УДК 004.421

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ФРАКТАЛОВ ИЗ ЗВЕЗД

А.А. Поляков

Рассмотрены приемы экономии памяти компьютера при расчетах фракталов из звезд в двух и трех измерениях с пентагональной и икосаэдрической симметрией, а также применение целочисленных индексов для таких расчетов. Первый прием заключается в использовании свойств симметрии: так как звезда обладает набором операций симметрии, она может быть построена из малой части действием таких операций. Этот подход распространяется и на фрактал из звезд, так как он имеет ту же симметрию, что и звезды. Второй прием заключается в расчете малой части фрактала вблизи центра, с удалением далеких точек. Это позволяет получить фракталы высоких порядков, что полезно для изучения их свойств. Целочисленные индексы широко применяются в кристаллографии квазикристаллов, они оказались удобны для вычисления фракталов.

Ключевые слова: алгоритмы, фракталы, квазипериодическая решетка.

Фракталы из двумерных [1] и трехмерных звезд представляют интерес как с математической точки зрения, так и с точки зрения материаловедения квазикристаллов, так как симметрия многих квазикристаллов [2], правильных пятиконечных звезд, а также трехмерных звёзд с икосаэдрической симметрией (большой звездчатый додекаэдр и малый звездчатый додекаэдр [3]), характеризуется наличием осей пятого порядка. В работе [4] показано, как посредством наложения нескольких фракталов из пятиконечных звезд можно получить мозаику Пенроуза [5] – двумерную квазипериодическую решетку, фактически играющую такую же роль в кристаллографии декагональных квазикристаллов, как примитивная кубическая решетка в классической кристаллографии. Анализ строения симметричной проекции 6-мерного куба [6] показал, что в ней можно обнаружить два типа правильных трехмерных звезд – большой и малый звездчатые додекаэдры. Следует отметить, что данная проекция 6-мерной кубической решетки применяется в кристаллографии икосаэдрических квазикристаллов.

Пусть звезда обладает набором N векторов $\{\boldsymbol{r}_i\}$, направленных из центра звезды к ее вершинам. Каждый j-й шаг построения фрактала методом дефляции [1], называемый предфракталом, характеризуется определенным типом и размером минимальной звезды, то есть для него также можно указать N векторов: $\{\boldsymbol{r}_i^j\}$. Предфрактал порядка K можно получить суммированием векторов минимальных звезд всех предыдущих предфракталов и векторов минимальной звезды данного предфрактала, таким образом, в данном предфрактале будет N^K точек. Вычисление каждой точки этого предфрактала определяется суммой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i^1 + \boldsymbol{r}_k^2 + \cdots + \boldsymbol{r}_l^K.$$

Множество вершин предфрактала определяется перебором всех индексов $i, k, \ldots, l$.

Многие полученные точки будут накладываться, поэтому их нужно учитывать один раз, что значительно уменьшит запись предфрактала. Но, все равно, задача уменьшения количества точек фракталов на каждом шагу суммирования является весьма важной. В данной работе будут предложены несколько приемов достижения этой цели.

1. Учет симметрии звезды

Правильная пятиконечная звезда (см. рис. 1) характеризуется наличием оси симметрии 5 порядка, проходящей через ее центр нормально плоскости рисунка, и пяти зеркальных плоскостей, проходящих через ось симметрии и вершины звезды. В связи с этим для ее построения достаточно учесть две вершины – внутреннюю и внешнюю, затем подействовать на них зеркальной плоскостью, проходящей через одну из точек, а затем размножить полученные вершины четыре раза, подействовав на них осью симметрии пятого порядка. Все накладывающиеся точки нужно будет учитывать один раз.

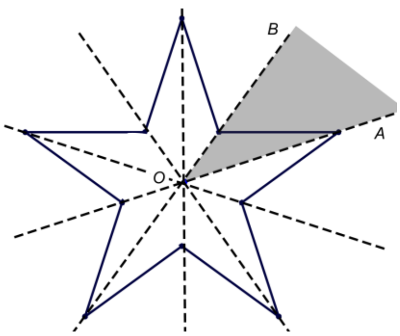

Рис. 1. Правильная пятиконечная звезда. Плоскости симметрии показаны штриховыми линиями

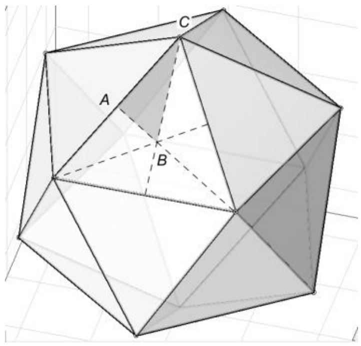

Рис. 2. Икосаэдр. Размножив треугольник ABC с помощью операций симметрии, можно получить весь икосаэдр

Такое сжатие и размножение точек позволит сократить количество данных, хранящихся в памяти компьютера. Можно предложить следующий путь: каждый полученный предфрактал сжимается до клина (AOB) и на следующем этапе суммируется с полной (несжатой) звездой. После суммирования все точки также помещаются в данный клин посредством операций симметрии. При необходимости полученные вершины предфрактала можно размножить описанным выше способом.

Аналогичный прием можно использовать и при получении фрактала из трехмерных звезд. У большого (и малого) звездчатого додекаэдра

32 вершины, в то время как у правильной пятиконечной звезды 10 вершин, поэтому этот подход в применении к трехмерным звездам становится более полезным. Если рассмотреть икосаэдр (рис. 2), то можно заметить, что грань икосаэдра можно получить размножением треугольника *ABC*, а весь икосаэдр можно получить размножением этой грани. Для достижения этой цели достаточно подействовать осями симметрии 3 и 5 порядков, характерных для икосаэдра, а также зеркальными плоскостями симметрии. Трехмерные звезды (большой и малый звездчатые додекаэдры) обладают симметрией икосаэдра. Таким образом, можно уменьшить количество запоминаемых точек в 120 раз. Точки полученного предфрактала удобно хранить в сжатом виде, а для его изучения можно точки, лежащие в треугольном секторе, проходящем через треугольник ABC, размножить с удалением повторяющихся вершин.

2. Суммирование внутри окружности (сферы)

Для сравнения квазипериодических решеток и фракталов из звезд удобно брать центральную часть предфрактала, так как вдали от центра ажурная поверхность предфрактала имеет поры. Для удаления такой пористой поверхности нужно получать предфрактал как можно большего порядка, а это затруднительно в связи с ограниченной памятью компьютера. Вырезав центральную часть фрактала и проведя расчет только для нее, можно эту проблему обойти.

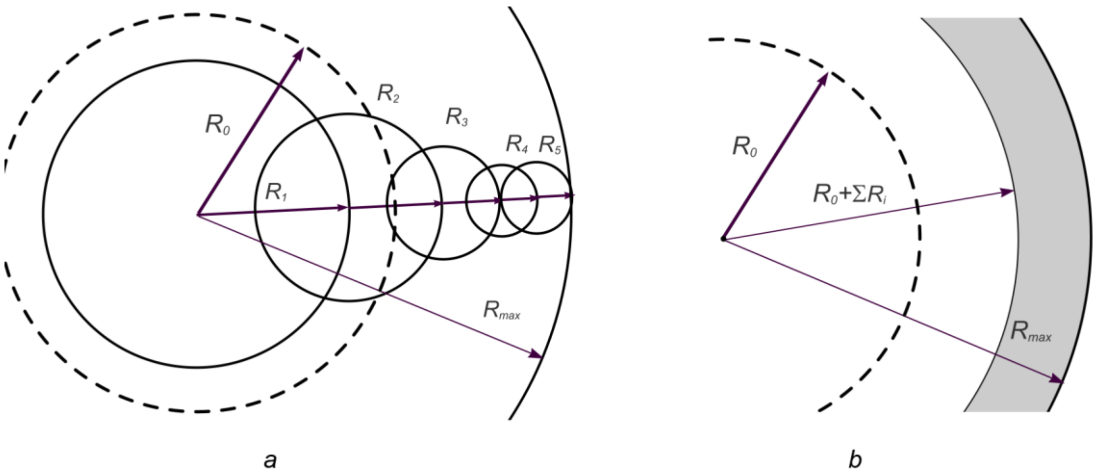

Рис. 3. Суммирование внутри окружности (сферы) радиуса R_0.
Максимальный радиус предфрактала 5 порядка – $R_{\max}$. На точки внутри сферы R_0 могут влиять только вершины не более, чем на расстоянии $\Delta r = \sum_{i=k+1}^{N} R_i$ от этой сферы; здесь Δr – суммарный радиус оставшихся звезд

Рассмотрим, как это можно сделать. Минимальная звезда, которая характеризует каждый шаг построения предфрактала, может быть описана максимальным радиусом R_i. Выберем произвольную сферу (окружность) радиусом R_0, которая значительно меньше максимального радиуса предфрактала R_{max}.

$$R_{max} = \sum_{i=1}^{N} R_i.$$

Назовем величину $r_c = (R_0 + R_{max})/2$ *критическим радиусом* (см. рис. 3). Если начинать суммирование с наибольших радиусов звезд R_i, а заканчивать меньшим, то максимальный радиус предфрактала достигнет критического достаточно быстро. После этого внешняя часть полученного предфрактала не будет оказывать влияние на точки внутри сферы радиусом R_0. Поэтому эти внешние точки можно удалять на каждом шагу суммирования. Пусть мы получили предфрактал k-го порядка и осталось суммировать вершины звезд порядков с $k + 1$ по N. На каждом шагу суммирования можно посчитать радиус $R' = R_0 + \sum_{i=k+1}^{N} R_i$ и удалять до суммирования все точки предфрактала k-го порядка, находящиеся на расстоянии от центра большем, чем R'. Это значительно сократит количество операций суммирования и ускорит расчет. Данный прием позволяет получить предфракталы из пятиконечных звезд более 100 порядка, что невозможно, если не ограничивать их размер.

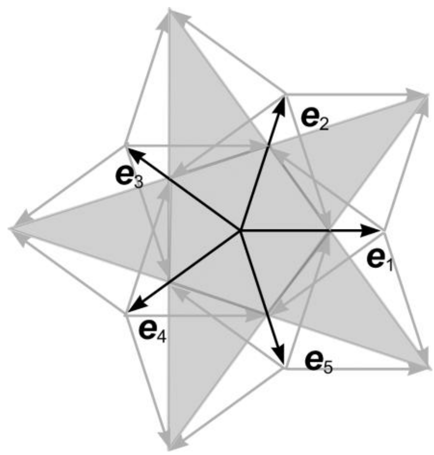

Рис. 4. Описание точек фрактала из звезд в 5-репере

3. Целочисленные индексы

Для определения координат вершин правильных пятиконечных звезд в плоскости и трехмерных звезд с икосаэдрической симметрией удобно использовать целочисленные индексы. Такие индексы позволяют легко определить совпадение вершин звезд, что затруднено, когда вычисления производятся в ортогональных координатах – действительных числах (в связи с накапливающейся погрешностью при суммировании). С помощью индексов описываются точки на плоскости в 5-репере (рис. 4); единичные вектора репера расположены под углом $2\pi/5$ друг к другу. Такой репер применяется также для описания мозаики Пенроуза [5]. Для того, чтобы получить вершины правильной пятиконечной звезды достаточно перебрать все суммы двух несовпадающих реперных векторов, что можно отразить всеми перестановками индексов типа (11000) (см. рис. 4).

Фракталы конструируются из звезд с размерами в τ^N раз отличающимися от размеров исходных звезд, где N – целое число (здесь $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$ – «золотое сечение»). Для получения вектора, который в τ раз больше реперного вектора, реперный вектор заменяется на его сумму с двумя соседними реперными векторами, то есть в индексах это записывается переходом (10000) → (11001). Аналогичные правила перехода для других реперных векторов можно отразить циклической перестановкой индексов. Уменьшение в τ раз реперного вектора выражается заменой его на сумму соседних реперных векторов, или, в индексах, (10000) → (01001). Эти правила позволяют записать в целочисленных индексах все точки фрактала. Аналогичные правила для трехмерных звезд описаны в [6].

Предложенные особенности алгоритма вычисления фракталов из двумерных и трехмерных звезд были применены для расчета фракталов из звезд в среде программирования MATLAB.

Библиографический список

1. Поляков, А.А. Построение фракталов из звезд: инфляционный и дефляционный подходы / А.А. Поляков // Расплавы. – 2019. – № 1. – С. 76–80.

2. Physical Properties of Quasicrystals / ред. Z. M. Stadnik. – Heidelberg: Springer, 1999. – 435 p.

3. Coxeter, H.S.M. Regular polytopes / H.S.M. Coxeter. – London: Methuen and Co., 1948. – 321 p.

4. Polyakov, A.A. Constructing of Penrose tiling by means of the fractal of five-pointed stars / A.A. Polyakov // Russian Metallurgy (Metally). – 2016. – No. 2. – P. 121–123.

5. Henley, C.L. Sphere packing and local environments in Penrose tiling / C.L. Henley // Phys. Rev. B. – 1986. – № 34(2). – С. 797–816.

6. Поляков, А.А. Геометрические свойства симметричной проекции 6-мерного куба на трехмерное пространство / А.А. Поляков // Наука ЮУрГУ: материалы 70-й научной конференции. Секции естественных наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. – С. 90–99.

К содержанию