УДК 517.984.5 **DOI: 10.14529/mmp200211**

О КОНЕЧНОМ СПЕКТРЕ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А.М. Ахтямов, Башкирский государственный университет, г. Уфа, Российская Федерация

Статья посвящена решению одной из проблем Джона Локкера, а именно вопросу, может ли краевая задача для дифференциального уравнения иметь конечный спектр. На задачи такого рода можно смотреть и как на обратные задачи определения коэффициентов дифференциального уравнения по заданному спектру. В работе показано, что если дифференциальное уравнение не имеет кратных корней характеристического уравнения, то тогда спектр соответствующей трехточечной краевой задачи не может быть конечным. Доказательство теоремы основано на том, что соответствующий характеристический определитель представляет собой целую функцию класса K, а так же результатах В.Б. Лидского и В.А. Садовничего, из которых следует, что количество корней характеристического уравнения (если они есть) бесконечно. Если же корни характеристического уравнения являются кратными, то спектр может быть конечным. Более того, существуют краевые задачи с наперед заданным конечным спектром.

Ключевые слова: трехточечная краевая задача; проблема Джона Локкера; конечный спектр; бесконечный или пустой спектр.

Введение

Постановка задачи, рассмотренной в статье, восходит к работе Джона Локкера, посвященной исследованию того, может ли двухточечная краевая задача иметь конечный спектр [1].

Рассмотрим двухточечную краевую задачу с дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} + a_1(x,\lambda)\, y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x,\lambda)\, y' + a_n(x,\lambda)\, y = 0, \qquad x \in [0,1] \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n} b_{jk}\, y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n} b_{j\,k+n}\; y^{(k)}(1) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

где $\operatorname{rank} ||b_{jk}||_{n\times 2n} = n$, функции $a_q(x,\lambda)$ $(q = 1,\dots,n)$ являются непрерывными от x на отрезке [0,1] и полиномами от параметра λ, $b_{jk} \in \mathbb{C}$.

Известно [2, с. 27], что для спектра задачи (1), (2) имеют место следующие две возможности: 1) существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих предельных точек в $\mathbb{C}$; 2) каждое $\lambda \in \mathbb{C}$ есть собственное значение.

Достаточно хорошо изучены прямые и обратные задачи для двухточечных краевых задач, когда спектр состоит из бесконечного числа собственных значений [3, 4]. Краевые задачи (1), (2), спектр которых полностью заполняет всю плоскость или конечен, изучены меньше. Так, в работах [1, 5] были приведены примеры краевых задач с дифференциальным уравнением четного порядка, спектр которых полностью заполняет всю плоскость, и поставлен вопрос: существуют ли двухточечные краевые задачи с дифференциальным уравнением нечетного порядка, спектр которых полностью заполняет всю плоскость? Примеры таких краевых задач были приведены в [6]. А в 2008 году в работах [7, с. 556] и [1] было показано, что конечного спектра для операторов дифференцирования второго и четвертого порядка с различными корнями характеристического уравнения и соответствующими краевыми условиями (2) быть не может.

В работе [1] была поставлена проблема: может ли краевая задача

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = \lambda\, y(x), \qquad x \in [0,1] \tag{3}$$

с краевыми условиями (2) иметь конечный спектр? В том же году Т.Ш. Кальменовым и Д. Сураганом [8] было доказано, что спектр *регулярных* краевых задач с частными производными, в том числе и задач (3), (2),есть либо пустое, либо бесконечное множество. Этот же результат верен и для одного общего класса задач (1), (2). В [9] показано, что если для задачи (3), (2) с дифференциальным уравнением второго порядка характеристическое уравнение не имеет кратных корней, то эта краевая задача не может иметь иметь конечного вещественного спектра. Доказана более общая теорема для краевой задачи (1), (2): *Если функции $a_q(x,\lambda)$ имеют вид*

$$a_q(x,\lambda) = \lambda^q \sum_{j=0}^{q} \lambda^{-j}\, a_{qj}(x), \quad a_{q0}(x) = a_{q0} \cdot r(x), \qquad r(x) > 0, \quad q = 1, 2, \ldots, n,$$

а полином $\pi(\omega) = \omega^n + a_{10}\,\omega^{n-1} + \cdots + a_{q0}$ не имеет кратных корней, то спектр краевой задачи (1), (2) представляет собой либо пустое, либо бесконечное множество.

В [9] приведены примеры краевых задач (1), (2) с конечным спектром с дифференциальным уравнением второго порядка, характеристическое уравнение которого имеет кратные корни. В настоящей работе автор рассматривает трехточечную краевую задачу. Задачи на собственные значения с трехточечными граничными условиями с бесконечным спектром достаточно хорошо изучены (например, см. [10–16]). Задачи на собственные значения с трехточечными граничными условиями с конечным спектром не изучались.

1. Бесконечный или пустой спектр

Рассмотрим целую функцию $f(z)$, которая при каждом целом h допускает представление вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z}\, P_{k,h}(z), \tag{4}$$

где α_k – комплексные постоянные, а

$$P_{k,h}(z) = z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{h} \beta_\nu^{(\nu)}\, z^{-\nu} + o\left(z^{n_k - h}\right), \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

В предыдущей формуле n_k – некоторое целое число, а $\beta_0^{(k)} \neq 0$.

Предполагается, что плоскость z можно покрыть конечным числом открытых секторов, содержащих начало координат, в каждом из которых функции $P_{k,h}(z)$ являются аналитическими при $|z| > R$.

Мы будем предполагать, что представление $P_{k,h}(z) \equiv z^{n_k} \sum\limits_{\nu=0}^{h} \beta_\nu^{(\nu)} z^{-\nu}$ допускает почленное дифференцирование. Функции вида (4) с описанными выше свойствами условимся называть *функциями класса К.*

Теорема 1. *Рассмотрим трехточечную задачу для дифференциального уравнения (1). Если функции $a_q(x,\lambda)$ имеют вид*

$$a_q(x,\lambda) = \lambda^q \sum_{j=0}^{q} \lambda^{-j}\, a_{qj}(x), \quad a_{q0}(x) = a_{q0}\cdot r(x), \qquad r(x) > 0, \quad q = 1, 2, \ldots, n,$$

а полином $\pi(\omega) = \omega^n + a_{10}\,\omega^{n-1} + \cdots + a_{q0}$ не имеет кратных корней, то спектр краевой задачи (1), (2) представляет собой либо пустое, либо бесконечное множество.

Доказательство. Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2), удовлетворяющей условиям теоремы 1, является целой функцией класса К. Из работ В.Б. Лидского и В.А. Садовничего [17, 18] вытекает, что количество корней (если они есть) характеристического определителя задачи (1), (2) бесконечно и, если характеристический определитель не тождественен нулю, имеет асимптотические представления, выписанные в работах [17, 18]. □

2. Конечный спектр

Рассмотрим следующую трехточечную краевую задачу:

$$y'''(x) - 3\,d(\lambda)\,y''(x) + 3\,d^2(\lambda)\,y'(x) - d^3(\lambda)\,y(x) = 0, \tag{5}$$

$$y'(0) = y\left(\frac{1}{2}\right) = y(1) = 0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n – некоторые комплексные числа. Существует краевая задача (5), (6), такая что спектр этой задачи состоит только из наперед заданных чисел λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n.*

Доказательство. Обозначим $(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\ldots\,(\lambda - \lambda_n)$ через $p(\lambda)$, а $(4\,p(\lambda) + 3)$ через $d(\lambda)$. Линейно независимыми решениями уравнения (5) являются функции

$$y_1(x,\lambda) = e^{d(\lambda)\,x}, \quad y_2(x,\lambda) = x\,e^{d(\lambda)\,x}, \quad y_3(x,\lambda) = x^2\,e^{d(\lambda)\,x}.$$

Поэтому общим решением уравнения (5) будет функция:

$$y(x,\lambda) = C_1\,e^{d(\lambda)\,x} + C_2\,x\,e^{d(\lambda)\,x} + C_3\,x^2\,e^{d(\lambda)\,x}.$$

Подставив эту функцию в (6), получим следующий характеристический определитель:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} d(\lambda) & 1 & 0 \\ e^{\frac{d(\lambda)}{2}} & \frac{1}{2}\,e^{\frac{d(\lambda)}{2}} & \frac{1}{4}\,e^{\frac{d(\lambda)}{2}} \\ e^{d(\lambda)} & e^{d(\lambda)} & e^{d(\lambda)} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}\,d(\lambda) - \frac{3}{4}\right)\,e^{\frac{3\,d(\lambda)}{2}} = p(\lambda)\,e^{\frac{3\,d(\lambda)}{2}}.$$

Поскольку экспонента не обращается в нуль, то корнями характеристического определителя являются корни полинома $p(\lambda)$, т.е. значения λ_1, λ_2, ..., λ_n. Значит, спектр краевой задачи (5), (6) состоит только из наперед заданных чисел λ_1, λ_2, ..., λ_n. $\square$

На задачу определения наперед заданного спектра для трехточечной задачи (5), (6) можно смотреть и как на обратную задачу определения коэффициента $d(\lambda)$ уравнения (5) по заданным собственным значениям λ_1, λ_2, ..., λ_n задачи (5), (6). Из доказательства теоремы следует, что решением задачи будет

$$d(\lambda) = 4\,p(\lambda) + 3, \quad \text{где} \quad p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\ldots\,(\lambda - \lambda_n).$$

Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0088) и грантами РФФИ (проекты 18-51-06002-Аз_ а, 18-01-00250-а).

Литература

1. Locker, J. Eigenvalues and Completeness for Regular and Simply Irregular Two-Point Differential Operators / J. Locker. – Providence: American Mathematical Society, 2008.
2. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969.
3. Ширяев, Е.А. Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы / Е.А. Ширяев, А.А. Шкаликов // Математические заметки. – 2007. – Т. 81, № 4. – С. 636–640.
4. Sadovnichii V.A. General Inverse Sturm–Liouville Problem with Symmetric Potential / V.A. Sadovnichii, Ya.T. Sultanaev, A.M. Akhtyamov // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2015. – V. 5, № 2. – P. 96–108.
5. Садовничий, В.А. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями / В.А. Садовничий, Б.Е. Кангужин // Доклады Академии наук СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 310–313.
6. Ахтямов, А.М. О спектре дифференциального оператора нечетного порядка / А.М. Ахтямов // Математические заметки. – 2017. – Т. 101, № 5. – С. 643–646.
7. Lang, P. Spectral theory of Two-Point Differential Operators Determined by D^2. Spectral properties / P. Lang, J. Locker // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1989. – V. 146, № 1. – P. 538–558.
8. Кальменов, Т.Ш. Определение структуры спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений методом антиаприорных оценок В.А. Ильина / Т.Ш. Кальменов, Д. Сураган // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 423, № 6. – С. 730–732.
9. Ахтямов, А.М. О конечности спектра краевых задач / А.М. Ахтямов // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 138–140.
10. Zhongmin Sun. Positive Solutions of Singular Third-Order Three-Point Boundary Value Problems / Zhongmin Sun // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2005. – V. 306. – P. 589–603.
11. Wong, P.J.Y. Eigenvalues of a General Class of Boundary Value Problem with Derivative-Dependent Nonlinearity / P.J.Y. Wong // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – V. 259. – P. 908–930.
12. Zhongmin Sun. Multiple Positive Solutions to Third-Order Three-Point Singular Semipositone Boundary Value Problem / Zhongmin Sun, Suoquan Ren, Zhenlin Wu, Huabin Zhang // International Journal of Engineering and Manufacturing. – 2004. – V. 114. – P. 409–422.

13. Anderson, D. Multiple Solutions and Eigenvalues for Third-Order Right Focal Boundary Value Problems / D. Anderson, J.M. Davis // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – V. 267. – P. 135–157.
14. Hopkins, W. Some Convergent Developments Associated with Irregular Boundary Conditions / W. Hopkins // Transactions of the American Mathematical Society. – 1919. – V. 20. – P. 249–259.
15. Minghe Pei. Solvability of n-th Order Lipschitz Equations with Nonlinear Three-Point Boundary Conditions / Minghe Pei, Sung Kag Chang // Boundary Value Problems. – 2014. – V. 1. – P. 183–197.
16. Sansone, G. Sopra una famiglia di cubiche con infiniti punti razionali / G. Sansone // Rendiconti Istituto Lombardo. – 1929. – V. 62, № 2. – P. 354–360. (in Italian)
17. Лидский, В.Б. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций / В.Б. Лидский, В.А. Садовничий // Функциональный анализ и его приложения. – 1967. – Т. 1, № 2. – С. 52–59.
18. Лидский, В.Б. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций / В.Б. Лидский, В.А. Садовничий // Математический сборник. – 1968. – Т. 75, № 4. – С. 558–566.

Азамат Мухтарович Ахтямов, доктор физико-математических наук, профессор, Башкирский государственный университет (г. Уфа, Российская Федерация), AkhtyamovAM@mail.ru.

Поступила в редакцию 15 ноября 2019 г.

MSC 34B45, 47E05 **DOI: 10.14529/mmp200211**

ON THE FINITE SPECTRUM OF THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS

A.M. Akhtyamov, Bashkir State University, Ufa, Russian Federation, AkhtyamovAM@mail.ru

The article is devoted to the solution of one of John Locker's problems, namely, to clarify whether boundary-value problem can have a finite spectrum. It is shown that if a differential equation does not have multiple roots of the characteristic equation, then the spectrum of the corresponding three-point boundary value problem cannot be finite. The proof of the theorem is based on the fact that the corresponding characteristic determinant is an entire function of class K and the results of V.B. Lidsky and V.A. Sadovnichy, from which it follows that the number of its roots (if any) of an entire function of class K is infinite and, if the characteristic determinant is not identical to zero, has asymptotic representations written out in the works of V.B. Lidsky and V.A. Gardener. If the roots of the characteristic equation are multiple, then the spectrum can be finite. Moreover, there are boundary value problems with a predetermined finite spectrum. The problems of determining the finite spectrum from a predetermined finite spectrum can be viewed as the inverse problems of determining the coefficients of a differential equation from a given spectrum.

Keywords: three-point boundary value problem; John Locker problem; finite spectrum; infinite or empty spectrum.

References

1. Locker J. *Eigenvalues and Completeness for Regular and Simply Irregular Two-Point Differential Operators*. Providence, American Mathematical Society, 2008.
2. Naimark M.A. *Lineinye Differentsialnye Operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969. (in Russian)
3. Shiryaev E.A., Shkalikov A.A. Regular and Completely Regular Differential Operators. *Mathematical Notes*, 2007, vol. 81, no. 4, pp. 566–570.
4. Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. General Inverse Sturm-Liouville Problem with Symmetric Potential. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 2015, vol. 5, no. 2, pp. 96–108.
5. Sadovnichii V.A., Kanguzhin B.E. [On the Relation Between the Spectrum of a Differential Operator with Symmetric Coefficients and Boundary Conditions]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1982, vol. 267, no. 2, pp. 310Ц313. (in Russian)
6. Akhtyamov A.M. On the Spectrum of an Odd-Order Differential Operator. *Mathematical Notes*, 2017, vol. 101, no. 5, pp. 755–758.
7. Lang P. Spectral theory of Two-Point Differential Operators Determined by D^2. I. Spectral properties. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1989, vol. 146, no. 1, pp. 538–558.
8. Kal'menov T.Sh., Suragan D. Determination of the Structure of the Spectrum of Regular Boundary Value Problems for Differential Equations by V.A. Il'in's Method of Anti-A'Priori Estimates. *Doklady Mathematics*. 2008, vol. 78, no. 3, pp. 913–915.
9. Akhtyamov A.M. Finiteness of the Spectrum of Boundary Value Problems. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 142–144.
10. Zhongmin Sun. Positive Solutions of Singular Third-Order Three-Point Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, vol. 306, pp. 589–603.
11. Wong P.J.Y. Eigenvalues of a General Class of Boundary Value Problem with Derivative-Dependent Nonlinearity. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 259, pp. 908–930.
12. Zhongmin Sun, Suoquan Ren, Zhenlin Wu, Huabin Zhang. Multiple Positive Solutions to Third-Order Three-Point Singular Semipositone Boundary Value Problem. *International Journal of Engineering and Manufacturing*, 2004, vol. 114, pp. 409–422.
13. Anderson D., Davis J.M. Multiple Solutions and Eigenvalues for Third-Order Right Focal Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, vol. 267, pp. 135–157.
14. Hopkins W. Some Convergent Developments Associated with Irregular Boundary Conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1919, vol. 20, pp. 249–259.
15. Minghe Pei, Sung Kag Chang. Solvability of n-th Order Lipschitz Equations with Nonlinear Three-Point Boundary Conditions. *Boundary Value Problems*, 2014, vol. 1, pp. 183–197.
16. Sansone G. Sopra una famiglia di cubiche con infiniti punti razionali. *Rendiconti Istituto Lombardo*, 1929, vol. 62, no. 2, pp. 354–360. (in Italian)
17. Lidskii V.B., Sadovnichii V.A. Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions. *Konstruktivnaya Teoriya Funktsii i Funktsional'nyi Analiz*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 52–59.
18. Lidskii V.B., Sadovnichii V.A. Asymptotic Formulas for the Roots of a Class of Entire Functions. *Sbornik: Mathematics*, 1968, vol. 75, no. 4, pp. 558–566.

Received November 15, 2019