УДК 517.3

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПРИ РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Т.С. Чернова

В данной статье рассматривается применение интеграла к решению физических задач.

Ключевые слова: интеграл, физическая задача.

Такие дисциплины, как математика и физика, считаются наиболее трудными предметами общеобразовательного цикла. Причем математика играет значительную роль в физике.

Ни для кого не секрет, что изучение начала математического анализа тяжело дается многим студентам. Изучив определенные правила и методы интегрирования, они зачастую не дают себе отчет, что за этими правилами стоит и как их применить.

Это несмотря на то, что впервые ознакомление с данным понятием происходит еще в школе. В подобном случае интегралы кажутся студентам непонятным и ненужным материалом, который никогда нигде не пригодится.

С другой стороны, скажем так, хорошо владеющий математическим аппаратом студент довольно легко может применить математическую теорию к решению некоторых физических задач.

Математический аппарат должен быть использован в физике максимально, а материал курса физики должен служить одним из рычагов формирования математических представлений.

Неумение решать задачи по физики часто связаны с отсутствием навыков решения математических уравнений, неумением проводить алгебраические и геометрические построения.

Что же понимают под определением интеграла. Впервые интегрирование применено в 1800 г. до н.э., в древнем Египте.

Применение начиналось с метода исследования площади и объема криволинейных фигур. Суть метода заключается в необходимости нахождения площади или объема путем разбиения данной фигуры на n частей.

Понятие интеграла возникает в связи с необходимостью:

- нахождение функции по ее производной;
- определение площадей плоских фигур;
- определение работы сил за определенны промежуток времени и т.д.

Основной задачей дифференциального исчисления на практике является определение для заданной функции $F(x)$ ее производной $F'(x) = f(x)$ или ее дифференциала $F'(x)dx = f(x)dx$.

Задачей интегрального исчисления является обратная задача, состоящая в определении функции $F(x)$ по известным производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$.

Сформулируем определение определенного интеграла: определенным интегралом от *a* до *b* непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на этом интервале [*a*; *b*], называется приращение первообразной $F(x)$ для этой функции, т.е.:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где числа *a* и *b* называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Рассмотрим, что понимают под фразой физическая задача.

Физической задачей называют небольшую проблему, решаемую с помощью математических действий и экспериментов на основе законов и методов физики. Изучение физики начинается с простых понятий материальная точка и вектор, т.е. вектор скорости, силы и перемещения. Угловую скорость и угловое ускорение рассматривают как производную (первая или вторая) функции пути от времени. Пройденный путь рассматривают не только с помощью простых формул кинематики, но и применяют понятие интеграла.

Казалось бы, нет ничего проще, чем построить вектор силы, скорости или использовать формулы математического анализа.

Некоторые задачи физики трудно решить методами элементарной математики, применение интеграла значительно упрощает данное решение.

Вся сложность и заключается в том, как применить столь непростое понятие интеграла к решению физических задач.

В качестве примеров можно привести задачи на нахождение: пути, пройденного телом при прямолинейном движении, работы тела, давления, температуры и т.д.

Итак, применим теорию интегрирования для решения физических задач. Рассмотрим два вида задач: вычисление пройденного пути; работа постоянной силы.

I. Задача на вычислении пройденного пути

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t, рассчитывается по формуле $S = v \cdot t$ $S = v \cdot t$. Путь S, пройденный телом при прямолинейном движении со скоростью $v(t)$ за интервал времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Задача 1. Скорость точки $v = 2t + 4$ (м/с). Вычислить путь, пройденный материальной точкой за 4 секунды от начала движения.

Дано:
$v = 2t + 4$, м/с
t_1=0 с
t_2=4 с
Найти:
S – ?

Решение:
По условию: $v(t) = 2t + 4$, *a*=0, *b*=4.

$$S = \int_a^b v(t)dt$$

$$S = \int_a^b v(t)dt = \int_0^4 (2t+4)dt = \left(t^2 + 4t\right)\Big|_0^4 = 4^2 + 4\cdot 4 = 32$$ (м).

Ответ: 32 м.

Задача 2. Найти путь, пройденный за первые 3 с, если тело движется прямолинейно со скоростью $v = 2t^2 - t + 1$ (м/с).

Дано:
$v = 2t^2 - t + 1$, м/с
t_1=0 с
t_2=3 с
Найти:
S – ?

Решение:
По условию: $v(t) = 2t^2 - t + 1$.

$$S = \int_a^b v(t)dt$$.

Тогда:

$$S = \int_a^b v(t)dt = \int_0^3 (2t^2 - t + 1)dt = \left(2\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right)\Bigg|_0^3 = 16{,}5$$

Ответ: 16,5 м.

Задача 3. Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 12t - t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала пути, до его остановки (в моменты начала и остановки скорость тела равна нулю).

Дано:
$v = 12t - t^2$, м/с
t_1=0 с
Найти:
L – ?

Решение:
По условию: $v(t) = 12t - t^2$, в моменты начала и остановки скорость тела равна нулю. Определим пределы интегрирования, приравняв $v(t) = 0$, получим:

$$12t - t^2 = 0$$

$$t(12 - t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 12 \end{cases}$$

По формуле находим длине пути: $L = \int_a^b v(t)dt$, где

$a = t_1, \quad b = t_2$.

$$L = \int_a^b v(t)dt = \int_0^{12} (12t^2 - t^2)dt = 6t^3 \Big|_0^{12} - \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^{12} = 864 - 576 = 288$$

Ответ: 288 м.

II. Задача о вычислении работы переменной силы

Работой постоянной силы F называют произведение силы на перемещение и на косинус угла между ними: $A = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$.

Работа $A_{1\text{-}2}$, совершаемая силой F на конечном перемещении, равна сумме элементарных работ силы F на всех малых участках траектории [1]:

$$A_{1-2} = \int_1^2 F dr.$$

Задача 4. Сила упругости F пружины, растянутой на x = 0,05м, равна 3 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на l = 0,1 м?

Дано:	Решение:
x =0,05 м	Из формулы закона Гука $F = kx$, определим коэффициент про-
l= 0,1 м	порциональности k, где x = 0,05 м:
F=3 Н	$3 = k \cdot 5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow k = 60$
Найти:	Найдем значение работы переменной силы, полагая, что, a=0,
A – ?	b=0,1:
	$A = \int_0^{0,1} 60xdx = 30x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,3$ Дж
	Ответ: 0,3 Дж.

Задача 5. Тело перемещается из точки a=1 м в точку b=3 м. Найти работу, F =100 Н при перемещении тела.

Дано:	Решение:
a =1 м	
b= 3 м	Работа силы: $A_{1-2} = \int_a^b F dr$, где F по закону Гука $F = kx$.
F=100 Н	
Найти:	
A – ?	Найдем работу: $A = \int_0^{0,1} 60xdx = 30x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,3$ Дж
	Ответ: 0,3 Дж.

В заключение можно сказать, что применение интеграла дает большие возможности. С помощью интеграла можно вычислять не только площади фигур, ограниченных любыми линиями и объём тела, но и решать многие физические задачи.

Библиографический список

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1–2 / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 288 с.

2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Электронный ресурс] / Г.Н. Берман. – СПб.: Лань, 2016. – 492 с. – URL: http://e.lanbook.com/book/73084.

3. Усова, А.В. Практикум по решению физических задач: для студентов физ.-мат. фак. / А.В. Усова, Н.Н. Тулькибаева. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 206 с.

К содержанию