УДК 517.956.223+517.575

НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.В. Карачик

В статье исследована разрешимость класса задач типа Неймана для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре. Получен набор необходимых условий разрешимости поставленных задач. Найденные условия представляют собой условия ортогональности однородных гармонических полиномов некоторых степеней линейным комбинациям граничных функций с коэффициентами из целочисленного треугольника Неймана.

Ключевые слова: задачи типа Неймана, полигармоническое уравнение, необходимые условия разрешимости, единичный шар, полигармонические функции.

1. Введение. Одним из классических линейных уравнений в частных производных эллиптического типа высокого порядка является полигармоническое уравнение, а классическими задачами для этого уравнения являются задачи Дирихле (см., например, [1, 2]) и Неймана (см., например, [3–5]). Условия разрешимости этих задач исследованы в классической теории краевых задач для эллиптических уравнений и систем уравнений, удовлетворяющих так называемому условию дополнительности.

В работе [6] была рассмотрена более общая краевая задача для полигармонического уравнения, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях. Была доказана теорема о разрешимости этой краевой задачи и дано представление ее решения.

В работе [7] были также исследованы условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения в шаре с нормальными производными в граничных условиях. Условия разрешимости в этих работах имели вид ортогональности некоторых вектор-функций, зависящих от данных задачи, или равенства рангов специальных матриц высокого порядка. Чтобы установить, при каких граничных условиях конкретная задача такого типа разрешима, необходимо выполнить дополнительно непростые вычисления.

Рассмотренный в настоящей работе класс задач является естественным обобщением классической постановки задачи Неймана для полигармонического уравнения. Поэтому для таких задач хорошо бы иметь условия разрешимости этих задач в легко проверяемом виде. Нахождению множества необходимых условий разрешимости задач типа Неймана и посвящена данная работа.

Пусть $S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, а $\partial S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ – единичная сфера, где $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$. В единичном шаре S рассмотрим следующий класс краевых задач типа Неймана $\mathcal{N}_k$, зависящий от параметра $k\in\mathbb{N}$ для однородного полигармонического уравнения:

$$\Delta^m u=0,\quad x\in S;\tag{1}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial\nu^k}\Big|_{\partial S}=\varphi_1(s),\quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial\nu^{k+1}}\Big|_{\partial S}=\varphi_2(s),\ldots,\frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial\nu^{k+m-1}}\Big|_{\partial S}=\varphi_m(s),\quad s\in\partial S,\tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial\nu}$ – внешняя нормальная производная к единичной сфере, функции $\varphi_i(s)$ при $i=1,\ldots,m$ определены на ∂S. Класс задач $\mathcal{N}_k$ является частным случаем краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными высокого порядка в граничных условиях, рассмотренных в [6]. Задача $\mathcal{N}_0$ является задачей Дирихле [8], которая безусловно разрешима, а задача $\mathcal{N}_1$ совпадает с задачей Неймана [4].

Исследования разрешимости различных постановок задач типа Неймана и их обобщений в единичном шаре для бигармонического уравнения (в частности задач $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$) и полигармонического уравнения можно найти в работах [7–12]. В [13] исследовались полиномиальные решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения при полиномиальных данных и приведены формулы, позволяющие легко построить полиномиальное решение задачи.

2. Вспомогательные сведения. Пусть $P_m(t)=\sum_{i=0}^m p_i t^i$ – некоторый полином степени m с действительными коэффициентами $p_i\in\mathbb{R}$, $i=0,\ldots,m$. Линейное пространство таких полиномов обозначим $\mathcal{P}$. Рассмотрим факториальную степень переменной t порядка i в виде $t^{[i]}=t(t-1)\ldots(t-i+1)$, причем $t^{[0]}\equiv 1$. Введем факториальный полином, соответствующий полиному $P_m(t)$ равенством:

$$P_{[m]}(t)=\sum_{i=0}^m p_i t^{[i]}.$$

Рассмотрим линейное отображение $\Phi:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, задаваемое в виде $\Phi[P_m(t)]=P_{[m]}(t)$. В [14, лемма 1] показано, что отображение $\Phi:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ – изоморфизм. Пусть $l\in\mathbb{N}_0\equiv\mathbb{N}\cup\{0\}$. Рассмотрим полиномы

$$H_i^{(l)}(t)=(t-l)(t-2-l)\ldots(t-2i+2-l)$$

при $i\in\mathbb{N}$. Обозначим их прообразы при изоморфизме Φ как $P_k^{(l)}(t)=\Phi^{-1}[H_i^{(l)}(t)],\ i\in\mathbb{N},$ и значит, $H_i^{(l)}(t)=P_{[i]}^{(l)}(t)$. Будем считать, что $P_i^{(0)}(t)\equiv P_i(t)$. Для полиномов $P_i^{(l)}(t)$ верно равенство [14, лемма 7]:

$$P_i^{(l)}(t) + 2iP_{i-1}^{(l)}(t) = P_i^{(l-2)}(t), \quad i \ge 2,$$

где следует считать, что $P_0^{(l)}(t) = 1$, $P_1^{(l)}(t) = t - l$. Кроме того, полиномы $P_i(t)$ и $P_i^{(1)}(t)$ удовлетворяют рекуррентным равенствам [14]:

$$P_i(t) + (2i-3)P_{i-1}(t) = t^2 P_{i-2}(t), \;\; P_i^{(1)}(t) + (2i-1)P_{i-1}^{(1)}(t) = t^2 P_{i-2}^{(1)}(t), \quad i \ge 2,$$

и $P_{i+1}(t) = tP_i^{(1)}(t)$, $i \in \mathbb{N}$. Линейную оболочку бесконечной системы полиномов $\{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l)}(t), P_{m+2}^{(l)}(t), \ldots\}$, начинающейся с полинома $P_m^{(l)}(t)$ при $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{L}_m^{(l)}$, т.е. $\mathcal{L}_m^{(l)} = \mathrm{lin}\{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l)}(t), P_{m+2}^{(l)}(t), \ldots\}$. Коэффициенты полиномов $P_i(t)$, $l \in \mathbb{N}$ (у них нет свободных членов) поместим слева направо от 1 до i в порядке возрастания индекса в i-ю строку следующего целочисленного треугольника, который назовем треугольником Неймана [15] поскольку он играет важную роль в исследовании задач $\mathcal{N}_k$,

$$\mathbb{P} = \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & 1 & & & \\ & & 3 & & -3 & & 1 & & \\ & -15 & & 15 & & -6 & & 1 & \\ 105 & & -105 & & 45 & & -10 & & 1 \\ & & & & \ldots & & & & \\ & \cdots & & p_j^{(i)} = p_{j-1}^{(i-1)} + (j-2i+2)\,p_j^{(i-1)} & & & \cdots & & \end{array}, \tag{3}$$

где $p_j^{(i)}$ при $1 \le j \le i$, $i \in \mathbb{N}$ – элемент i-й строки треугольника Неймана $\mathbb{P}$, стоящий на j-м месте слева и $p_1^{(1)} = 1$ – начальное условие, а $p_j^{(i)} = 0$ при $j > i$ и $0 \ge j$ – граничные условия для приведенного рекуррентного уравнения. Доказано, что верно равенство

$$p_j^{(i)} = (-1)^{i-j} \binom{2i-j-1}{j-1} \frac{(2i-2j+1)!!}{2i-2j+1} \tag{4}$$

и установлено, что степень полинома $P_i(t)$ равна i, а низшая степень одночленов, входящих в $P_i(t)$, равна 1. В силу определений полинома $P_i(t)$ и факториального многочлена верно равенство:

$$P_{[i]}(t) \equiv \sum_{j=1}^{i} p_j^{(i)} t^{[j]} = (t, -2)_i \equiv t(t-2)\ldots(t-2i+2),$$

где $(a,b)_i = a(a+b)\cdots\big(a+(i-1)b\big)$.

3. Основной результат. Исследуем необходимые условия разрешимости класса задач $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$ для однородного полигармонического уравнения на основании результатов, полученных в [14, 16].

Теорема. *Пусть функции* $\varphi_i(s)$ *из (2) при* $i = 1, 2, \ldots, m$ *такие, что решение* $u(x)$ *задачи* $\mathcal{N}_k$ *для однородного полигармонического уравнения (1) существует и оно такое, что* $u \in C^{k+m-1}(\bar{S})$. *Тогда при всяком* $l \in \mathbb{N}_0$, *таком, что* $l < k$, *должны быть выполнены следующие условия ортогональности:*

$$\begin{gathered}\int_{\partial S} H_l(x)\Big(p_1^{(m-\lambda)}\varphi_{\delta_\lambda+1}(s) + \ldots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)}\varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)\Big)ds_x = 0, \ \lambda = \lambda_0, \ldots, \min\{k-l, m\} - 1, \\ \int_{\partial S} H_l(x)\varphi_i(s)ds_x = 0, \quad i = \max\{2m + l - k, 0\} + 1, \ldots, m,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\lambda_0 = [(k-l)/2]$, $H_l(x)$ *– произвольный однородный гармонический полином степени* l, $p_j^{(i)}$ *– коэффициенты полинома* $P_i(t)$ *из (3), имеющие вид (4)* $\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1, \quad \sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1.$ *Число условий (5) при* $l < k$ *равно*

$$N_{m,k,l} = \min\{k - l - \lambda_0, m\} = \min\{[(k-l+1)/2], m\}.$$

В формулировке теоремы следует иметь в виду следующее общепринятое соглашение для формул с индексами: если в формуле нижняя граница области изменения индекса становится больше верхней границы, то эту формулу не следует принимать в расчет. Например, первая формула в (5) действительна при $k > l$ и $[(k-l)/2] + 1 \le m$, а вторая при $k > m + l$.

Пример. Используя сформулированную теорему, нетрудно получить необходимые условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_3$ для однородного 7-гармонического уравнения. Можно воспользоваться следующими эквивалентностями при использовании формул (5) $\mathcal{N}_3$ при $l = 0$, $\mathcal{N}_3$ при $l = 1$ $\sim \mathcal{N}_2$ при $l = 0$ и $\mathcal{N}_3$ при $l = 2$ $\sim \mathcal{N}_1$ при $l = 0$. Тогда получаем:

$$\int_{\partial S}\Big(p_1^{(6)}\varphi_1(s) + \ldots + p_6^{(6)}\varphi_6(s)\Big)ds_x = 0, \quad \int_{\partial S}\Big(p_1^{(5)}\varphi_3(s) + \ldots + p_5^{(5)}\varphi_7(s)\Big)ds_x = 0$$

$$\int_{\partial S} H_1(x)\Big(p_1^{(6)}\varphi_2(s) + \ldots + p_6^{(6)}\varphi_7(s)\Big)ds_x = 0, \int_{\partial S} H_2(x)\Big(p_1^{(7)}\varphi_1(s) + \ldots + p_7^{(7)}\varphi_7(s)\Big)ds_x = 0,$$

где коэффициенты $p_j^{(i)}$ находятся из (4), а $H_l(x)$ – произвольный однородный гармонический полином степени l.

Библиографический список

1. Nicolesco, M. Les fonctions polyharmoniques / M. Nicolesco. – Paris, Hermann ed., 1936.

2. Gazzola, F. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains / F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers // Lecture Notes in Mathematics 1991. – Berlin, Springer, 2010.

3. Бицадзе, А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций / А.В. Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 5. – С. 825–831.

4. Karachik, V.V. On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball / V.V. Karachik // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2014. – T. 8. № 1. – C. 63–75.

5. Turmetov, B.Kh. On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball / B.Kh. Turmetov, R.R. Ashurov // Boundary value problems. – 2013. – No. 162. – P. 1–15.

6. Карачик, В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 51–58.

7. Кангужин, Б.Е. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре / Б.Е. Кангужин, Б.Д. Кошанов // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 41–52.

8. Карачик, В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1038–1047.

9. Карачик, В.В. О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения / В.В. Карачик, Б.Т. Торебек // Математические заметки. – 2017. – Т. 102, № 1. – С. 39–51.

10. Карачик, В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Математические труды. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 86–108.

11. Карачик, В.В. Обобщённая третья краевая задача для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 761–770.

12. Карачик, В.В. Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 653–662.

13. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1149–1170.

14. Карачик, В.В. Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций / В.В. Карачик // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Т. 14. – С. 533–551.

15. Карачик, В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238.

16. Karachik, V.V. On some special polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2004. – V. 132, No. 4. – P. 1049–1058.

К содержанию