

УДК 624.042.8:534.1

## ОЦЕНКА ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ КАРКАСА

*А.Н. Потапов, С.В. Штурмин*

Предложен подход к расчету статически неопределимых рам с учетом пластических зон (ПЗ) методом перемещений (МП) с использованием диаграммы материала с упрочнением. Приведен алгоритм, позволяющий в сейсмостойком каркасе преобразовать ПЗ в пластические зоны равного сопротивления (ПЗРС). Введены две упрощающие предпосылки, с помощью которых моделируется напряженно-деформированное состояние в упругопластической и пластической зоне. При заданной длине ПЗ записываются инкрементальные уравнения МП, устанавливающие связи между приращением изгибающих моментов и приращением нагрузки. На каждой ступени нагружения определяются длина ПЗ и соответствующая предельная нагрузка.

Ключевые слова: метод перемещений, предел текучести, напряжение, пластическая зона, изгибающий момент, жесткость.

Учет упругопластических деформаций в строительных конструкциях проводится, обычно, в рамках теории предельного равновесия [1]. В научной литературе понятие ПЗ используется, главным образом, в сейсмостойком строительстве [2–4] при проектировании железобетонных [5, 6] и металлических [7, 8] конструкций, где эти зоны рассматриваются как зоны равного сопротивления [9].

В статье [10] предложен новый подход к расчету статически неопределимых рам МП, основанный на нелинейном деформировании материала по диаграмме с упрочнением. Помимо чисто упругой зоны (УЗ), этот подход учитывает наличие трех зон: ПЗ; упругопластической зоны (УПЗ), занимающей промежуточное положение между УЗ и ПЗ; зоны усиления (ЗУ), расположенной между узлом конструкции и ПЗ с целью исключения пластических деформаций в приузловом участке и обеспечения надежной работы узла. В соответствии с допущениями, принятыми в [10], жесткость УПЗ моделируется величиной  $kEJ$ , где коэффициент  $k \in [1; k_0]$ ,  $k_0 = E_0 / E$  ( $E_0$  – модуль упрочнения).

В данной статье принята более совершенная модель жесткости УПЗ. В силу квадратичного закона изменения высоты упругого слоя в пределах

длины  $d$  УПЗ:  $y = f(x_1) = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{x_1}{d}}$  ( $x_1 \in [0; d]$ ) [11] (рис. 1), модуль упругости

$E_x$  участка принимается пропорциональным отношению высоты упругого ядра к высоте сечения:

$$E_x = E \sqrt{\frac{x_1}{d}} \quad (x_1 \in [0; d]). \quad (1)$$

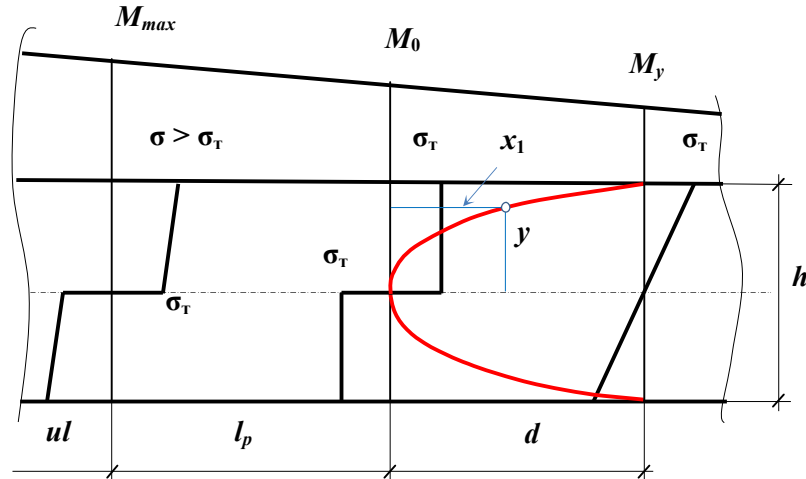


Рис. 1. Пластическая и упругопластическая зоны

Приняты следующие допущения:

1. Деформирование волокон УПЗ длиной  $d$  происходит без упрочнения материала с модулем упругости, подчиняющимся зависимости (1). На границах УПЗ изгибающие моменты соответствуют предельно-упругому  $M_y$  и предельно-пластическому  $M_0$  моментам.

2. Деформирование всех волокон ПЗ длиной  $l_p$  происходит с постоянным модулем упрочнения  $E_0$ .

Стандартные статически неопределимые балки со схемами закрепления: «заделка – шарнир» и «заделка – заделка» в отличие от классического варианта МП рассчитываются на единичные и грузовые воздействия с учетом дополнительных параметров. К этим параметрам относятся относительная длина ПЗ  $\alpha = l_p / l$ , ее расположение в пролете, модуль упрочнения, закон изменения момента инерции сечения в пределах длины ПЗ с целью обеспечения ПЗРС и др. Тогда расчетные характеристики кроме известных коэффициентов будут содержать безразмерные функции  $f_j(\alpha)$ , характеризующие нелинейную работу балки.

Расчет рамы состоит из двух самостоятельных этапов (упругого и пластического).

Упругий этап расчета:

- построение эпюры изгибающих моментов  $M$  от действия силы  $F$ ;
- определение соотношения  $m = M_e / M_{\max}$  для опасного сечения с  $M_{\max}$ ;
- построение эпюры  $M_{el} = mM$  и вычисление нагрузки  $F_e = mF$ .

Пластический этап предваряет расчет УПЗ. Осуществляется переход от предельно-упругой эпюры  $M_{el}$  к эпюре  $M_p^{(0)}$ , содержащей в опасном сечении предельный пластический момент  $M_0$ . Эпюра  $M_p^{(0)}$  строится при  $l_p = 0$  и соответствует нагрузке  $F_0 > F_e$ .

Пластический этап расчета выполняется при заданной длине ПЗ  $l_p$  с применением метода последовательных нагружений [12]. Система разрешающих уравнений МП в приращениях имеет вид:

$$K(\alpha_{i-1})dZ^{(i)} + dR_F^{(i-1)} = 0, \quad (2)$$

$$dM_p^{(i)} = \bar{M}(\alpha_{i-1}) \cdot dZ^{(i)} + dM_F^{(i-1)}, \quad (3)$$

$$dZ^{(i)} = -[K(\alpha_{i-1})]^{-1} \cdot dR_F^{(i-1)}, \quad (4)$$

где:  $K(\alpha_{i-1})$  – матрица жесткости рамы с ПЗ на  $i-1$ -й ступени нагружения;  $dR_F^{(i-1)}$  – вектор реакций в основной системе МП, вызванных приращением нагрузки;  $dZ^{(i)}$  – вектор приращений перемещений.

$\bar{M}(\alpha_{i-1})$ ,  $dM_F^{(i-1)}$  – матрица моментов от единичных воздействий и вектор моментов от приращения нагрузки, полученные в основной системе МП.

Для каждой  $i$ -й ступени нагружения  $dF_0$  инкрементальные соотношения связывают эпюру приращений моментов  $dM_p^{(i)}$ , с вектором реакций  $dR_F^{(i-1)}$ . В каждой  $i$ -й итерации строятся: результирующая эпюра моментов, предельная нагрузка:

$$M_p^{(i)} = M_p^{(i-1)} + dM_p^{(i)}, \quad F_p^{(i)} = F_p^{(i-1)} + dF_0 \quad (5)$$

и длина ПЗ  $l_{pi}$ , для которой выполняется проверка условия:

$$(l_p - l_{pi}) \leq \text{eps}. \quad (6)$$

Пластический этап расчета:

1. Для 1-й ступени нагружения длина  $l_{p1}$  принимается по эпюре  $M_p^{(1)}$ , полученной в предположении линейного характера распределения усилий. После вычисления относительной длины  $\alpha_1 = l_{p1} / l$  и нелинейных функций  $f_j(\alpha_1)$  формируется матрица жесткости  $K(\alpha_1)$  канонических уравнений МП (2).

2. В  $i$ -й ступени из решения системы уравнений (2) находится вектор приращений перемещений (4) и строится эпюра приращений моментов (3).

3. По формулам (5) определяются результирующая эпюра моментов и предельная нагрузка.

4. По результирующей эпюре моментов вычисляются параметры  $l_{pi}$ ,  $\alpha_i$ ,  $f_j(\alpha_i)$ , составляющие основу для следующей ступени нагружения.

5. Процесс нагружения продолжается до тех пор, пока для найденной величины  $l_{pi}$  не выполнится условие (6).

Появление ПЗ создает угрозу проникновения нелинейных деформаций в узлы элементов конструкций. Для исключения этого фактора в концевых частях несущих элементов создают ЗУ длиной  $ul$  ( $u$  – относительная длина ЗУ) [9] (рис. 3).

На рис. 4 показаны силовые параметры в стандартной балке с опорными закреплениями «заделка – шарнир» при повороте заделки на единичный угол. Изгибающий момент  $M_A$  и поперечные силы  $Q_A, Q_B$  имеют вид

$$M_A = \frac{3EI}{l} \cdot \frac{1}{f_1}, Q_B = -Q_A = \frac{3EI}{l^2} \cdot \frac{1}{f_1}.$$

Безразмерная функция  $f_1(\alpha_i)$  получена для случая линейного закона момента инерции  $I_x = \frac{I \cdot x}{b_i l}$  ( $x \in [b_i l, vl]$ ):

$$f_1(\alpha_i) = \frac{(1-v^3)}{\xi} + \frac{3\alpha_i b_i (v - \frac{\alpha_i}{2})}{k_0} + mb_i^3 (6 - 4m + \frac{6}{5}m^2) + (b_i - vm)^3, \quad (7)$$

где  $\xi > 1$  – коэффициент ЗУ;  $b_i = (v - \alpha_i)$ ,  $\alpha_i = l_{pi} / l$ ;  $m = (1 - \frac{M_y}{M_0})$ .

В случае построения эпюры  $M_p^{(0)}$  функция (7) строится при  $\alpha_i = 0$ .

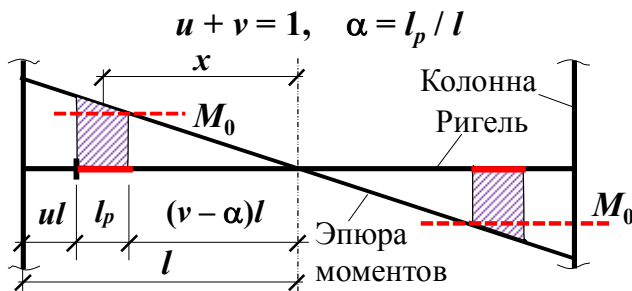


Рис. 3. ПЗ в ригеле сейсмостойкого

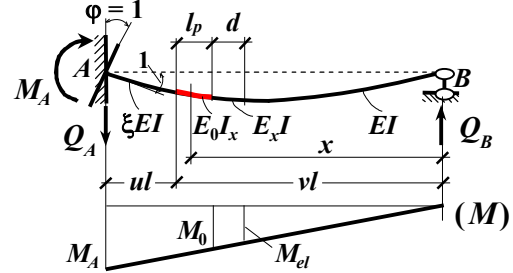


Рис. 4. Балка с ПЗРС при единичном повороте заделки

Подход иллюстрируется примером расчета 2-этажного стального каркаса на действие горизонтальных сил, моделирующих сейсмическое воздействие. Расчетная схема рамы показана на рис. 5.

Приняты следующие исходные данные каркаса:

- материал рамы – сталь С345;
- нагрузки и размеры  $F_1 = -0,3F$ ,  $F_2 = F$ ;  $l = 300$  см,  $h_1 = 1,9l$ ,  $h_2 = 1,6l$ ;
- ригель нижнего этажа – сварной двутавр  $h = 26$  см (полка – лист  $0,6 \times 8,5$  см; стенка – лист  $0,5 \times 24,8$  см:  $I = 2281$  см<sup>4</sup>;  $W = 175,5$  см<sup>3</sup>;  $W_0 = 1,16W$ );
- ригель верхнего этажа и стойки – сдвоенные швеллеры № 20;
- ПЗРС проектируются при  $u = 0,05$ ;  $\xi = 1,5$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $E_0 = 647,33$  МПа.

Коэффициенты и свободные члены системы уравнений (2) на  $i$ -й ступени нагружения имеют вид:

$$r_{11} = (6,121 + 3 \frac{1}{f_1}) \frac{EI}{l}, r_{12} = 1,661 \frac{EI}{l}, r_{13} = 0,906 \frac{EI}{l^2}, r_{14} = -3,115 \frac{EI}{l^2},$$

$$r_{22} = 7,31 \frac{EI}{l}, r_{23} = -r_{24} = -r_{14}, r_{33} = 6,219 \frac{EI}{l^2}, r_{34} = -3,894 \frac{EI}{l^3}, r_{44} = -r_{34};$$

$$R_{1dF} = R_{2dF} = 0, R_{3dF} = -0,15dF, R_{4dF} = 0,5dF.$$

Для длины ПЗ  $l_p = 2$  см напряжения в узле 1-го этажа равны:  $\sigma_3 = 282,8$  (295,4) <  $\sigma_T = 345$  МПа; напряжения  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T$ . В скобках даны напряжения для длины  $l_p = 14$  см.

На рис. 6 показана кривая предельных нагрузок (красный цвет) в зависимости от длин ПЗРС, полученных для квадратичного закона изменения модуля упругости на участке УПЗ с использованием формулы (1).

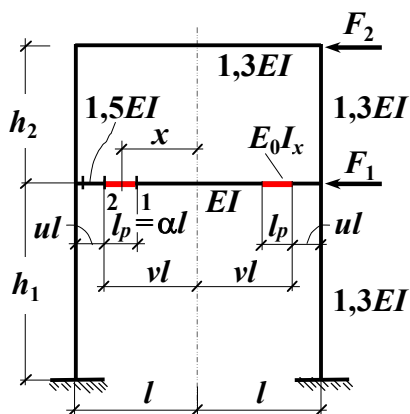


Рис. 5. Расчетная схема 2-этажного каркаса с ПЗРС в ригеле 1-го этажа

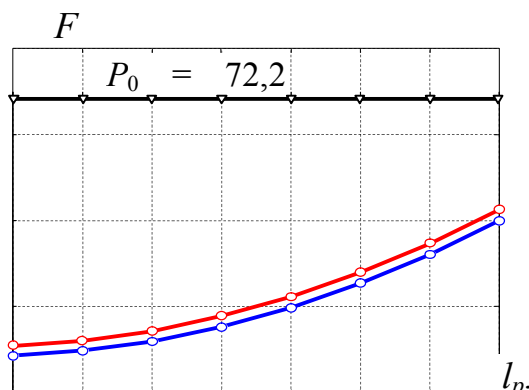


Рис. 6. Предельные нагрузки для соответствующих длин ПЗРС

Для сравнения дана кривая предельных нагрузок (синий цвет), построенных в соответствии с алгоритмом [10] в предположении идеальной упругой работы УПЗ при  $k = 1$ . Отличие предельных нагрузок составляет 1,5 % (для  $l_p = 2$  см) и 1,4 % (для  $l_p = 14$  см). Разрушающая нагрузка по методу предельного равновесия составила  $P_0 = 72,18$  кН (горизонтальная прямая).

### Выводы

1. Предложенный алгоритм упругопластического расчета статически неопределимых рам МП позволяет для заданной длины ПЗРС:

- давать реальную оценку величине предельной нагрузки;
- создавать более экономичные и надежные конструкции.

2. В приложениях метод может быть рекомендован при проектировании строительных конструкций в сейсмических районах.

3. В практических расчетах сейсмостойких каркасах пластические деформации в области УПЗ можно игнорировать.

4. Предложенный метод может быть использована в учебном процессе при изучении дисциплины «Нелинейные задачи строительной механики».

### Библиографический список

1. Гвоздев, А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / А.А. Гвоздев. – М.: Стройиздат, 1949. – 280 с.

2. СП 14.13330.2014. Строительство в сейсмических районах (Актуализированная редакция СНиП II-7-81\* «Строительство в сейсмических районах» (СП 14.13330.2011)).
3. ATC-40 Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings, California, USA, 1996. – 334 p.
4. Eurocode 8 (EUR 25204 EN – 2012): Seismic Design of Buildings. Worked examples. – 522 p.
5. Paulay, T. Shear Effect on Plastic Hinges of Earthquake Resisting Reinforced Concrete Frames, Structural Concrete under Seismic Actions / T. Paulay, I.N. Bull // Bulletin D, Information, Comite Euro-International du Beton, Paris. – 1979. – № 132. – P. 165–172.
6. Yuan, F. Effect of Load Cycling on Plastic Hinge Length in RC Columns / F. Yuan, Y.-F. Wu // Journal of Engineering Structures. – 2017. – Vol. 147. – P. 90–102. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.05.046>.
7. Co-rotational Planar Beam Element with Generalized Elasto-plastic Hinges / A. Alhasawi, P. Heng, M. Hjiiaj et al. // Journal of Engineering Structures. – 2017. – V. 151. – P. 188–205. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.07.085>.
8. Experimental and Analytical Study of Fully Prefabricated Damage-Tolerant Beam to Column Connection for Earthquake-Resilient Frame / K. Deng, D. Zheng, C. Yang, T. Xu // ASCE Journal of Structural Engineering. – 2019. – Vol. 145. – № 3. – 04018264(10). – URL: [https://doi.org/10.1061 / \(ASCE\)ST.1943-541X.0002270](https://doi.org/10.1061 / (ASCE)ST.1943-541X.0002270).
9. Пособие по расчету и конструированию стальных сейсмостойких каркасов многоэтажных зданий (в развитие СНиП РК 2.03-04-2001). Часть I., Мин-ва индустрии и торговли Респ. Казахстан (МИТ РК). – 2003. – С. 52.
10. Потапов, А.Н. Учет пластических деформаций в расчете рам методом перемещений / А.Н. Потапов, О.В. Карамышева, Р.А. Федас // Наука ЮУрГУ: материалы 71-й научной конференции. Секции технических наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – С. 132–139.
11. Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
12. Петров, В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В.В. Петров. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.

[К содержанию](#)