состоящих из ПКП и ВКП. Эти формулы максимально упрощены и позволяют элементарно выписывать СМ конкретных МС. Упрощение выписанных СМ практически невозможно.

В отличие от вывода формул процесс их выписывания не требует выполнения сложных математических операций. При выписывании осуществляется конкретизация общих формул путем подстановки значений

входных параметров, описывающих конкретную МС. Подробности рассмотрим на конкретных типовых МС.

1. Общие формулы выписывания СМ МС. Введём в обращение следующие обозначения: m_{oi} – обозначение и масса i -го тела; O_i – полюс тела m_{oi} (ПТ(i)); m_i – обозначение и масса i -й подсистемы; \bar{m}_i – СМ подсистемы m_i относительно точки O_i ; C_{di} – центр масс (ЦМ) i -го дополненного тела (ДТ(i)); O_{oi} – исходное (до начала движения) относительное положение ПТ(i); для ПКП(i) $q_i = O_{oi}O_i \geq 0$ и точка O_{oi} жестко связана с базой тела m_{oi} ; для ВКП(i) $O_{oi} = O_i$ и точка O_i выбирается на оси относительного вращения тела m_{oi} ; \bar{q}_i – орт оси КП(i); S_i – множество номеров тел, смежных телу m_{oi} ; \bar{m}_{ri} – СМ i -го расширенного тела (РТ(i)) относительно точки O_i ; N – число подвижных тел МС.

На рис. 1 изображено тело m_{oi} , которое является базой для тел m_{ok} и m_{oj} . ЦМ C_i тела m_{oi} обозначен крестиком. ДТ(i) получается из тела m_{oi} , если в точку O_{oj} мысленно поместить массу m_j , а в точку O_{ok} поместить m_k . Тогда ЦМ сместится в точку C_{di} , которая изображена звездочкой. На рис. 1 показаны кинематические орты $\bar{q}_i, \bar{q}_j, \bar{q}_k, \bar{q}_{k+1}$, геометрические орты \bar{e}_k, \bar{e}_j и статический орт \bar{d}_j . РТ(i) получается из ДТ(i), если массу m_k поместить в точку O_k . Так как КП(k) поступательная, то положение ЦМ РТ(k) зависит от величины q_k . В работах [2, 3] получены формулы (1), (2).

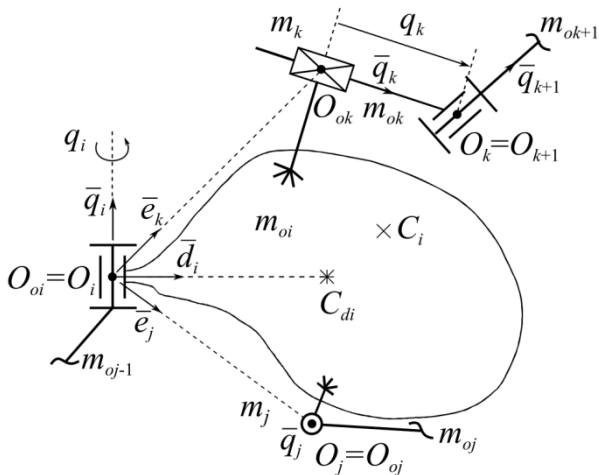


Рис. 1. Фрагмент КС МС

$$\bar{m}_i = \bar{m}_{ri} + \sum_{j \in S_i} \bar{m}_j; \quad (1)$$

$$\bar{m}_{ri} = m_{di} \bar{d}_i + \sum_{j \in S_i} m_{qj} \bar{q}_j; \quad (2)$$

$$i = N, N-1, \dots, 1;$$

$$m_{di} = m_i d_i; \quad d_i = O_i C_{di};$$

$$\bar{d}_i = \overline{O_i C_{di}} / d_i;$$

$$m_{qj} = m_j q_j; \quad q_j = O_{oj} O_j \geq 0;$$

$$\bar{q}_j = \overline{O_{oj} O_j} / q_j.$$

В формулах (1), (2) используются $2N$ орт ($\bar{q}_i, \bar{d}_i, i = 1, 2, \dots, N$), где \bar{q}_i – кинематические орты; \bar{d}_i – статические орты. В уравнениях динамики МС используются орты $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ осей систем координат (СК), жестко связанных с телом m_{oi} . Направления орт $\bar{d}_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ постоянны в теле m_{oi} . В МС орты \bar{q}_i неподвижны как в теле m_{oi} , так и в его базе. Таким образом, кинематические и статические орты всегда можно разложить по ортам

осей связанной СК (ССК). Тогда общие формулы будут содержать $3N$ орт $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, (i = 1, 2, \dots, N)$.

Перед выписыванием СМ конкретной МС требуется формально описать эту МС, т.е. создать входную информацию, необходимую для ручного или автоматического на ЭВМ выписывания требуемых расчетных формул.

Рекомендуется описывать конкретную МС по следующей методике. Сначала изобразить кинематическую схему (КС), в которой придерживаться таких правил. Тела ВКП изображать в исходном относительном положении. Максимально совмещать полюса тел и для ПКП их исходные положения. Абсциссы, ординаты и аппликаты всех ССК в исходном положении мысленно направлять соответственно вдоль горизонтальной оси $O\bar{x}$, вертикально вверх $O\bar{y}$ и перпендикулярно экрану монитора $O\bar{z}$. Затем из всех орт $\bar{q}_i, \bar{d}_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ выделить неколлинеарные орты (НКО).

Из правил введения ССК следует, что для ПКП(i) $\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i = \bar{y}_{i-1}, \bar{z}_i = \bar{z}_{i-1}$. Тогда из этих шести орт в качестве НКО принимаем орты $\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, \bar{z}_{i-1}$. Для ВКП(i) один из шести орт $\bar{x}_i, \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, \bar{y}_{i-1}, \bar{z}_i, \bar{z}_{i-1}$ можно выразить через остальные пять. Таким образом, количество НКО уменьшается в зависимости от количества ПКП и ВКП в МС.

Здесь для конкретных МС составляются списки НКО на основе входных списков кинематических и статических орт, выраженных через орты ССК. Для первой МС приводится подробное описание входной информации, которое заканчивается составлением таблицы входных параметров и списком НКО.

2. Манипулятор с полярной СК в горизонтальной плоскости ($N = 2$)

Размещение ПТ. ПТ(1) размещаем на оси вращения тела m_{o1} . ПТ(2) совмещаем с ЦМ ДТ(2), т.е. $O_2 = C_{d2}$. Последнее тело манипулятора считается дополненным, если в нем учитывается масса захвата и груза или технологического инструмента. Исходное положение ПТ(2) и точку отсчета совмещаем с ПТ(1), т.е. $O = O_1 = O_{o2}$.

Формирование списка кинематических орт. Из КС на рис. 2 видно, что тело m_{o1} вращается вокруг вертикальной оси, т.е. $\bar{q}_1 = \bar{y}$. Тело m_{o2} может двигаться поступательно прямолинейно вдоль оси $O\bar{x}_1$. Следовательно, $\bar{q}_2 = \bar{x}_1$. Таким образом, список кинематических орт $q = (\bar{q}_1, \bar{q}_2) = (\bar{y}, \bar{x}_1)$.

Формирование списка статических орт. Массы тел МС на рис. 2 распределены симметрично относительно осей абсцисс их ССК. Следовательно, ЦМ ДТ(1) и ДТ(2) расположены в точках C_{d1}, C_{d2} , изображенных на КС перекрестием. ДТ(1) получается из тела m_{o1} , если в точку O_{o2} поместить массу m_2 . Тогда ЦМ тела m_{o1} сместится вдоль оси $O\bar{x}_1$ ближе к точке O_1 . Эта точка обозначена через C_{d1} , т.е. $\bar{d}_1 = \bar{x}_1$. Так как $d_2 = O_2C_{d2}$ и $O_2 = C_{d2}$, получим $\bar{d}_2 = 0$. Следовательно, $d = (\bar{d}_1, \bar{d}_2) = (\bar{x}_1, 0)$.

Формирование списков НКО осей ССК. Из КС на рис. 2 видно, что оси ССК(2) параллельны соответствующим осям ССК(1). Следовательно $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_1)$; $y = (\bar{y}, \bar{y})$; $z = (\bar{z}_1, \bar{z}_1)$.

Таким образом, таблица параметров (ТП) МС имеет вид табл. 1. Следовательно, НКО = $(\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{z}_1)$.

Из-за использования обратной рекуррентной формулы (1) выписывание начинаем с концевых тел. Для $i = 2$ по формулам (1), (2) выпишем $\bar{m}_2 = \bar{m}_{r2} = m_{d2}\bar{d}_2$, так как $S_2 = \{ \}$ – пустое множество. Здесь в первом действии осуществлена *подстановка значения номера тела в общую формулу и развёрнута сумма*. Во 2-м действии вместо \bar{d}_2 подставлен НКО.

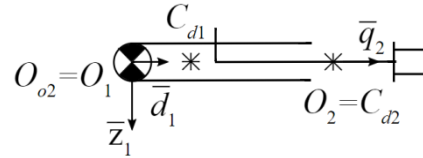


Рис. 2. КС МС

Таблица 1
Параметры (ТП) МС

i	КП	q	d	x	y	z
1	ВКП	y	x_1	x_1	y	z_1
2	ПКП	x_1	0	x_1	y	z_1

Из табл. 1 имеем $\bar{d}_2 = 0$. Следовательно, $\bar{m}_2 = 0$. Для $i = 1$ $S_1 = \{2\}$, и после выполнения первых двух действий получим $\bar{m}_1 = \bar{m}_{r1} + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{d}_1 + m_{q2}\bar{q}_2 = m_{d1}\bar{x}_1 + m_{q2}\bar{x}_1$. В 3-м действии выносим общий НКО \bar{x}_1 за скобки. В 4-м действии вводим обозначение и записываем конечный результат $\bar{m}_1 = (m_{d1} + m_{q2})\bar{x}_1 = m_{r1}\bar{x}_1$, где $m_{r1} = m_{d1} + m_{q2}$.

3. МС с цилиндрической СК. Далее этапы формального описания МС опускаем, оставляя только КС, ТПМС и НКО на рис. 3.

После первых трёх действий для $i = 3$ получим $\bar{m}_3 = \bar{m}_{r3} = m_{d3}\bar{d}_3 = 0$. Аналогично

Таблица 2

Параметры (ТП) МС

i	КП	q	d	x	y	z
1	ВКП	y	y	x_1	y	z_1
2	ПКП	x_1	$-x_1$	x_1	y	z_1
3	ПКП	$-y$	0	x_1	y	z_1

НКО = $(\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{z}_1)$

$$\bar{m}_2 = \bar{m}_{r2} + \bar{m}_3 = m_{d2}\bar{d}_2 + m_{q3}\bar{q}_3 =$$

$$= -m_{d2}\bar{x}_1 - m_{q3}\bar{y}. \bar{m}_1 = \bar{m}_{r1} + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{d}_1 +$$

$$+ m_{q2}\bar{q}_2 + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{y} + m_{q2}\bar{x}_1 - m_{d2}\bar{x}_1 - m_{q3}\bar{y}.$$

В формуле \bar{m}_1 появились подобные слагаемые после подстановки формулы \bar{m}_2 . Вынесем за скобки НКО, то есть приведем подобные. Введём обозначения и запишем конечный результат

$$\bar{m}_1 = (m_{q2} - m_{d2})\bar{x}_1 + (m_{d1} - m_{q3})\bar{y} = m_{r1}\bar{y} + m_{r2}\bar{x}_1,$$

где $m_{r1} = m_{d1} - m_{q3}$, $m_{r2} = m_{q2} - m_{d2}$.

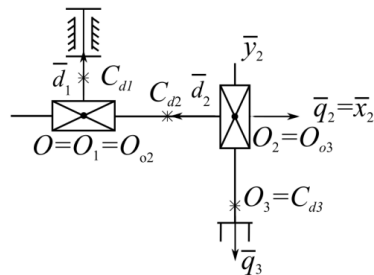


Рис. 3. КС МС

Условимся здесь и в дальнейшем слагаемые конечного результата выписывания записывать в порядке следования НКО.

4. МС в декартовой СК

Условимся сумму постоянных величин обозначать через m_{ci} в порядке их появления, где i – номер очередной суммы, $i = 1, 2, \dots$. Если величины появляются на одном шаге, то обозначения вводятся согласно порядку следования НКО. ТП, НКО и КС рассматриваемой МС изображены на рис. 4. Здесь и далее текстовые пояснения очевидных действий опущены.

$$\begin{aligned} \bar{m}_6 &= \bar{m}_{r6} = m_{d6}\bar{d}_6 = -m_{d6}\bar{y}_5. \\ \bar{m}_5 &= \bar{m}_{r5} + \bar{m}_6 = m_{d5}\bar{d}_5 + \bar{m}_6 = \\ &= -m_{d5}\bar{y}_5 - m_{d6}\bar{y}_5 = (-m_{d5} - m_{d6})\bar{y}_5 = m_{c1}\bar{y}_5. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $m_{c1} = -m_{d5} - m_{d6}$.

$$\begin{aligned} \bar{m}_4 &= \bar{m}_{r4} + \bar{m}_5 = m_{d4}\bar{d}_4 + \bar{m}_5 = m_{d4}\bar{y} + m_{c1}\bar{y}_5. \\ \bar{m}_3 &= \bar{m}_{r3} + \bar{m}_4 = m_{d3}\bar{d}_3 + m_{q4}\bar{q}_4 + \bar{m}_4 = \\ &= -m_{d3}\bar{y} - m_{q4}\bar{y} + m_{d4}\bar{y} + m_{c1}\bar{y}_5 = \\ &= (-m_{d3} - m_{q4} + m_{d4})\bar{y} + m_{c1}\bar{y}_5. \end{aligned}$$

Введём обозначения $m_{c2} = m_{d4} - m_{d3}$,

$$\begin{aligned} m_{r1} &= m_{c2} - m_{q4}. \text{ Тогда } \bar{m}_3 = m_{r1}\bar{y} + m_{c1}\bar{y}_5. \\ \bar{m}_2 &= \bar{m}_{r2} + \bar{m}_3 = m_{d2}\bar{d}_2 + \bar{m}_3 = -m_{d2}\bar{z} + m_{r1}\bar{y} - \\ &+ m_{c1}\bar{y}_5. \bar{m}_1 = \bar{m}_{r1} + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{d}_1 + m_{q2}\bar{q}_2 + \bar{m}_2 = \\ &= -m_{d1}\bar{x} + m_{q2}\bar{z} - m_{d2}\bar{z} + m_{r1}\bar{y} + m_{c1}\bar{y}_5 = -m_{d1}\bar{x} + m_{r1}\bar{y} + m_{r2}\bar{z} + m_{c1}\bar{y}_5, \end{aligned}$$

где $m_{r2} = m_{q2} - m_{d2}$.

5. Манипулятор в сферической СК. КС МС на рис. 5.

$$\bar{m}_3 = \bar{m}_{r3} = m_{d3}\bar{d}_3 = 0. \bar{m}_2 = \bar{m}_{r2} + \bar{m}_3 = m_{d2}\bar{d}_2 + m_{q3}\bar{q}_3 = m_{q3}\bar{x}_2.$$

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_{r1} + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{d}_1 + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{y} + m_{q3}\bar{x}_2.$$

Таблица 3

Параметры (ТП) МС

i	КП	q	d	x	y	z
1	ПКП	x	$-x$	x	y	z
2	ПКП	z	$-z$	x	y	z
3	ВКП	y	$-y$	x_3	y	z_3
4	ПКП	$-y$	y	x_3	y	z_3
5	ВКП	z_3	$-y_5$	x_5	y_5	z_3
6	ВКП	y_5	$-y_5$	x_6	y_5	z_6

$$\text{НКО} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}_3, \bar{z}_3, \bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{x}_6, \bar{z}_6)$$

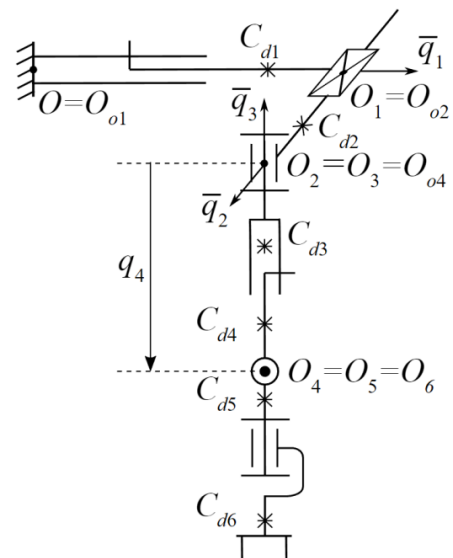


Рис. 4. КС МС

Таблица 4

Параметры (ТП) МС

i	КП	q	d	x	y	z
1	ВКП	y	y	x_1	y	z_1
2	ВКП	z_1	0	x_2	y_2	z_1
3	ПКП	x_2	0	x_2	y_2	z_1

$$\text{НКО} = (\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{z}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$$

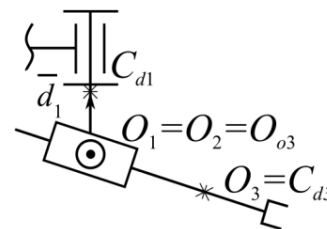


Рис. 5. КС МС

6. Манипулятор в плоской ангулярной СК. КС МС на рис. 6.

$$\bar{m}_3 = \bar{m}_{r3} = m_{d3}\bar{d}_3 = -m_{d3}\bar{y}_3. \quad \bar{m}_2 = \bar{m}_{r2} + \bar{m}_3 = m_{d2}\bar{d}_2 + \bar{m}_3 = m_{d2}\bar{x}_2 - m_{d3}\bar{y}_3.$$

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_{r1} + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{d}_1 + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{y} + m_{d2}\bar{x}_2 - m_{d3}\bar{y}_3.$$

Таблица 5

Параметры (ТП) МС

i	КП	q	d	x	y	z
1	ВКП	y	y	x_1	y	z_1
2	ВКП	z_1	x_2	x_2	y_2	z_1
3	ВКП	z_1	$-y_3$	x_3	y_3	z_1

$$\text{НКО} = (\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{z}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_3)$$

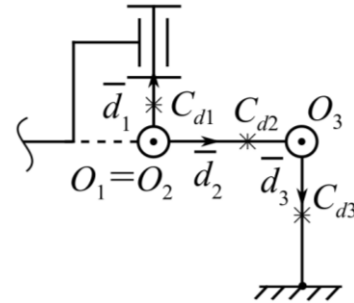


Рис. 6. КС ноги ША

7. Манипулятор с ангулярной СК. КС МС на рис. 7.

$$\bar{m}_6 = \bar{m}_{r6} = m_{d6}\bar{d}_6 = -m_{d6}\bar{y}_5.$$

$$\bar{m}_5 = \bar{m}_{r5} + \bar{m}_6 = m_{d5}\bar{d}_5 + \bar{m}_6 = -m_{d5}\bar{y}_5 - m_{d6}\bar{y}_5 = (-m_{d5} - m_{d6})\bar{y}_5 = m_{c1}\bar{y}_5,$$

где $m_{c1} = -m_{d5} - m_{d6}$.

$$\bar{m}_4 = \bar{m}_{r4} + \bar{m}_5 = m_{d4}\bar{d}_4 + \bar{m}_5 = m_{d4}\bar{y}_3 + m_{c1}\bar{y}_5.$$

$$\bar{m}_3 = \bar{m}_{r3} + \bar{m}_4 = m_{d3}\bar{d}_3 + \bar{m}_4 = -m_{d3}\bar{y}_3 + m_{d4}\bar{y}_3 + m_{c1}\bar{y}_5 = -m_{d3}\bar{y}_3 + m_{d4}\bar{y}_3 + m_{c1}\bar{y}_5 = (-m_{d3} + m_{d4})\bar{y}_3 + m_{c1}\bar{y}_5 = m_{c2}\bar{y}_3 + m_{c1}\bar{y}_5,$$

где $m_{c2} = -m_{d3} + m_{d4}$.

$$\bar{m}_2 = \bar{m}_{r2} + \bar{m}_3 = m_{d2}\bar{d}_2 + \bar{m}_3 = -m_{d2}\bar{y}_2 + m_{c2}\bar{y}_3 + m_{c1}\bar{y}_5. \quad \bar{m}_1 = \bar{m}_{r1} + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{d}_1 + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{y} - m_{d2}\bar{y}_2 + m_{c2}\bar{y}_3 + m_{c1}\bar{y}_5.$$

8. Двуркий манипулятор. Следующие МС имеют древовидную структуру. Поэтому в первом столбце ТП МС в i -й строке записываем номер базы тела m_{oi} . Имя 1-го столбца « $i-1$ » указывает на то, что в этом столбце стоят номера базовых тел МС. ТП, НКО и КС двуркого манипулятора приведены на рис. 8.

$$\bar{m}_3 = \bar{m}_{r3} = m_{d3}\bar{d}_3 = 0.$$

$$\bar{m}_2 = \bar{m}_{r2} + \bar{m}_3 = m_{d2}\bar{d}_2 + m_{q3}\bar{q}_3 = m_{q3}\bar{x}_1.$$

Учитывая, что $S_1 = \{2, 3\}$, получим:

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_{r1} + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{d}_1 + m_{q2}\bar{q}_2 + \bar{m}_2 = m_{d1}\bar{x}_1 + m_{q2}\bar{x}_1 + m_{q3}\bar{x}_1 = (m_{d1} + m_{q2} + m_{q3})\bar{x}_1 =$$

Таблица 6

Параметры (ТП) МС

i	КП	q	d	x	y	z
1	ВКП	y	y	x_1	y	z_1
2	ВКП	z_1	$-y_2$	x_2	y_2	z_1
3	ВКП	z_1	$-y_3$	x_3	y_3	z_1
4	ВКП	y_3	y_3	x_4	y_3	z_4
5	ВКП	z_4	$-y_5$	x_5	y_5	z_4
6	ВКП	y_5	$-y_5$	x_6	y_5	z_6

$$\text{НКО} = (\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{z}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{x}_4, \bar{z}_4, \bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{x}_6, \bar{z}_6).$$

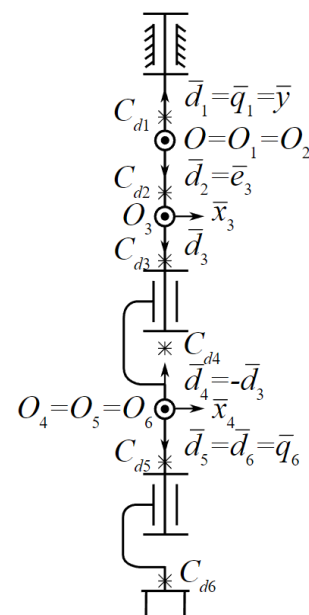


Рис. 7. КС МС

$$= m_{r1}\bar{x}_1, \text{ где } m_{r1} = m_{d1} + m_{q2} + m_{q3}.$$

Отметим, что в выписываемых формулах используются обозначения скалярных величин m_{di} и m_{qi} , которые приняты в общих формулах (1), (2), и обозначения m_{ci} , m_{ri} , вводимые в процессе выписывания.

Регулярные обозначения m_{di} , m_{qi} имеют четкий и постоянный механический смысл. Механический смысл текущих обозначений m_{ci} , m_{ri} зависит от исследуемой МС.

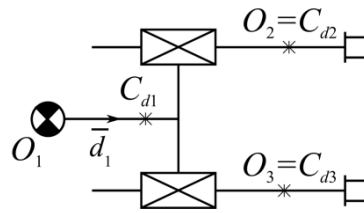


Рис. 8. КС МС

9. Четырёхногий ША с ногой в цилиндрической СК. Учитывая регулярную структуру ША и одинаковую КС ног, условимся в ТП указывать параметры только первой ноги, т.е. правой передней.

КС ноги совпадает с КС МС на рис. 3. Поэтому СМ первой ноги $\bar{m}_1 = m_{r1}\bar{y} + m_{r2}\bar{x}_1$, где $m_{r1} = m_1d_1 - m_3q_3$, $m_{r2} = m_2q_2 - m_2d_2$, m_3 – масса стопы, m_2 – масса голени и стопы, m_1 – масса ноги, $d_2 = O_2C_{d2}$, $d_1 = O_1C_{d1}$. Величины m_1 , d_1 , m_2 , d_2 , m_3 для всех ног одинаковы. Поэтому СМ i -й ноги относительно точки её подвеса к корпусу вычисляется по формулам:

$$\bar{m}_1 = (m_n - m_cq_3)\bar{y} + (m_bq_2 - m_d)\bar{x}_1,$$

$$\bar{m}_2 = (m_n - m_cq_6)\bar{y} + (m_bq_5 - m_d)\bar{x}_2,$$

$$\bar{m}_3 = (m_n - m_cq_9)\bar{y} + (m_bq_8 - m_d)\bar{x}_3,$$

$$\bar{m}_4 = (m_n - m_cq_{12})\bar{y} + (m_bq_{11} - m_d)\bar{x}_4,$$

где $m_n = m_1d_1$, $m_c = m_3$, $m_b = m_2$, $m_d = m_2d_2$, \bar{x}_i – орт голени i -й ноги. СМ ША

относительно точки C_d вычисляется по формуле (1) $\bar{m}_c = \bar{m}_r + \sum_{i=1}^4 \bar{m}_i$, где по

формуле (2) $\bar{m}_r = m_d\bar{d} = 0$, так как ЦМ дополненного корпуса совпадает с точкой C_d , т.е. $d = 0$. Следовательно,

$$\bar{m}_c = (m_n - m_cq_3)\bar{y} + (m_bq_2 - m_d)\bar{x}_1 + (m_n - m_cq_6)\bar{y} + (m_bq_5 - m_d)\bar{x}_2 + (m_n - m_cq_9)\bar{y} + (m_bq_8 - m_d)\bar{x}_3 + (m_n - m_cq_{12})\bar{y} + (m_bq_{11} - m_d)\bar{x}_4 =$$

Таблица 7

Параметры (ТП) МС

$i-1$	КП	q	d	x	y	z
0	ВКП	y	x_1	x_1	y	z_1
1	ПКП	x_1	0	x_1	y	z_1
1	ПКП	x_1	0	x_1	y	z_1

$$\text{НКО} = (\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{z}_1)$$

Таблица 8

Параметры (ТП) МС

i	КП	q	d	x	y	z
1	ВКП	y	x_1	x_1	y	z_1
2	ПКП	x_1	$-x_1$	x_1	y	z_1
3	ПКП	$-y$	0	x_1	y	z_1

$$\text{НКО} = (\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{z}_1)$$



Рис. 9. Корпус четырёхногого ША и схема подвеса ног

$$= [4m_n - m_c(q_3 + q_6 + q_9 + q_{12})]\bar{y} + (m_b q_2 - m_d)\bar{x}_1 + (m_b q_5 - m_d)\bar{x}_2 + (m_b q_8 - m_d)\bar{x}_3 + (m_b q_{11} - m_d)\bar{x}_4.$$

10. Гексапод с ангулярной ногой. Шестиногий ША часто называют гексаподом. Рассмотрим такой ША с ногой, КС которой изображена на рис. 6. В отличие от схемы размещения ног на рис. 9 для гексапода через точку C_d достаточно провести вертикальную прямую, на концах которой размещаются ноги с номерами тел 7, 8, 9 и 16, 17, 18. В левой задней точке подвешена нога с номерами тел 10, 11, 12. В правой задней ноге тела имеют номера 13, 14, 15. По аналогии с выводом \bar{m}_c в предыдущем примере СМ i -й ноги вычисляется по формуле $\bar{m}_1 = m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_1 - m_f \bar{y}_1$, $\bar{m}_2 = m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_2 - m_f \bar{y}_2$, $\bar{m}_3 = m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_3 - m_f \bar{y}_3$, $\bar{m}_4 = m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_4 - m_f \bar{y}_4$, $\bar{m}_5 = m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_5 - m_f \bar{y}_5$, $\bar{m}_6 = m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_6 - m_f \bar{y}_6$, где $m_n = m_1 d_1$, $m_d = m_2 d_2$, $m_f = m_3 d_3$, \bar{x}_i – орт бедра i -й ноги, \bar{y}_i – орт голени i -й ноги. СМ ША относительно точки C_d вычисляется по формуле:

$$\bar{m}_c = m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_1 - m_f \bar{y}_1 + m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_2 - m_f \bar{y}_2 + m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_3 - m_f \bar{y}_3 + m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_4 - m_f \bar{y}_4 + m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_5 - m_f \bar{y}_5 + m_n \bar{y} + m_d \bar{x}_6 - m_f \bar{y}_6.$$

После приведения подобных окончательно получим:

$$\bar{m}_c = 5m_n \bar{y} + m_d (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_6) - m_f (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 + \bar{y}_5 + \bar{y}_6).$$

В качестве задачи, решение которой подтверждает освоение изложенного материала, рекомендуем выписать формулу вычисления \bar{m}_c для гексапода на рис. 10.

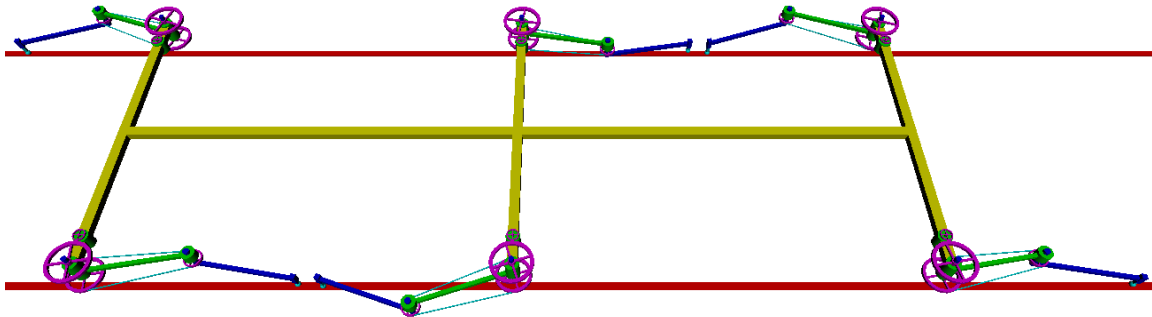


Рис. 10. 3D-модель гексапода

Заключение. В приведённых выше МС результирующие формулы были получены путём конкретизации общих формул выписывания. При этом выполнялись следующие формальные действия: подстановка значения номера тела в общую формулу, развёртывание сумм, замена статических и кинематических орт на НКО, приведение подобных слагаемых при совпа-

дающих НКО с вынесением общего множителя, введение обозначений для сумм скалярных величин. Дальнейшее упрощение полученных формул практически невозможно. Этот факт обеспечивает простейший вид уравнений динамики МС, так как эти уравнения содержат СМ подсистем МС и их производные по времени.

Библиографический список

1. Телегин, А.И. Уравнения математических моделей механических систем / А.И. Телегин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1999. – 181 с.
2. Телегин, А.И. Новый векторный вид уравнений динамики систем тел / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2014. – Т. 14. – № 1. – С. 33–40.

[К содержанию](#)