УДК 517.965.6 DOI: 10.14529/mmph200303

ЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

***Б.И. Исломов*[1], *Б.З. Усмонов*[2]**

[1] *Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент, Республика Узбекистан*
E-mail: islomovbozor@yandex.com
[2] *Чирчикский государственный педагогический институт, г. Чирчик, Республика Узбекистан*
E-mail: bakhtiyer.usmanov@mail.ru

Последние годы все больше внимание специалистов привлекают неклассические уравнения математической физики, это связано как с теоретическим интересом, так и практическим. Уравнения третьего порядка встречаются в различных задачах физики, механики и биологии. Например, в теории трансзвуковых течений, распространении плоской волны в вязкоупругом твердом теле, прогнозирования и регулирования грунтовых вод.

Исследуется краевая задача для уравнения третьего порядка с эллиптико-гиперболическим оператором в главной части. Рассматриваемое уравнение составляется из произведения неперестановочных дифференциальных операторов, поэтому известные представления общего решения введенные А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдиновым не применяются. Для изучения уравнения смешанного типа третьего порядка нами применен метод, не требующий специального представления общего решения рассматриваемого уравнения. Этот метод обусловливает изучение уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестными правыми частями, что представляет интерес для решения важных обратных задач механики и физики.

Доказаны теоремы существования и единственности классического решения поставленной задачи. Доказательство основано на принципе экстремума для уравнения третьего порядка и на теории сингулярных, фредгольмских интегральных уравнений.

Ключевые слова: локальная задача; уравнения третьего порядка; обратная задача; уравнения с неизвестными правыми частями; принцип экстремума, метод регуляризации; уравнения Фредгольма.

Введение. В последние годы все больше внимание специалистов привлекают неклассические уравнения математической физики, это связано как с теоретическим интересом, так и практическим.

Одним из важных классов неклассических уравнений математической физики является уравнение составного и смешанно-составного типа, главные части содержат операторы эллиптического, эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов. Корректные краевые задачи для уравнений эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов третьего порядка, когда главная часть оператора содержит производную по x или y, впервые изучены в работах А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдинова [1], М.С. Салахитдинова [2], Т.Д. Джураева [3], кроме того эти уравнения встречаются в различных задачах механики. Например, распространение плоской волны в вязкоупругом твердом теле [3]. В этих работах при исследовании краевых задач использовано представление общего решения уравнения смешанно-составного типа в виде суммы функций. Такое представление имеет важное место для уравнений, составляемых из произведения перестановочных дифференциальных операторов. Далее это направление для различных уравнений с частными производными третьего порядка развивалось в работах [4–10].

Настоящая работа посвящена изучению уравнения третьего порядка с эллиптико-гиперболическим оператором в главной части. Применен метод, не требующий специального представления общего решения рассматриваемого уравнения. Этот метод обусловливает изучение уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестными правыми частями, что представляет интерес для решения важных обратных задач механики и физики.

Доказаны теоремы существования и единственности классического решения поставленной задачи. Доказательство основано на принципе экстремума для уравнения третьего порядка и на теории сингулярных, фредгольмских интегральных уравнений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xxy}+u_{yyy}, & \text{при } y>0, \\ a(u_{xxy}-u_{yyy})+b(u_{xx}-u_{yy}), & \text{при } y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где a и b – действительные числа, причем $a^2+b^2\neq 0$.

Пусть D_1 – конечная однозначная область в плоскости (x,y), ограниченная при $y>0$ кривой σ: $x^2+y^2=1$ с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и отрезком $AB=\{(x,y):\ -1<x<1,\ y=0\}$. Кривая σ униформа относительно оси y, точка $N(0,h)$ этой кривой является единственной максимально удаленной от оси x точкой. Части AN и BN дуги σ униформы отрезка ON оси y, здесь O – начало координат. D_2 – область, ограниченная при $y<0$ отрезком AB и двумя характеристиками AC: $x+y=-1$, BC: $x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точки $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C(0,-1)$, $D=D_1\cup D_2\cup AB$.

Задача. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D}_j)\cap C^1(D_j\cup AB\cup AD\cup BC)$ $(j=1,2)$; 2) $u(x,y)\in C^{2,3}_{x,y}(D_j)$, $u_{xxy}\in C(D_j)$ и она в области D_j удовлетворяет уравнению (1); 3) на линии изменения типа выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to -0}u(x,y)=\alpha(x)\lim_{y\to +0}u(x,y)+\beta(x),\quad (x,0)\in AB, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to -0}u_y(x,y)=\gamma(x)\lim_{y\to +0}u_y(x,y)+\delta(x),\quad (x,0)\in AB; \tag{3}$$

4) функция $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(x,y)|_{\sigma}=\varphi(x,y),\ \ (x,y)\in\bar{\sigma}, \tag{4}$$

$$u(x,y)\big|_{AC}=\psi_1(x),\ \ -1\le x\le 0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x),\ \ -1\le x\le 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{7}$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi_j(x)$ $(j=\overline{1,3})$ – известные функции, причем

$$\alpha(x),\ \beta(x)\in C^1(\overline{AB})\cap C^3(AB),\qquad \gamma(x),\ \delta(x)\in C(\overline{AB})\cap C^2(AB), \tag{8}$$

$$\varphi(x,y)=y\varphi_1(x,y),\ \varphi_1(x,y)\in C(\bar{\sigma}), \tag{9}$$

$$\psi_2'(-1)=\psi_3'(1)=0,\ \ \psi_2'(0)=-\psi_3'(0),\quad \psi_2''(0)+\psi_3''(0)=\frac{2b}{a}\psi_2'(0), \tag{10}$$

$$\psi_1(x)\in C^1[-1,0]\cap C^2(-1,0),\qquad \psi_2(x)\in C[-1,0]\cap C^2(-1,0),\ \ \psi_3(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1). \tag{11}$$

2. Исследование задачи. Предположим:

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in D_1, \\ u_2(x,y), & (x,y)\in D_2. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде двух систем

$$\begin{cases} u_1(x,y)=\upsilon_1(x,y)+\omega_1(x), \\ \upsilon_{1xx}+\upsilon_{1yy}=0,\quad (x,y)\in D_1, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2yy} = \upsilon_2(x,y), \\ a\upsilon_{2y} + c\upsilon_2 = 0, \quad (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{14}$$

где $\upsilon_2(x,y)$ – произвольная достаточно гладкая функция, а $\omega_1(x)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \omega_{21}(x), & -1 \le x \le 0, \\ \omega_{22}(x), & 0 \le x \le 1, \end{cases} \tag{15$_1$}$$

причем

$$\omega_1'(-1) = \omega_1(1) = 0. \tag{15$_2$}$$

Нетрудно заметить, что общее решение уравнения $a\upsilon_{2y} + c\upsilon_2 = 0,$ имеет вид

$$\upsilon_2(x,y) = \omega_2(x)\exp\left(-\frac{b}{a}y\right), \tag{16}$$

где $\omega_2(y) = \omega_{21}(y) + \omega_{22}(y)$ – произвольная непрерывная функция.

Теорема. Если заданные функции удовлетворяют условиям (8)–(11), то регулярное решение поставленной задачи в области D существует и единственно.

Доказательство теоремы. В силу (16) решение задачи Коши с начальными данными

$$u_2(x,-0) = \tau_2(x), \quad (x,0) \in \overline{AB}, \quad u_{2y}(x,-0) = \nu_2(x), \quad (x,0) \in AB, \tag{17}$$

для уравнения (14) в области D_2 представим в виде

$$u_2(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu_2(\xi)\,d\xi + \frac{1}{4}\int_{x-y}^{x+y}d\xi\int_{\xi}^{x-y}\omega_2\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\exp\left[-\frac{c(\xi-\eta)}{2a}\right]d\eta. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (6) и (7), получаем

$$\left.\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=-1-x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tau_2'(-1) + \nu_2(-1) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{2x+1}\omega_2\left(\frac{-1+\eta}{2}\right)\exp\left[-\frac{b(-1-\eta)}{2a}\right]d\eta\right\} = \psi_2(x),$$

$$\left.\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial n}\right|_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=x-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tau_2'(1) + \nu_2(1) + \frac{1}{2}\int_{2x-1}^{1}\omega_2\left(\frac{\xi+2x-1}{2}\right)\exp\left[-\frac{b(\xi+1-2x)}{2a}\right]d\xi\right\} = \psi_3(x),$$

или из последних двух равенств получим

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{2x+1}\omega_{21}\left(\frac{-1+\eta}{2}\right)\exp\left[-\frac{b(-1-\eta)}{2a}\right]d\eta = \sqrt{2}\psi_2(x) - \tau_2'(-1) - \nu_2(-1), \tag{19}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{2x-1}^{1}\omega_{22}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\exp\left[-\frac{b(\xi-1)}{2a}\right]d\eta = -\sqrt{2}\psi_3(x) - \tau_2'(1) + \nu_2(1). \tag{20}$$

Дифференцируя (19) и (20) по x, находим

$$\omega_{21}(x) = \sqrt{2}\psi_2'(x)\exp\left[-\frac{b(x+1)}{a}\right], \quad -1 \le x \le 0, \tag{21}$$

$$\omega_{22}(x) = -\sqrt{2}\psi_3'(x)\exp\left[\frac{b(1-x)}{a}\right], \quad 0 \le x \le 1. \tag{22}$$

Таким образом, неизвестные функции $\omega_j(x)$ $(j=1,2)$ с учетом (15$_1$), (16), (21) и (22) полностью определяются с помощью условий (6) и (7).

Теперь необходимо найти $u_j(x,y)$ $(j=1,2)$ в области D_j, пользуясь оставшимися условиями (4), (5) и условиями склеивания (2) и (3). Для этого найдем функциональные соотношения между $\tau_j'(x)$ и $\nu_j(x)$.

Подставляя (18) в (5), а затем, дифференцируя по x, имеем

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\frac{1}{2}\psi_1'\left(\frac{x-1}{2}\right)-H(x), \tag{23}$$

где

$$H(x)=\frac{1}{2}\int\limits_x^{-1}\omega_2\left(\frac{\xi-x}{2}\right)\exp\left[-\frac{b(\xi+x)}{2a}\right]d\xi.$$

Решение уравнения (13) удовлетворяющее граничным условиям

$$\upsilon_1(x,y)|_\sigma=\varphi(x,y)-\omega_1(y),\quad \upsilon_{1y}(x,+0)=\nu_1(x),\ \ x\in(-1,1),\quad y\in[0,1] \tag{24}$$

в области D_1 дается формулой:

$$\upsilon_1(x,y)=\int\limits_{-1}^{1}G(t,0;x,y)\nu_1(t)dt+\int\limits_{\sigma_0}\frac{\partial G(\xi(s),\eta(s);x,y)}{\partial n}\left[\varphi^*(s)-\omega_1(\xi(s))\right]ds, \tag{25}$$

где $\varphi^*(s)=\varphi(\xi(s),\eta(s))$ – известная функция, а $G(\xi,\eta;x,y)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r\,r_1}-\ln\frac{1}{\rho^2\, r_2\, r_3}\right]$ – функции Грина для уравнения Лапласа, удовлетворяющая однородному условию (4) и $\upsilon_{1y}(x,+0)=0$:

$$\sigma_0:\ \ x^2+y^2=1,\quad r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,\quad r_1^2=(x-\xi)^2+(y+\eta)^2,\quad \rho^2=x^2+y^2,$$

$$r_2^2=(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2,\quad r_3^2=(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}+\eta)^2,\quad \bar{x}=\frac{x}{\rho^2},\quad \bar{y}=\frac{y}{\rho^2}.$$

Положив в (25) $y=0$, дифференцируя по x, получим

$$\tau_1'(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right]\nu_1(t)dt+g_1'(x),\ \ -1<x<1, \tag{26}$$

где

$$g_1(x)=\int\limits_{\sigma}\frac{\partial G(\xi(s),\eta(s);x,0)}{\partial n}\left[\varphi^*(s)-\omega_1(\xi(s))\right]ds,$$

$$\tau_1(x)=\upsilon_1(x,+0). \tag{27}$$

В силу (17), (24) и (27) из (2), (3) находим

$$\tau_2(x)=\alpha(x)\tau_1(x)+\beta(x),\quad (x,0)\in\overline{AB}, \tag{28}$$

$$\nu_2(x)=\gamma(x)\nu_1(x)+\delta(x),\quad (x,0)\in AB. \tag{29}$$

Подставляя (28) и (29) в (23), получим

$$\alpha'(x)\int\limits_{-1}^{x}\tau_1'(t)\,dt+\alpha(x)\tau_1'(x)+\beta'(x)-\gamma(x)\nu_1(x)-\delta(x)=\frac{1}{2}\psi_1'\left(\frac{x-1}{2}\right)-H(x). \tag{30}$$

Исключив $\tau_1'(x)$ из (26) и (30), получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\nu_1(x)$:

$$\nu_1(x)-\frac{P(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right]\nu_1(t)dt=\int\limits_{-1}^{1}M(x,t)\nu_1(t)dt\ +H_1(x), \tag{31}$$

где

$$P(x)=\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)},\ \ M(x,t)=-\frac{\alpha'(x)}{\pi\,\gamma(x)}\int\limits_{-1}^{x}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{z}{1-t\,z}\right]dz,$$

$$H_1(x) = -\frac{1}{\gamma(x)}\left\{\frac{1}{2}\psi_1'\left(\frac{x-1}{2}\right) - H(x) - \beta'(x) + \delta(x)\right\}.$$

Сингулярное интегральное уравнение (31) методом регуляризации Карлемана–Векуа [2] эквивалентным образом сведем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно $\nu_1(x)$, безусловная разрешимость которого следует из леммы:

Лемма. Если выполнено условие

$$\alpha(x)\gamma(x) > 0,\ \forall x \in [-1,1], \tag{32}$$

то в области D решение поставленной задачи единственно.

Доказательство леммы. Пусть $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv \psi_3(x) \equiv \varphi(x,y) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv \delta(x) \equiv 0$, тогда из ($15_1$), (21) и (22) находим $\omega_1(x) = 0$, $x \in [-1,1]$. Отсюда в силу (12)–(14) поставленная задача редуцируется в области D к задаче: $u_1(x,y)|_\sigma = 0$, $0 \le y \le 1$,

$$u_2(x,y)\big|_{AC} = 0,\ \ -1 < x < 0, \qquad \left.\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = 0,\ \ -1 \le x \le 0, \qquad \left.\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial n}\right|_{BC} = 0,\ \ 0 < x < 1.$$

Из принципа экстремума[11] следует, что решение поставленной задачи при $\psi_1(x) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv \delta(x) \equiv 0$ своего положительного максимума (ПМ) и отрицательного минимума (ОМ) в замкнутой области $\bar{D}_1$ достигает лишь на $\bar{\sigma}$. Действительно, в силу принципа экстремума для эллиптических уравнений [11, стр. 25] решение $u(x,y)$ уравнения (13) внутри области D_1 не может достигать своего ПМ и ОМ. Покажем, что решение $u(x,y)$ уравнения (13) не достигает своего ПМ (ОМ) на интервалах AB. Предположим обратное. Пусть $u(x,y)$ в некоторой точке $E(x_0,0)$ интервала AB достигает своего ПМ (ОМ). Тогда в силу принципа Заремба–Жиро [11] в точке $E(x_0,0)$ имеем

$$\nu_1(x_0) < 0 (\nu_1(x_0) < 0). \tag{33}$$

Далее в силу $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv \psi_3(x) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv \delta(x) \equiv 0$ с учетом (12), (21), (22), (28), (29) и (32) из (23) в точке $E(x_0,0) \in AB$ ПМ (ОМ) имеем $\gamma(x_0)\nu_1(x_0) > 0\ (\gamma(x_0)\nu_1(x_0) < 0)$. Это противоречит неравенству (33).

Таким образом, в силу (12) решение $u(x,y)$ поставленной задачи не достигает своего ПМ (ОМ) в точке $(x_0,0) \in AB$.

Следовательно, искомое решение своего ПМ (ОМ) в области $\bar{D}_1$ достигает в точках кривой $\bar{\sigma}$.

Отсюда с учетом $u_1(x,y)|_\sigma = 0$ имеем $u_1(x,y) \equiv 0$ в области $\bar{D}_1$. В силу единственности решения задачи Коши в области D_2 для уравнения (14) получим $u_2(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{D}_2$. Следовательно, из (12) следует $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{D}$. Тем самым решение поставленной задачи единственно. ***Лемма доказана.***

На основании найденных функций $\omega_j(x) \in C(\overline{AB}) \cap C^2(AB)$, $\tau_j(x) \in C(\overline{AB}) \cap C^2(AB)$ и $\nu_j(x) \in C^2(AB)$, $(j = 1,2)$ решение поставленной задачи строится в области D_1 как решение задачи N для уравнения (13) (см. (25)), а в области D_2 находится с помощью решения задачи Коши для уравнения (14) (см.(18)). Из последнего следует, что поставленная задача в области D однозначно разрешима. ***Теорема доказана.***

Литература

1. Бицадзе, А.В. К теории уравнений смешанно-составного типа / А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинов // Сибирский математический журнал. – 1961. – Т. 2, № 1. – С. 7–19.

2. Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно-составного типа / М.С. Салахитдинов. – Ташкент: Фан, 1974. – 156 с.

3. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа / Т.Д. Джураев – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.

4. Chen, S.X. Mixed type equations in gas dynamics / S.X. Chen // Quarterly of applied mathematics. – 2010. – Vol. LXVIII, no. 3. – P. 487–511.

5. Кожанов, А.И. Смешанная задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка / А.И. Кожанов // Матем. сборник. – 1982. – Т. 118(160), № 4(8). – С. 504–522.

6. Джураев, Т.Д. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа / Т.Д. Джураев, М. Мамажанов // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 37–50.

7. Сабитов, К.Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с условиями периодичности. / К.Б. Сабитов, Г.Ю. Удалова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 3(32). – С. 29–45.

8. Джохадзе, О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка / О.М. Джохадзе // Матем. заметки. – 2003. – Т. 4, Вып. 4. – С. 517–528.

9. Зикиров, О.С. О разрешимости нелокальной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка / О.С. Зикиров // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. – 2016. – Т. 16, № 2. – С. 16–25.

10. Islomov B.I. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type / B.I. Islomov, B.Z. Usmonov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, no. 1. – P. 32–38.

11. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

Поступила в редакцию 22 февраля 2020 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2020, vol. 12, no. 3, pp. 22–28

DOI: 10.14529/mmph200303

LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF THIRD-ORDER ELLIPTIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION

***B.I. Islomov*[1]*, B.Z. Usmonov*[2]**
[1] *National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Republic of Uzbekistan*
E-mail: islomovbozor@yandex.com
[2] *Chirchiq State Pedagogical Institute, Chirchiq, Republic of Uzbekistan*
E-mail: bakhtiyer.usmanov@mail.ru

In recent years, non-classical equations of mathematical physics have been attracting more and more attention of specialists; this is due to both theoretical and practical interest. Third-order equations are found in various problems of physics, mechanics, and biology. For example, in the theory of transonic flows, the propagation of plane waves in a viscoelastic solid, and the prediction and regulation of groundwater.

One of the important classes of non-classical equations of mathematical physics is the equations of composite and mixed-composite type, which the main parts contain operators of elliptic, elliptic-hyperbolic and parabolic-hyperbolic types. Correct boundary value problems for equations of elliptic-hyperbolic and parabolic-hyperbolic types of the third order, in case that the main part of the operator contains the derivative with respect to x or y, is first studied by A.B. Bitsadze, M.S. Salakhitdinova and T.D. Djuraev, in addition to the fact that these equations are found in various problems of mechanics. For example, the propagation of a plane wave in a viscoelastic solid. In these works on the investigation of boundary value problems, a representation of general solution of a mixed-composite type equation in the form of a sum of functions was used. Such representation takes place only for equations, which are composed of the product of permutable differential operators.

In this paper, we study boundary value problem for a third-order equation with an elliptic-hyperbolic operator in the main part. The equation under consideration is composed of the product of non-permutable differential operators, therefore the well-known representations of the general solution introduced by A.V. Bitsadze and M.S. Salakhitdinova are not applied. To study the considered third-order equation of the mixed type, we applied a method, which does not require a special representation of the general solution of the equation. This method determines the study of an equation of elliptic-hyperbolic type of the second order with unknown right-hand sides, which is of interest for solving important inverse problems of mechanics and physics.

The existence and uniqueness theorems of the classical solution of the problem are proved. The proof is based on the extremum principle for a third-order equation and on the theory of singular and Fredholm integral equations.

Keywords: local problem; third-order equations; inverse problem; extremum principle; regularization method; Fredholm equations.

References

1. Bitsadze A.V., Salakhitdinov M.S. K teorii uravneniy smeshanno-sostavnogo tipa (To the theory of equations of mixed-composite type). *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 1961, Vol. 2, no. 1, pp. 7–19. (in Russ.).

2. Salakhitdinov M.S. *Uravneniya smeshanno-sostavnogo tipa* (Equations of mixed-composite type), Tashkent, Fan Publ., 1974, 156 p. (in Russ.).

3. Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipa* (Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite type). Tashkent, Fan Publ., 1979, 238 p. (in Russ.).

4. Chen S.X. Mixed type equations in gas dynamics. *Quarterly of applied mathematics*, 2010, Vol. LXVIII, no. 3, pp. 487–511. DOI:10.1090/S0033-569X-2010-01164-9

5. Kozhanov A.I. A mixed problem for some classes of nonlinear third-order equations. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, Vol. 46, no. 4, pp. 507–525. DOI: 10.1070/SM1983v046n04ABEH002949

6. Dzhuraev T.D., Mamazhanov M. Well-posed formulation of boundary value problems for a class of third-order equations of parabolic-hyperbolic type. *Differ. Uravn.*, 1983, Vol. 19, no. 1, pp. 37–50. (in Russ.).

7. Sabitov K.B., Udalova G.Yu. Boundary value problem for mixed type equation of the third order with periodic conditions. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.), 2013, Iss. 3(32), pp. 29–45. (in Russ.).

8. Dzhokhadze O.M. Influence of Lower Terms on the Well-Posedness of Characteristics Problems for Third-Order Hyperbolic Equations. *Mat. Zametki*, 2003, Vol. 74, Iss. 4, pp. 517–528.

9. Zikirov O.S. On Solvability Non-Local Boundary Vakue Problem for the Hyperbolic Equation of the Third Order. *Sibirskiy zhurnal chistoy i prikladnoy matematiki*, 2016, Vol. 16, no. 2, pp. 16–25. (in Russ.).

10. Islomov B.I., Usmonov B.Z. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, no. 1, pp. 32–38. DOI: 10.1134/S1995080220010060

11. Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* (Some classes of partial differential equations). Moscow, Nauka Publ., 1981, 448 p. (in Russ.).

Received February 22, 2020