УДК 517.925 DOI: 10.14529/mmph200203

О СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

В.Ш. Ройтенберг
Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Рассматриваются дифференциальные уравнения, правые части которых являются однородными тригонометрическими полиномами степени *n*. Фазовым пространством таких уравнений является окружность. Описаны грубые уравнения – уравнения, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при переходе к близкому уравнению. Уравнение является грубым тогда и только тогда, когда его правая часть имеет только простые нули, то есть все особые точки которого – гиперболические. Множество всех грубых уравнений открыто и всюду плотно в пространстве $\mathrm{E}_h(n)$ рассматриваемых уравнений. Описаны связные компоненты этого множества. Два грубых уравнения, имеющие особые точки, принадлежат одной компоненте тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны. Во множестве всех негрубых уравнений выделено открытое и всюду плотное подмножество, состоящее из уравнений первой степени негрубости – уравнений, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при переходе к близкому негрубому уравнению. Оно является аналитическим подмногообразием коразмерности один в $\mathrm{E}_h(n)$ (бифуркационным многообразием) и состоит из уравнений, для которых все особые точки гиперболические, за исключением двух седло-узловых особых точек. Доказано, что любые два грубых уравнения можно соединить в $\mathrm{E}_h(n)$ гладкой дугой с конечным числом бифуркационных точек, в которых эта дуга трансверсальна бифуркационному многообразию.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение на окружности; тригонометрический полином; грубость; бифуркационное многообразие; связная компонента.

Введение

В настоящей работе рассматривается пространство $\mathrm{E}_h(n)$ дифференциальных уравнений на окружности, правые части которых однородные тригонометрические полиномы степени n. Описаны уравнения грубые относительно этого пространства и их типичные бифуркации.

Ж. Палисом и Ч. Пью в [1] была поставлена задача о существовании простой дуги, соединяющей две грубые динамические системы на замкнутом многообразии. Для простейших грубых систем – систем Морса–Смейла, эта задача была решена в работе [2]. Было показано, что любые две системы Морса–Смейла на произвольном замкнутом многообразии можно соединить дугой, состоящей только из систем Морса–Смейла, за исключением конечного числа «простых» бифуркационных точек. Аналогичная задача изучалась и для диффеоморфизмов [3–4]. Полностью она решена только для диффеоморфизмов окружности [4].

Естественна постановка задачи о существовании простых дуг и в более узких пространствах динамических систем. Мы ее рассмотрим для пространства $\mathrm{E}_h(n)$.

Частным случаем задачи о существовании простой дуги является следующий вопрос. Какие две грубые системы можно соединить дугой, не содержащей бифуркационных точек? Иными словами, речь идет об описании связных компонент множества грубых динамических систем. Эта задача рассматривалась в работах [5–8].

Здесь мы опишем связные компоненты множества грубых уравнений из $\mathrm{E}_h(n)$.

1. днородные полиномиальные дифференциальные уравнения на окружности

На окружности $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \tag{1}$$

где

$$a(\varphi)=\sum_{i=0}^{n} a_i \cos^i \varphi \sin^{n-i}\varphi \tag{2}$$

– однородный тригонометрический полином степени $n\ge 2$. Удобно не исключать случай равенства нулю всех коэффициентов a_i. Уравнение (1) естественно отождествляется с функцией a, а также с упорядоченным набором чисел $(a_0, a_1, ..., a_n)$, а множество $\mathrm{E}_h(n)$ таких уравнений с пространством $\mathbf{R}^{n+1}$ с нормой $\|a\| := \max\limits_{i=0,...,n} |a_i|$.

Уравнения из $\mathrm{E}_h(n)$ обладают симметрией:

$$a(\varphi+\pi)\equiv(-1)^n a(\varphi). \tag{3}$$

Поэтому множество особых точек любого уравнения $a\in \mathrm{E}_h(n)$ (нулей его правой части $a(\varphi)$) инвариантно при сдвиге $\varphi\mapsto\varphi+\pi$ окружности.

Нам понадобится

Лемма 1. *Правую часть ненулевого уравнения* $a\in \mathrm{E}_h(n)$ *можно представить в виде*

$$a(\varphi)=q(\varphi)\prod_{i=1}^{s}\sin(\varphi-\varphi_i), \tag{4}$$

где $\varphi_1\le\varphi_2\le\dots\le\varphi_s<\varphi_1+\pi$,

$$q(\varphi)=q_{n-s}\sin^{n-s}\varphi+...+q_1\sin\varphi\cos^{n-s-1}\varphi+q_0\cos^{n-s}\varphi \tag{5}$$

– однородный тригонометрический полином, $q(\varphi)\ne 0$ для всех $\varphi\in \mathbf{S}^1$.

Доказательство леммы 1. Пусть $a(\varphi)$ имеет вид (2). Рассмотрим сначала случай $a_0\ne 0$. Многочлен $P(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$ разложим на множители: $P(t)=Q(t)(t-t_1)\cdots(t-t_s)$, где $Q(t)=Q_{n-s}t^{n-s}+...+Q_1 t+Q_0$ – многочлен с $Q_{n-s}=a_0$, не имеющий действительных корней, а $t_1\le t_2\le\dots\le t_s$. Пусть $\varphi_i=\operatorname{arctg} t_i$, $i=1,...,s$. Тогда при $\varphi\ne\frac{\pi}{2}\operatorname{mod}\pi$ $a(\varphi)$ можно представить в виде

$$a(\varphi)=\cos^n\varphi\, P(\operatorname{tg}\varphi)=\cos^n\varphi\left(Q_{n-s}\frac{\sin^{n-s}\varphi}{\cos^{n-s}\varphi}+...+Q_1\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+Q_0\right)\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{\sin\varphi_i}{\cos\varphi_i}\right),$$

а потому и в виде (4), где $q(\varphi)$ имеет вид (5) с $q_j=Q_j/\prod_{i=1}^{s}\cos\varphi_i$, $j=0,1,...,n-s$, $q(\varphi)\ne 0$ для всех φ. По непрерывности равенство (4) справедливо и при $\varphi=\frac{\pi}{2}\operatorname{mod}\pi$.

Если $a_0=0$, то можно выбрать такое α, что при замене $\tilde\varphi=\varphi+\alpha$ уравнение a перейдет в уравнение $\tilde a\in \mathrm{E}_h(n)$, для которого соответствующий коэффициент $\tilde a_0\ne 0$. По доказанному $\tilde a(\tilde\varphi)=\tilde q(\tilde\varphi)\prod_{i=1}^{s}\sin(\tilde\varphi-\tilde\varphi_i)$. Сделав обратную замену $\varphi=\tilde\varphi-\alpha$, получим равенство (4) с $q(\varphi)=\tilde q(\varphi+\alpha)$, $\varphi_i=\tilde\varphi_i-\alpha$.

2. Грубые уравнения

Будем говорить, что уравнения a и $\tilde a$ *топологически эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $h:\mathbf{S}^1\to\mathbf{S}^1$, переводящий траектории уравнения $\tilde a$ в траектории уравнения a с сохранением ориентации на них.

Уравнение $a\in \mathrm{E}_h(n)$ назовем *грубым относительно множества* $\Lambda\subset \mathrm{E}_h(n)$, если $a\in\Lambda$ и существует такая его окрестность $U(a)$ в Λ, что уравнение a и любое уравнение $\tilde a\in U(a)$ топологически эквивалентны.

Уравнение $a \in \mathrm{E}(n)$, грубое относительно $\mathrm{E}_h(n)$, будем называть просто *грубым уравнением*.

Обозначим $\Sigma^0(n)$ множество уравнений $a \in \mathrm{E}_h(n)$, все особые точки которого гиперболические, то есть для которых функция $a(\varphi)$ либо не имеет нулей, либо имеет только простые нули. В разложении (4) правой части уравнения $a \in \Sigma^0(n)$ все числа φ_i разные.

Теорема 1. *1. Множество* $\Sigma^0(n)$ *открыто и всюду плотно в* $\mathrm{E}_h(n)$.

2. Уравнение $a \in \mathrm{E}_h(n)$ *является грубым тогда и только тогда, когда принадлежит* $\Sigma^0(n)$.

Доказательство. Докажем что $\Sigma^0(n)$ всюду плотно в $\mathrm{E}_h(n)$. Пусть уравнение $a \in \mathrm{E}_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$. Покажем, что в любой его окрестности $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma^0(n)$. Для уравнения с нулевой правой частью это очевидно, поэтому будем считать, что $a(\varphi)$ – ненулевая функция. Представим ее в виде (4). Рассмотрим уравнение a_μ с правой частью

$$a_\mu(\varphi) = q(\varphi)\prod_{i=1}^{s}\sin(\varphi - \varphi_i - \mu\alpha_i),$$

где все числа $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,...,s$, различны. При достаточно малом $\mu > 0$ $a_\mu \in \Sigma^0(n) \cap U(a)$.

Докажем, что из грубости уравнения $a \in \mathrm{E}_h(n)$ следует, что $a \in \Sigma^0(n)$. Предположим противное: $a \in \mathrm{E}(n) \setminus \Sigma^0(n)$. Пусть $U(a)$ – окрестность, фигурирующая в определении грубости. Поскольку в $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma^0(n)$, то все нули $a(\varphi)$ имеют нечетную кратность, причем хотя бы один из них, который обозначим φ_0, имеет кратность $2m+1 \geq 3$. Тогда $a(\varphi) = l(\varphi-\varphi_0)^{2m+1} + o((\varphi-\varphi_0)^{2m+1})$, $l \neq 0$. Рассмотрим уравнение a_μ: $\dot{\varphi} = a(\varphi) - \mu(\operatorname{sgn} l)b(\varphi)$, где

$$b(\varphi) = \sin(\varphi-\varphi_0) = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^k \sin(\varphi-\varphi_0), \text{ если } n = 2k+1,$$

$$b(\varphi) = \sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\varphi_0) = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{k-1}\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\varphi_0), \text{ если } n = 2k,$$

число α подобрано так, чтобы $\sin(\varphi+\alpha) \neq 0$ в нулях функции $a(\varphi)$, $\sin(\varphi_0+\alpha) > 0$. При достаточно малом $\mu > 0$ уравнение a_μ принадлежит $U(a)$ и имеет больше особых точек, чем a. Поскольку существует гомеоморфизм h, переводящий особые точки уравнения a_μ и только их в особые точки уравнения a, то получаем противоречие. Тем самым, грубое уравнение $a \in \Sigma^0(n)$.

Открытость $\Sigma^0(n)$ и грубость уравнений из $\Sigma^0(n)$ очевидны.

3. Уравнения первой степени негрубости

Уравнения $a \in \mathrm{E}(n)$, грубые относительно $\mathrm{E}(n) \setminus \Sigma^0(n)$, назовем уравнениями *первой степени негрубости*.

Заметим, что вследствие (3), если правая часть $a(\varphi)$ уравнения $a \in \mathrm{E}(n)$ имеет нуль φ_0 кратности s, то она имеет и нуль $\varphi_0 + \pi$ кратности s.

Обозначим $\Sigma^1(n)$ множество всех уравнений $a \in \mathrm{E}(n)$, у которых все особые точки гиперболические, за исключением двух двукратных (седло-узловых) особых точек.

Теорема 2. *1. Множество* $\Sigma^1(n)$ *открыто и всюду плотно в* $\mathrm{E}_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$ *и является вложенным аналитическим подмногообразием* $\mathrm{E}_h(n)$ *коразмерности один.*

2. Уравнение $a \in \mathrm{E}_h(n)$ *является уравнением первой степени негрубости тогда и только тогда, когда принадлежит* $\Sigma^1(n)$.

Доказательство. Докажем что $\Sigma^1(n)$ всюду плотно в $\mathrm{E}_h(n) \setminus \Sigma^0(n)$. Пусть уравнение $a \in \mathrm{E}_h(n) \setminus \Sigma^0(n) \setminus \Sigma^1(n)$. Покажем, что в любой его окрестности $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma^1(n)$.

Для нулевого уравнения это очевидно. Поэтому будем считать, что $a(\varphi)$ ненулевая функция. Ее представление в виде (4) перепишем в следующей форме:

$$a(\varphi)=q(\varphi)\prod_{j=1}^{r}\sin^{k_j}(\varphi-\varphi_j)\,, \tag{6}$$

где $\varphi_1<\varphi_2<\dots<\varphi_r$, $k_1+\ldots+k_r=s$. Так как $a\notin\Sigma^k(n)$, $k=0,1$, то хотя бы одно из чисел k_j больше 1. Для определенности пусть $k_1\geq 2$. Заменим в (6) множитель $\sin^{k_1}(\varphi-\varphi_1)$ на $\sin^2(\varphi-\varphi_1)\prod_{s=1}^{k_1-2}\sin(\varphi-\varphi_1-\mu\alpha_{1,s})$, где все числа $\alpha_{1,s}>0$ и различны, а множители $\sin^{k_j}(\varphi-\varphi_j)$, $j=2,\ldots,r$, на $\prod_{s=1}^{k_j}\sin(\varphi-\varphi_j-\mu\alpha_{j,s})$, где все числа $\alpha_{j,s}>0$ и различны. Полученную функцию обозначим $a_\mu(\varphi)$. При достаточно малом $\mu>0$ уравнение $\dot\varphi=a_\mu(\varphi)$ принадлежит $\Sigma^1(n)\cap U(a)$. Тем самым, плотность $\Sigma^1(n)$ в $\mathrm{E}_h(n)\setminus\Sigma^0(n)$ доказана.

Докажем, что $\Sigma^1(n)$ – аналитическое подмногообразие в $\mathrm{E}_h(n)$. Пусть $a_0\in\Sigma^1(n)$ и φ_0 – двукратный нуль функции $a_0(\varphi)$. Согласно лемме 1 $a_0(\varphi)=q(\varphi)\sin^2(\varphi-\varphi_0)\Pi(\varphi)$, где $q(\varphi)$ – однородный тригонометрический полином четной степени $n-s-2$, не обращающийся нигде в нуль, $\Pi(\varphi)=\prod_{i=1}^{s}\sin(\varphi-\varphi_i)$ или $\Pi(\varphi)=1$.

Функция $\hat a:\mathbf{S}^1\times\mathrm{E}_h(n)\to\mathbf{R}$, определенная равенством $\hat a(\varphi,a):=a(\varphi)$, является аналитической. Так как $\hat a'_\varphi(\varphi_0,a_0)=0$, $\hat a''_{\varphi\varphi}(\varphi_0,a_0)\neq 0$, то по теореме о неявной функции существуют число $\varepsilon>0$, окрестность $V(a_0)$ уравнения a_0 в $\mathrm{E}_h(n)$ и аналитическая функция $\hat\varphi:V(a_0)\to(\varphi_0-\varepsilon,\varphi_0-\varepsilon)$, такие, что $\hat\varphi(a_0)=\varphi_0$ и для любых $\varphi\in(\varphi_0-\varepsilon,\varphi_0-\varepsilon)$, $a\in V(a_0)$:

$$a''(\varphi)\neq 0 \;\text{ и }\; a'(\varphi)=\hat a'_\varphi(\varphi,a)=0\Leftrightarrow\varphi=\hat\varphi(a)\,. \tag{7}$$

Определим аналитическую функцию $g:V(a_0)\to\mathbf{R}$, положив $g(a):=\hat a(\hat\varphi(a),a)=a(\hat\varphi(a))$. Обозначим h уравнение из $\mathrm{E}_h(n)$ с правой частью $h(\varphi)=q(\varphi)\Pi(\varphi)=q(\varphi)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\Pi(\varphi)$.

Так как

$$g'(a_0)h=\tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}g(a_0+\tau h)=\tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}[a_0(\hat\varphi(a_0+\tau h))+\tau h(\hat\varphi(a_0+\tau h))]=$$
$$=\tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}a_0(\hat\varphi(a_0+\tau h))+h(\varphi_0)=a_0'(\varphi_0)\tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\hat\varphi(a_0+\tau h)+h(\varphi_0)\,, \tag{8}$$

а $a_0'(\varphi_0)=0$, то $g'(a_0)h=h(\varphi_0)\neq 0$. Таким образом, $g'(a_0)\neq 0$. Уменьшив при необходимости окрестность $V(a_0)$, мы можем считать, что $\forall a\in V(a_0)$ $g'(a)\neq 0$ и все нули функции $a(\varphi)$, не принадлежащие интервалу $(\varphi_0-\varepsilon,\varphi_0-\varepsilon)$, простые. Отсюда и из (7) получаем, что $\Sigma^1(n)\cap V(a_0)=g^{-1}(0)$, и потому $\Sigma^1(n)$ – вложенное аналитическое подмногообразие коразмерности один.

Пусть уравнение a имеет первую степень негрубости. По определению существует такая его окрестность $U(a)$ в $\mathrm{E}_h(n)\setminus\Sigma^0(n)$, что уравнение a и любое уравнение $\tilde a\in U(a)$ топологически эквивалентны. Поскольку в $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma^1(n)$, то a имеет две особые точки четной кратности, а остальные особые точки имеют нечетную кратность. Покажем, что $a\in\Sigma^1(n)$. Запишем $a(\varphi)$ в виде (6). Без ограничения общности можно считать, что особые точки четной кратности $\varphi_1 \bmod 2\pi$ и $(\varphi_1+\pi)\bmod 2\pi$. Предположим, что $a\notin\Sigma^1(n)$. Тогда либо а) $k_1\geq 4$, либо б) $k_1=2$ и для некоторого $s\in\{2,\ldots,r\}$ $k_s=2m-1\geq 3$.

В случае а) заменим в (6) множитель $\sin^{k_1}(\varphi-\varphi_1)$ на

$$\sin^{k_1}(\varphi-\varphi_1)-\mu\sin^2(\varphi-\varphi_1)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^{k_1-2}\,.$$

Полученную функцию обозначим $a_\mu(\varphi)$. При достаточно малом $\mu>0$ уравнение $\dot\varphi = a_\mu(\varphi)$ принадлежит $U(a)\setminus\Sigma^0(n)$ и имеет больше особых точек чем уравнение a. Но это противоречит топологической эквивалентности уравнений a и a_μ. Таким образом, $a\in\Sigma^1(n)$.

В случае б) пусть $a_\mu(\varphi)$ – функция, полученная заменой в (6) множителя $\sin^{k_s}(\varphi-\varphi_1)$ на $\sin^{k_s}(\varphi-\varphi_s)-\mu\sin(\varphi-\varphi_s)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^{k_s-1}$. Если $\mu>0$ достаточно мало, то уравнение $\dot\varphi = a_\mu(\varphi)$ принадлежит $U(a)\setminus\Sigma^0(n)$ и имеет больше особых точек, чем уравнение a. Снова получаем противоречие, и потому $a\in\Sigma^1(n)$.

Пусть уравнение $a\in\Sigma^1(n)$ кроме двух седло-узловых особых точек имеет $2r\ge 0$ гиперболических особых точек. Норма $\|\cdot\|$ в $\mathrm{E}_h(n)$ эквивалентна C^2-норме

$$\|a\|_2 := \max_{\varphi\in S^1}\max\{|a(\varphi)|,|a'(\varphi)|,|a''(\varphi)|\}.$$

Поэтому из [9, с. 18–21] с учетом равенства (3) следует, что существует такая окрестность $U(a)$ уравнения в $\mathrm{E}_h(n)\setminus\Sigma^0(n)$, что любое уравнение $\tilde a\in U(a)$ имеет две седло-узловые особые точки и $2r$ гиперболических особых точек. Тем самым, $\Sigma^1(n)$ открыто в $\mathrm{E}_h(n)\setminus\Sigma^0(n)$. Ясно, что уравнения a и $\tilde a$ топологически эквивалентны. Поэтому уравнение a имеет первую степень негрубости.

4. Связные компоненты множества грубых уравнений

Дугой (путем) в пространстве $\mathrm{E}_h(n)$, соединяющей уравнение a^0 с уравнением a^1 будем называть непрерывное отображение $\xi: I\to \mathrm{E}_h(n)$, $I=[0,1]$, такое, что $\xi(0)=a^0$, $\xi(1)=a^1$. Если дуга ξ соединяет a^0 с a^1, а дуга η соединяет a^1 с a^2, то определено их произведение – дуга $\chi=\xi\cdot\eta$, определенная равенством $\chi(\tau)=\xi(2\tau)$ при $0\le\tau\le 1/2$ и равенством $\chi(\tau)=\eta(2\tau-1)$ при $1/2\le\tau\le 1$. Произведение $\xi_1\cdot\xi_2\cdots\xi_n$ дуг ξ_i, $i=1,\dots,n$, таких, что $\xi_j(1)=\xi_{j+1}(0)$, $j=1,\dots,n-1$, определяется по индукции. Дуга ξ^{-1}, обратная к дуге ξ, соединяющей a^0 с a^1, определяется равенством $\xi^{-1}(\tau):=\xi(1-\tau)$. Она соединяет a^1 с a^0.

Из (3) следует, что $\Sigma^0(n)$ при нечетном $n=2l-1$ является объединением множеств $\Sigma^0_m(n)$, $m=1,\dots,l$, состоящее из уравнений, имеющих $4m-2$ (гиперболических) особых точек, а при четном $n=2l$ является объединением множеств $\Sigma^0_m(n)$, $m=0,\dots,l$, состоящее из уравнений, имеющих $4m$ (гиперболических) особых точек. Обозначим также при четном n ${}^+\Sigma^0_0(n)$ (${}^-\Sigma^0_0(n)$) – подмножество $\Sigma^0_0(n)$, состоящее из таких уравнений a, что $\forall\varphi$ $a(\varphi)>0$ ($a(\varphi)<0$).

Теорема 3. *Связными компонентами множества* $\Sigma^0(n)$ *являются при четном* $n=2l$ *множества* ${}^+\Sigma^0_0(n)$, ${}^-\Sigma^0_0(n)$ *и* $\Sigma^0_m(n)$, *а при нечетном* $n=2l-1$ *множества* $\Sigma^0_m(n)$ ($m=1,\dots,l$).

Замечание. Ясно, что множества $\Sigma^0_m(n)$ – классы топологической эквивалентности уравнений из $\Sigma^0(n)$. Поэтому из теоремы 3 следует, что *два грубых уравнения, имеющих особые точки, топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует дуга* $\xi: I\to\Sigma^0(n)$, *их соединяющая.*

Доказательство теоремы. Рассмотрим случай четного $n=2l$. Случай нечетного n рассматривается аналогично. Пусть уравнения $a^k\in\Sigma^0_m(n)$, $m=1,\dots,l$; $k=0,1$. Представим их правые части по формуле (4):

$$a^k(\varphi)=q_k(\varphi)\prod_{i=1}^{2m}\sin(\varphi-\varphi_i^k), \tag{9}$$

где $q_k(\varphi)$ – однородные полиномы, не обращающие в нуль, а

$$\varphi_1^k < \varphi_2^k < \dots < \varphi_{2m}^k < \varphi_1^k + \pi \ \ (k = 0,1). \tag{10}$$

Тогда $\varphi_i^k \bmod 2\pi$, $(\varphi_i^k + \pi) \bmod 2\pi$ ($i = 1,...,2m$) – все особые точки уравнения a^k. Мы можем считать, что числа φ_i^k в представлении (8) выбраны так, что

$$\operatorname{sgn} q_0(\varphi) = \operatorname{sgn} q_1(\varphi). \tag{11}$$

Действительно, если $\operatorname{sgn} q_0(\varphi) = -\operatorname{sgn} q_1(\varphi)$, то, обозначив $\tilde{\varphi}_1^1 = \varphi_2^1, \dots, \tilde{\varphi}_{2m-1}^1 = \varphi_{2m}^1$, $\tilde{\varphi}_{2m}^1 = \varphi_1^1 + \pi$, мы получим последовательность чисел $\tilde{\varphi}_1^1 < \tilde{\varphi}_2^1 < \dots < \tilde{\varphi}_{2m-1}^1 < \tilde{\varphi}_{2m}^1 < \tilde{\varphi}_1^1 + \pi$ и равенство $a^1(\varphi) = \tilde{q}_1(\varphi)\prod_{i=1}^{2m}\sin(\varphi - \tilde{\varphi}_i^1)$ с $\tilde{q}_1(\varphi) = -q_1(\varphi)$. Теперь $\operatorname{sgn} q_0(\varphi) = \operatorname{sgn} \tilde{q}_1(\varphi)$. Вернувшись к прежним обозначениям будем иметь (9)–(11).

Обозначим $\varphi_i(\tau) := (1-\tau)\varphi_i^0 + \tau\varphi_i^1$. Для любого $\tau \in I$ уравнение

$$\xi(\tau):\ \dot{\varphi} = [(1-\tau)q_0(\varphi) + \tau q_1(\varphi)]\prod_{i=1}^{2m}\sin(\varphi - \varphi_i(\tau))$$

принадлежит $\mathrm{E}_h(n)$ и имеет ровно $4m$ гиперболических особых точек $\varphi_i(\tau) \bmod 2\pi$, $(\varphi_i(\tau) + \pi) \bmod 2\pi$, $i = 1,...,2m$. Следовательно, $\xi : I \to \Sigma_m^0$ – дуга, соединяющая в $\Sigma_m^0(n)$ уравнения a^0 и a^1. Таким образом, $\Sigma_m^0(n)$ ($m = 1,...,l$) – связное множество.

Если $a^0, a^1 \in {}^+\Sigma_0^0(n)$ (соответственно, $a^0, a^1 \in {}^-\Sigma_0^0(n)$), то дуга $\xi : I \to {}^+\Sigma_0^0(n)$ (соответственно. $\xi : I \to {}^-\Sigma_0^0(n)$) задается равенством $\xi(\tau) = (1-\tau)a^0 + \tau a^1$. Следовательно, множества ${}^+\Sigma_0^0(n)$ и ${}^-\Sigma_0^0(n)$ также связны.

Если грубые уравнения a^0 и a^1 можно соединить дугой в $\Sigma^0(n)$, то они топологически эквивалентны. Уравнения из $\Sigma_m^0(n)$ и $\Sigma_s^0(n)$ при $m \neq s$ между собой топологически не эквивалентны. Следовательно, множества $\Sigma_m^0(n)$, $m = 1,...,l$, – связные компоненты $\Sigma^0(n)$. При четном n любая дуга, соединяющая уравнение $a^0 \in {}^+\Sigma_0^0(n)$ (соответственно, $a^0 \in {}^-\Sigma_0^0(n)$), с уравнением из $\Sigma^0(n) \setminus {}^+\Sigma_0^0(n)$ (соответственно, из $\Sigma^0(n) \setminus {}^-\Sigma_0^0(n)$) содержит бифуркационные точки. Следовательно, ${}^+\Sigma_0^0(n)$ и ${}^-\Sigma_0^0(n)$ – связные компоненты $\Sigma^0(n)$.

5. Простые дуги в пространстве $\mathrm{E}_h(n)$.

Дугу $\xi : I \to \mathrm{E}_h(n)$, соединяющую два грубых уравнения a^0 и a^1 назовем *простой*, если $\xi \in C^\infty(I, \mathrm{E}_h(n))$, $\xi(\tau) \in \Sigma^0(n)$ всех $\tau \in I$, кроме, возможно, их конечного множества, для точек которого $\xi(\tau) \in \Sigma^1(n)$, причем ξ трансверсальна $\Sigma^1(n)$ в этих точках.

Теорема 4. *Для любых грубых уравнений a^0 и a^1 из $\mathrm{E}_h(n)$ существует простая дуга $\xi : I \to \mathrm{E}_h(n)$, соединяющая a^0 с a^1. Если $a^0 \in \Sigma_m^0(n)$, $a^1 \in \Sigma_p^0(n)$, $0 < m \le p$, или $0 \le m < p$, то $\xi = \zeta_m \cdot \zeta_{m+1} \cdots \zeta_p$, где $\zeta_i : I \to \overline{\Sigma}_i^0(n)$, $m \le i \le p$.* Если $a^0 \in {}^+\Sigma_0^0(n)$, $a^1 \in {}^-\Sigma_0^0(n)$, то $\xi = {}^+\zeta_0 \cdot \zeta_1 \cdot {}^-\zeta_0$, где ${}^\pm\zeta_0 : I \to {}^\pm\overline{\Sigma}_0^0(n)$, $\zeta_1 : I \to \overline{\Sigma}_1^0(n)$.

Доказательство. Для сокращения формулировок, дугу $\xi : I \to \mathrm{E}_h(n)$, являющуюся произведением C^∞-дуг, с теми же свойствами что у простой дуги, кроме гладкости, которая может нарушаться только в точках $\tau \in (0,1)$, таких, что $\xi(\tau) \in \Sigma^0(n)$, будем называть *полупростой.* Нам понадобится:

Лемма 2. *При четном $n = 2l$ для любого $j = 0,1...,l-1$, а при нечетном $n = 2l-1$ для любого $j = 1...,l-1$ существует C^∞-дуга $\xi_j : I \to \mathrm{E}_h(n)$ такая, что $\xi_j(1/2) \in \Sigma^1(n)$, $\xi_j(0,1/2) \in \Sigma_j^0(n)$,*

$\xi_j(1/2,1)\in\Sigma_{j+1}^0(n)$, ξ_j *трансверсальна* $\Sigma^1(n)$. *При* $j=0$ *дуга* $\xi_0=\xi_0^+$ *(соответственно,* $\xi_0=\xi_0^-$*) может быть выбрана так, что* $\xi_0^+(0,1/2)\in{}^+\Sigma_0^0(n)$ *(соответственно,* $\xi_0^-(0,1/2)\in{}^-\Sigma_0^0(n)$*).*

Доказательство леммы 2. Пусть $n=2l$ или $n=2l-1$. Определим C^∞-дугу $\xi_j:I\to \mathrm{E}_h(n)$, поставив в соответствие числу $\tau\in I$ уравнение

$$\dot\varphi=\sigma[\sin^2\varphi-(\tau-0,5)(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)](\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^{l-j-1}\Pi(\varphi),$$

где для $n=2l$ $\Pi(\varphi)=\prod_{k=1}^{2j}\sin\left(\varphi-\pi k/2j\right)$, $\sigma=1$ при $j=1,...,l-1$ и $\Pi(\varphi)=1$, $\sigma=\pm1$ при $j=0$, а для $n=2l-1$ $\Pi(\varphi)=\prod_{k=1}^{2j-1}\sin\left(\varphi-\pi k/(2j-1)\right)$, $\sigma=1$ при $j=1,...,l-1$.

То, что дуги ξ_j, $j=1,...,l-1$ имеют свойства, сформулированные в лемме, за исключением трансверсальности, очевидно. Трансверсальность ξ_j подмногообразию $\Sigma^1(n)$ в точке $\tau=1/2$ равносильна неравенству $\frac{d}{d\tau}\big|_{\tau=1/2}\,g(\xi_j(\tau))\neq0$, где функция g – функция, задающая $\Sigma^1(n)$ в окрестности уравнения $a_0=\xi_j(1/2)$. Это неравенство доказывается аналогично неравенству (8).

Перейдем к непосредственному доказательству утверждений теоремы. Пусть $a^0\in\Sigma_m^0(n)$, $a^1\in\Sigma_p^0(n)$. Можно считать, что $m\le p$.

Если $m=p\ge1$, то согласно доказательству теоремы 3 существует C^∞-дуга $\tilde\xi:I\to \mathrm{E}_h(n)$, соединяющая a^0 и a^1.

Пусть $0\le m<p$, а $\xi_j:I\to \mathrm{E}_h(n)$, $j=m,...,p-1$ – дуги, определенные в лемме 2. Из теоремы 3 следует, что существуют C^∞-дуги $\eta_j:I\to\Sigma_j^0(n)$, $j=m,...,p$, такие, что $\eta_m(0)=a^0$, $\eta_p(1)=a^1$, $\eta_i(0)=\xi_{i-1}(1)$, $\eta_{i-1}(1)=\xi_{i-1}(0)$ для $i=m+1,...,p$. Теперь $\tilde\xi=\eta_m\cdot\xi_m\cdots\eta_{p-1}\cdot\xi_{p-1}\cdot\eta_p$ – полупростая дуга, соединяющая a^0 и a^1.

Пусть $m=p=0$, ξ_0^+ и ξ_0^- – дуги, определенные в лемме 2. Если a^0 и a^1 принадлежат одной компоненте ${}^+\Sigma_0^0(n)$ или ${}^-\Sigma_0^0(n)$, то существует C^∞-дуга $\xi:I\to\Sigma_0^0(n)$, соединяющая a^0 и a^1, Пусть a^0 и a^1 принадлежат разным множествам ${}^+\Sigma_0^0(n)$ и ${}^-\Sigma_0^0(n)$. Для определенности, пусть $a^0\in{}^+\Sigma_0^0(n)$, $a^1\in{}^-\Sigma_0^0(n)$. Согласно теореме 3 существуют C^∞-дуги ${}^\pm\eta_0:I\to{}^\pm\Sigma_0^0(n)$ и $\eta_1:I\to\Sigma_1^0(n)$ такие, что ${}^+\eta_0(0)=a^0$, ${}^+\eta_0(1)={}^+\xi_0(0)$, ${}^-\eta_0(0)={}^-\xi_0(0)$, ${}^-\eta_0(1)=a^1$, $\eta_1(0)={}^+\xi_0(1)$, $\eta_1(1)={}^-\xi_0(1)$. Тогда $\tilde\xi={}^+\eta_0\cdot{}^+\xi_0\cdot\eta_1\cdot({}^-\xi_0)^{-1}\cdot{}^-\eta_0$ – полупростая дуга, соединяющая a^0 и a^1.

Осталось показать, как полупростую дугу $\tilde\xi$ заменить простой дугой ξ, соединяющей a^0 и a^1. Пусть гладкость $\tilde\xi$ нарушается для конечного числа значений параметра $\tau_1<\tau_1<...<\tau_N$, таких, что $\tilde\xi(\tau_j)\in\Sigma^0(n)$, $j=1,...,N$. Для уравнений $\tilde\xi(\tau_j)$ выберем окрестности $U_j=\{a:\left\|a-\tilde\xi(\tau_j)\right\|<\rho\}$, содержащиеся в $\Sigma^0(n)$ и не пересекающиеся между собой, а затем число $\varepsilon_0>0$ так, чтобы $\tilde\xi$ было определено на интервалах $I_j^0=(\tau_j-\varepsilon_0,\tau_j+\varepsilon_0)$. Ограничения $\tilde\xi$ на промежутки $[0,\tau_j+\varepsilon_0)$ и $(\tau_j-\varepsilon_0,0]$ можно продолжить, соответственно, до C^∞-отображений $\xi_j^+:I_j^0\to \mathrm{E}_h(n)$ и $\xi_j^-:I_j^0\to \mathrm{E}_h(n)$ (теми же формулами, что была определена $\tilde\xi$ на промежутках $[0,\tau_j+\varepsilon_0)$ и $(\tau_j-\varepsilon_0,0]$). Выберем $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ столь малым, что

$$\forall j=1,...,N\ \forall\tau\in I_j=(\tau_j-\varepsilon,\tau_j+\varepsilon)\quad \xi_j^{\pm}(\tau)\in U_j.$$

Пусть $\chi:(-\varepsilon,\varepsilon)\to I$ – такая C^{∞}-функция, что $\chi(\tau)=0$ при $\tau\in(-\varepsilon,-\varepsilon/2)$ и $\chi(\tau)=1$ при $\tau\in(\varepsilon/2,\varepsilon)$. Определим теперь C^{∞}-дугу $\xi:I\to\mathrm{E}_h(n)$, положив $\xi(\tau)=\tilde{\xi}(\tau)$ для всех τ вне интервалов I_j и $\xi(\tau)=(1-\chi(\tau-\tau_j))\xi_j^-(\tau)+\chi(\tau-\tau_j)\xi_j^+(\tau)\ \forall\tau\in I_j$. Так как окрестность U_j выпукла, то $\forall\tau\in I_j\ \ \xi(\tau)\in U_j$ и потому $\xi(\tau)\in\Sigma^0(n)$. Следовательно, ξ – C^{∞}-гладкая дуга, соединяющая уравнение a^0 с уравнением a^1, с теми же точками бифуркации, что и $\tilde{\xi}$.

Представление ξ в виде произведения дуг ζ_i следует из конструкции ξ.

Замечание. Дуга ξ, существование которой утверждается в теореме 4, содержит наименьшее число точек бифуркаций среди всех дуг, соединяющих уравнения a^0 и a^1.

Литература

1. Palis, J. Fifty problems in dynamical systems / J. Palis, C.C. Pugh // Manning A. (eds.) Dynamical Systems–Warwick 1974. Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 468. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. – P. 345–353.

2. Newhouse, S. There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows / S. Newhouse, M.M. Peixoto // Trois études en dynamique qualitative, Astérisque. – Paris: Soc. Math. France, 1976. – Vol. 31. – P. 15–41.

3. Matsumoto Sh., There are two isotopic Morse – Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs / Sh. Matsumoto // Inventiones mathematicae. – 1979. – Vol. 51, no. 1. – P. 1–7.

4. Nozdrinova E.V. Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle / E.V. Nozdrinova // Нелинейная динамика. – 2018. – Т. 14, № 4. – С. 543–551.

5. Gutiérrez C. The connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds / C. Gutiérrez, W. De Melo // Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 597. – Springer. – 1977. – P. 230–251.

6. Ройтенберг В.Ш. О связных компонентах множества векторных полей Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Труды вторых Колмогоровских чтений. – Ярославль: ЯГПУ, 2004. – С. 352–358.

7. Ройтенберг В.Ш. О связных компонентах множества полиномиальных векторных полей, грубых в окрестности экватора сферы Пуанкаре // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. – 2015. – № 4. – С. 22–29.

8. Ройтенберг В.Ш. Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно группы вращений // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2018. – Т. 50, № 4. – С. 398–404.

9. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.

10. Хирш, М. Дифференциальная топология / М. Хирш. – М.: Мир, 1979. – 280 с.

Поступила в редакцию 18 декабря 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2020, vol. 12, no. 2, pp. 21–30

DOI: 10.14529/mmph200203

ON THE STRUCTURE OF THE SPACE OF HOMOGENEOUS POLYNOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A CIRCLE

V.Sh. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: vroitenberg@mail.ru

In this paper, differential equations with their right-hand sides as homogeneous trigonometric polynomials of n degree are examined. The phase space of such equations is a circle. Rough equations, for which the topological structure of the phase portrait does not change when considering a close equation, are described. An equation can be seen as rough if and only if its right-hand side has only simple zeros, that is, all the singular points of which are hyperbolic. The set of all the rough equations is open and is everywhere dense in the space $E_h(n)$ of the equations under consideration. The connected components of this set are described. Two rough equations with singular points are attributed to the same component if and only if they are topologically equivalent. In the set of all the non-rough equations, an open and everywhere dense subset is selected, consisting of the equations of the first degree of non-roughness; these are the equations, for which the topological structure of the phase portrait does not change when considering a close non-rough equation. It is an analytic submanifold of codimension one in $\mathrm{E}_h(n)$ (the bifurcation manifold) and consists of the equations, for which all the singular points are hyperbolic, with the exception of two saddle-node singular points. It is proved that any two rough equations can be connected in $\mathrm{E}_h(n)$ by a smooth arc with a finite number of bifurcation points where this arc is transversal to the bifurcation manifold.

Keywords: differential equation on a circle; trigonometric polynomial; roughness; bifurcation manifold; connected component.

References

1. Palis J., Pugh C.C. Fifty problems in dynamical systems. In: Manning A. (eds) *Dynamical Systems–Warwick 1974. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 468, Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. DOI: 10.1007/BFb0082633

2. Newhouse S., Peixoto M.M. There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows. Trois études en dynamique qualitative, *Astérisque*, Vol. 31, Paris: Soc. Math. France, 1976, pp. 15–41. http://www.numdam.org/item/AST_1976__31__15_0/

3. Matsumoto Sh. There are two isotopic Morse–Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs. *Inventiones mathematicae*, 1979, Vol. 51, no. 1, pp. 1–7. DOI: 10.1007/BF01389908

4. Nozdrinova E.V. Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2018, Vol. 14, no. 4, pp. 543–551. DOI: 10.20537/nd180408

5. Gutiérrez C., De Melo W., The connected components of Morse-Smale vector fields on two manifolds, Geometry and topology (*Proc. III Latin Amer. School of Math.*, Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976), 230–251, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 597, Springer, Berlin, 1977, pp. 230–251.

6. Roytenberg V.Sh. O svyaznykh komponentakh mnozhestva vektornykh poley Morsa–Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh (O the connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds). *Trudy vtorykh Kolmogorovskikh chteniy*, Yaroslavl', YaGPU Publ., 2004, pp. 352–358. (in Russ.).

7. Roytenberg V.Sh. On connected components of the set of polynomial vector fields, structurally stable in a neighborhood of the equator of the Poincare sphere. *The Bulletin of the Adyghe State University, the series “Natural-Mathematical and Technical Sciences”*, 2015, no. 4, pp. 22–29. (in Russ.).

8. Roitenberg V.Sh. Structural Stability of Planar Vector Fields that are Invariant Under the Rotation Group. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*, 2018, Vol. 50, no. 4, pp. 398–404. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-4-398-404. (in Russ.).

9. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Teoriya bifurkatsiy dinamicheskikh sistem na ploskosti* (The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane). Moscow, Nauka Publ., 1967, 487 p. (in Russ.).

10. Hirsch M.W. *Differencial topology*. Springer-Verlag, 1976, 222 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-9449-5

Received December 18, 2019