

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЕКТОРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В.И. Заляпин, В.С. Шалгин

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: zaliapinvi@susu.ru

Обсуждается динамическая система, описываемая системой линейных дифференциальных уравнений. Во многих случаях вместо истинного сигнала, который воспринимается измерительным устройством, на выходе наблюдается искажённый сигнал, существенно отличающийся по структуре, величине и по временным параметрам от истинного. Подобные искажения порождаются принципами работы измерительного устройства, шумами или помехами, содержащимися во входном сигнале, и искажениями, возникающими при работе самого устройства. В этих условиях одной из задач, представляющих значительный интерес для приложений, является т. н. обратная задача – восстановления входного сигнала по имеющейся информации (в том числе и косвенной) о сигнале на выходе системы и оценивание точности получаемых решений. Предлагается метод интегральных уравнений и его численная реализация, позволяющие эффективно восстанавливать входное воздействие на динамическую систему по косвенной экспериментальной информации.

Ключевые слова: линейная динамическая система; косвенные измерения; псевдорешение; система интегральных уравнений; регуляризация.

I. Постановка задачи

Пусть $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ – квадратная матрица n -го порядка, $f(t) = \|f_i(t)\|_{i=1}^n$, $x(t) = \|x_i(t)\|_{i=1}^n$ и $y(t) = \|y_j(t)\|_{j=1}^m$ – векторные функции.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка:

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t) \quad (1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты системы и её правые части определены и непрерывны на некотором промежутке $[a; b]$.

Пусть далее $T = \|t_{ij}\|$ – постоянная матрица формата $m \times n$, $m \geq 1$ и

$$y(t) = T \cdot x(t). \quad (2)$$

Матрицу T будем называть матрицей косвенных измерений.

Требуется, располагая косвенными измерениями (2), определить входное воздействие $f(t)$.

II. Согласованность измерений. Однозначная разрешимость задачи

Обозначим через $t^j = \|t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{jn}\|$, $j = 1, 2, \dots, m$ строки матрицы T . Если ранг матрицы T равен r , то можно выбрать ровно r линейно независимых строк этой матрицы и выразить $m - r$ оставшихся через них. Другими словами, существует постоянная матрица Λ формата $(m - r) \times r$ такая, что

$$\begin{pmatrix} t^{r+1} \\ t^{r+2} \\ \vdots \\ t^m \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^r \end{pmatrix}.$$

Здесь для определенности мы положили линейно независимыми первые r строк. При этом, в случае совместности системы косвенных измерений (2) измеренные в эксперименте функции $y(t) = \| y_j(t) \|_{j=1}^m$ должны быть связаны соотношениями:

$$\begin{pmatrix} y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которые мы называем *условиями согласованности измерений*.

Отсюда заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. Система косвенных измерений (2) совместна тогда и только тогда, когда наблюдаемые в эксперименте функции $y_j(t)$, $j=1, 2, \dots, m$ удовлетворяют условию (3).

Если при этом $r = n \leq m$ – система (2) имеет единственное решение, если же $r < n$ – бесконечное множество решений.

Простые рассуждения позволяют установить справедливость теоремы.

Теорема. У задачи нахождения правой части $f(t)$ системы (1), отвечающей косвенным измерениям (2) существует единственное решение тогда и только тогда, когда наблюдения дифференцируемы, ранг матрицы косвенных измерений равен размерности задачи ($r = n$) и выполнено условие согласованности измерений (3).

Если условие (3) не выполнено – решений нет, если выполнено и ранг матрицы косвенных измерений меньше размерности задачи – решений бесконечно много.

III. Регуляризация косвенных измерений

Как правило, в прикладных исследованиях условия сформулированной выше теоремы не выполняются и в этом случае с теоретической точки зрения поставленная задача восстановления входного сигнала решений не имеет либо таковых бесконечно много. Связано это обстоятельство с погрешностями, присущими всякому измерительному процессу. В этой ситуации на практике прибегают к некоторой модификации системы косвенных измерений (2) с целью добиться выполнения условий (3) и однозначности обращения системы (2). Достигается это за счет привлечения некоторой дополнительной информации о решениях системы (1) и/или за счет расширенного понимания процедуры обращения линейной системы (2).

Использование дополнительной априорной информации о системе – вопрос отдельного исследования, и его изучению посвящено множество работ (например, [1–3] и цитированная там литература).

Мы же остановимся здесь на расширении трактовки термина *решение системы линейных уравнений*, понимая под последним **нормальное псевдорешение** [4].

Напомним, что *нормальным псевдорешением* системы линейных уравнений $y = Tx$ называется вектор $x_{\text{норм}}$, такой, что

$$x_{\text{норм}} = \arg \min_{x=\arg \min \|y-Tx\|} \|x\|.$$

Известно [4], что нормальное псевдорешение всегда существует и единственно. Оно представимо в виде $x_{\text{норм}} = T^+ y$, где T^+ – матрица, псевдообратная [4] к матрице T .

Очевидно, что если y системы существует, по крайней мере, одно обычное решение, то нагрузка для него равна нулю и нормальным решением будет обычное решение с наименьшей нормой. Если же система однозначно разрешима, то нормальное псевдорешение совпадает с обычным.

Везде в дальнейшем под решением системы косвенных измерений (2) мы будем понимать её нормальное псевдорешение.

Пример. В приложениях (в частности, в теории динамических измерений [5]) часто встречается ситуация, когда матрица $T = \| t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n} \|$ – матрица-строка. В этом случае псевдообратная

матрица имеет вид: $T^+ = \frac{T^T}{\sum_1^n t_{1i}^2}$, а нормальное псевдорешение дается соотношением

$$x_{\text{норм}} = \frac{y(t)}{\sum_1^n t_{1i}^2} T^T, \text{ где } y(t) \text{ – единственная скалярная компонента измеряемого сигнала, } T^T \text{ –}$$

столбец элементов матрицы T .

IV. Точность косвенных измерений

Как уже было отмечено выше, как правило, в прикладных ситуациях измерения сопровождаются различными погрешностями, так что фактически исследователь имеет дело не с системой (2), а с возмущенной системой

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \Delta_y(t) = Tx(t). \quad (4)$$

Пусть $x_{\text{норм}}(t)$ – нормальное псевдорешение невозмущенной системы $y(t) = Tx(t)$, $x_{\text{норм}}^{\text{возм}}(t)$ – нормальное псевдорешение возмущенной системы (4). Интерес представляет ответ на вопрос, насколько возмущения $\Delta_y(t)$ измеряемого сигнала $y(t)$ влияют на погрешность $\Delta_x(t)$ нормального псевдорешения. Оценивая упомянутую погрешность по норме пространства $L_{[a;b]}^{n,2}$, получаем:

$$\|\Delta_x\| = \|x_{\text{норм}} - x_{\text{норм}}^{\text{возм}}\| = \|T^+ y - T^+ \hat{y}\| = \|T^+ (y - \hat{y})\| \leq \|T^+\| \cdot \|\Delta_y\|.$$

Здесь $\|T^+\|$ – норма оператора псевдообращения. Если $\|\Delta_y\| < \delta$, то $\|\Delta_x\| < \|T^+\| \cdot \delta$. Так, например, для важного в приложениях случая матрицы-строки получаем:

$$T = \|t_{1i}\|, \quad \|T^+\| = \frac{1}{\|T\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum t_{1i}^2}} \Rightarrow \|\Delta_x\| < \frac{\delta}{\sqrt{\sum t_{1i}^2}}.$$

Более точные оценки можно найти, например, в [4].

Здесь важно отметить еще одну особенность задачи с возмущенными косвенными измерениями – погрешности измерений Δ_y могут быть сколь угодно «плохими» с аналитической точки зрения, например недифференцируемыми и даже разрывными. А потому получить правую часть уравнения (1) простой подстановкой нормального псевдорешения не удастся.

V. Основные расчетные соотношения

Хорошо известно (например, [6]), что задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

с непрерывными коэффициентами $A(t)$, $f(t)$ однозначно разрешима для любых начальных условий x_0 и её решение дается интегральным соотношением

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds, \quad (6)$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы (5), удовлетворяющая уравнению

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi(t) + A(t)\Phi(t) = 0, \\ \Phi(t_0) = I \end{cases}, \quad (7)$$

которое эквивалентно интегральному соотношению

$$\Phi(t) + \int_{t_0}^t A(s)\Phi(s)ds = I. \quad (8)$$

Математика

Заметим, что соотношение (8) представляет собой систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода относительно компонент фундаментальной матрицы $\Phi(t)$.

Умножая обе части соотношения (6) на матрицу $\Phi^{-1}(t)$ и обозначая $u(t) = \Phi^{-1}(t)x(t) - x_0$, перепишем (6) в виде:

$$\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = u(t), \quad (9)$$

отмечая, что в этом случае полученное соотношение – интегральное уравнение Вольтерры первого рода относительно функции $f(t)$.

Пусть $\tilde{y}(t) = y(t) + \Delta_y(t)$ – косвенные экспериментальные измерения, $x_{\text{норм}}^{\text{гозм}}(t)$ – соответствующее нормальное псевдорешение системы $\tilde{y}(t) = Tx(t)$.

План решения основной задачи выглядит так:

- построение нормального псевдорешения $x_{\text{норм}}^{\text{гозм}}(t)$ системы косвенных измерений;
- решение уравнения (8) с целью нахождения фундаментальной матрицы $\Phi(t)$;
- решение уравнения (9)

$$\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = \tilde{u}(t) = \Phi^{-1}(t)x_{\text{норм}}^{\text{гозм}}(t) - x_{\text{норм}}^{\text{гозм}}(t_0)$$

с целью нахождения функции $\tilde{f}(t)$, которая и считается приближенным вариантом отыскиваемой правой части системы (1).

Отметим, что результат решения уравнений (7)–(8) от точности измерений и процедуры обращения системы (2) не зависит. Кроме того, вычислительные процедуры решения уравнения второго рода устойчивы относительно погрешностей вычисления (например, [7–8]). Поэтому нахождение фундаментальной матрицы системы (1) особых затруднений не вызывает¹.

Иначе обстоит дело с решением интегрального уравнения (9) с неточно заданной правой частью. Как уже было отмечено выше, погрешности косвенных измерений вызывают погрешности при нахождении нормального псевдорешения, которые могут оказаться значительными. Кроме того, численные процедуры решения уравнений второго рода неустойчивы и это тоже может привести к заметному искажению результата.

Процедура решения уравнения (9) с неточно заданной правой частью требует регуляризации [7–9] и последующего анализа точности получаемого таким способом решения.

VI. Регуляризация

Напомним (например, [7–9]), что регуляризирующим оператором для уравнения $Af = u, f \in F, u \in U$ называется отображение $R: \{(\tilde{u}, \delta) | \tilde{u} \in U, \delta > 0\} \rightarrow F$, удовлетворяющее условию $\forall f \in F, \forall \tilde{u} \in U$ таких, что $Af = u, \rho_U(u, \tilde{u}) < \delta$, должно выполняться $\tilde{f} = R(\tilde{u}, \delta) \rightarrow f$, если только $\delta \rightarrow 0$. Если задача регуляризуема, то её решением называется результат применения регуляризирующего оператора к исходным данным.

Пусть оператор $A: F \rightarrow U$ линеен и ограничен, и нам известны $\tilde{A}: \|A - \tilde{A}\| \leq \varepsilon$ и $\tilde{u}: \|u - \tilde{u}\|_U \leq \delta$. Для построения приближённого решения \tilde{f} , сходящегося к точному решению f при стремлении δ и ε к нулю, широко применяется следующий регуляризирующий алгоритм [7, 9].

Рассмотрим $M^\alpha[f]$ – функционал, задаваемый соотношением

$$M^\alpha[f] = \|\tilde{A}f - \tilde{u}\|_U^2 + \alpha \cdot \Omega[f], \quad (10)$$

¹ Если матрица A не зависит от времени, то фундаментальная матрица может быть найдена непосредственно из уравнения (7).

где $\Omega[f] = \|f\|_F^2$. Пусть f_α – элемент, доставляющий минимум функционалу $M_\alpha[f]$ на F . Если параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\varepsilon, \delta)$ удовлетворяет определенным условиям (подробнее, например в [7–9]), то элемент f_α будет приближенным решением рассматриваемого уравнения.

В нашем случае оператор \tilde{A} дается соотношением (9), а стабилизатор Ω был выбран в виде

$$\Omega[f] = \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n p_i(s) f_i^2(s) \right) ds, \quad p_i(s) \geq 0, \quad s \in [a; b].$$

Полагая $f = \|f_i\|$, $\Phi^{-1}(s) = \|g_{ij}(s)\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, перепишем (10) в скалярной форме

$$M^\alpha[f] = \int_{t_0}^t \left[\sum_i \left(\tilde{u}_i(\tau) - \int_{t_0}^{\tau} \sum_j g_{ij}(s) f_j(s) ds \right)^2 + \alpha \sum_k p_k(\tau) f_k^2(\tau) \right] d\tau, \quad (11)$$

сводя таким образом задачу решения интегрального уравнения (9) к задаче минимизации функционала (11).

VII. Оценивание точности

Существует несколько способов оценивания точности решения уравнений, подобных рассматриваемому нами. Пример априорной оценки точности можно найти в [10], алгоритм получения апостериорной оценки подробно рассмотрен в [11].

Мы ограничимся эмпирической оценкой, дающей оценку снизу для наихудших значений вычислительной точности алгоритма Δ_C и точности метода регуляризации Δ_R . Для их нахождения решим две модельные задачи.

Зададим гладкую вектор-функцию x и по уравнению (1) вычислим $\bar{f}_{mod} = \dot{x} + Ax$, получив точное решение невозмущенного уравнения (9). Соответствующую ему правую часть u_{mod} вычислим, используя нормальное псевдорешение системы (2) $x_{norm} = T^+ y = T^+ Tx$. Таким образом, мы построили задачу решения уравнения (9) с невозмущенными исходными данными и известным точным решением. Если \tilde{f}_{mod} – решение построенной модельной задачи, полученное методом регуляризации, то наихудшая вычислительная точность алгоритма оценивается как

$$\Delta_C \geq \frac{\|\bar{f}_{mod} - \tilde{f}_{mod}\|}{\|\bar{f}_{mod}\|}.$$

Далее рассмотрим модельную задачу с возмущенными исходными данными для оценки точности Δ_R метода регуляризации. Как и выше, вычислим точное решение \bar{f}_{mod} по заданной гладкой вектор-функции x . Вычислим вектор наблюдений $y = Tx$, возмутим его, положив $y^{603M}(t) = y(t) + \xi(t)$, где $\xi(t)$ – функция погрешности. Далее найдём возмущенное нормальное псевдорешение системы (2) $x_{norm}^{603M} = T^+ y^{603M}$ и вычислим возмущенную правую часть u_{mod}^{603M} уравнения (9). Если \tilde{f}_{mod}^{603M} – регуляризованное решение уравнения (9) с возмущенной правой частью,

то наихудшая точность регуляризирующего алгоритма оценивается как $\Delta_R \geq \frac{\|\bar{f}_{mod} - \tilde{f}_{mod}^{603M}\|}{\|\bar{f}_{mod}\|}$.

VIII. Численная реализация. Пример

В качестве примера была рассмотрена динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \\ y(t) = Tx(t), t_0 \leq t \leq h \end{cases}$$

второго порядка со следующими модельными параметрами:

$$t_0 = 0, \quad h = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = (2 \quad 3), \quad x(t) = \begin{pmatrix} 5 \cos 2t \\ 3 \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Дискретизацию задачи решения уравнения $\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = u(t)$ проведём на равномерных сетках $\{t_k = k \cdot \frac{h}{N}, k = \overline{0, N}\}$ для t и s с $N = 100$. Параметр регуляризации выберем эмпирически (можно при выборе также пользоваться обобщённым принципом невязки, описанным в [9]), руководствуясь минимальностью относительной ошибки регуляризованного решения. На рис. 1 показано точное решение \bar{f}_{mod} и вычисленное приближённое решение \tilde{f}_{mod} . Относительная точность регуляризованного решения составила $\delta_1 f = 0,375$.

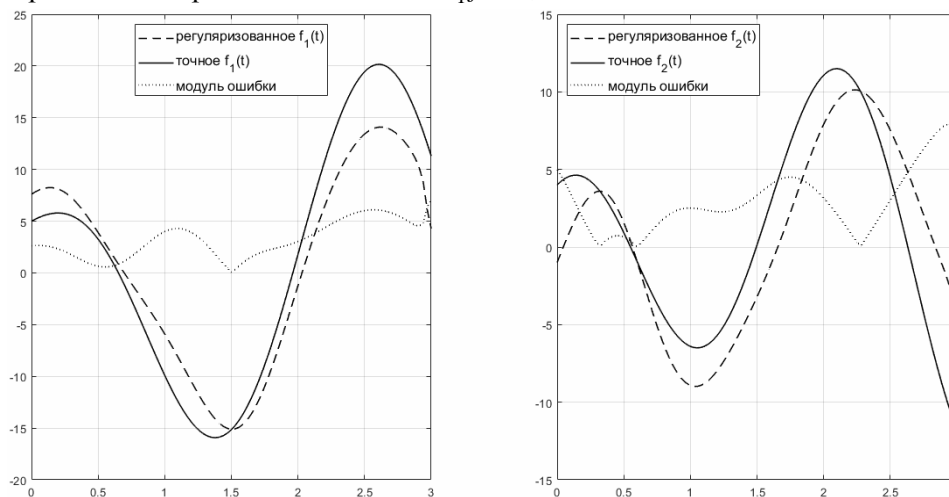


Рис. 1. Решение точной модельной задачи

Для построения возмущенной модельной задачи наложим на наблюдения y аддитивную нормально распределённую помеху с нулевым средним так, чтобы возмущённое $y^{возм}$ имело относительную ошибку 0,01. Решение $\tilde{f}_{mod}^{возм}$ возмущённой модельной задачи изображено на рис. 2. Относительная точность составила $\delta_2 f = 0,377$.

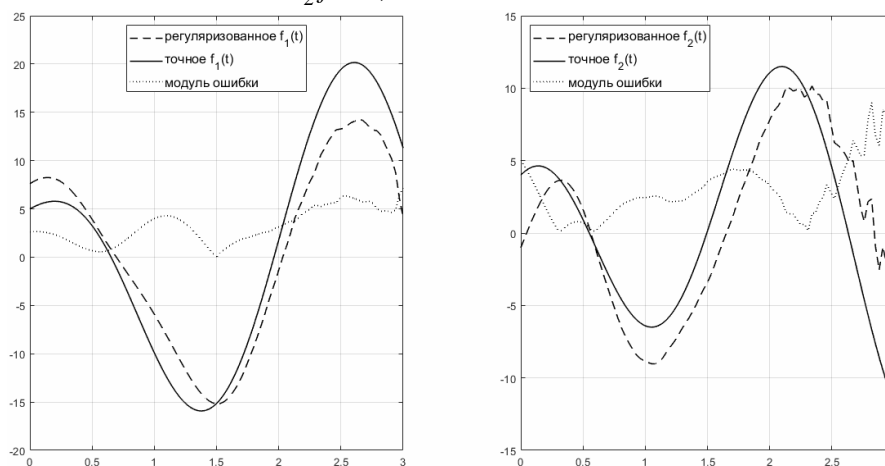


Рис. 2. Решение возмущённой модельной задачи

Видно, что относительная точность решения искаженной модельной задачи почти не изменилась по сравнению с точной модельной задачей. Заметим, что при этом величины $\delta_1 f$ и $\delta_2 f$ относительно велики. Это связано с тем, что решением интегрального уравнения (9) является вектор-функция \bar{f}_{norm} , которая вычисляется не по вектору x , задаваемому нами в модельной задаче, а по нормальному решению x_{norm} , то есть $\bar{f}_{norm} = \dot{x}_{norm} + Ax_{norm}$.

Эти соображения подтверждаются численным экспериментом. На рис. 3 изображено решение $\tilde{f}_{\text{норм}}$ точной модельной задачи в сравнении с $\bar{f}_{\text{норм}}$. Относительная точность $\delta_1 f_{\text{норм}} = 0,002$.

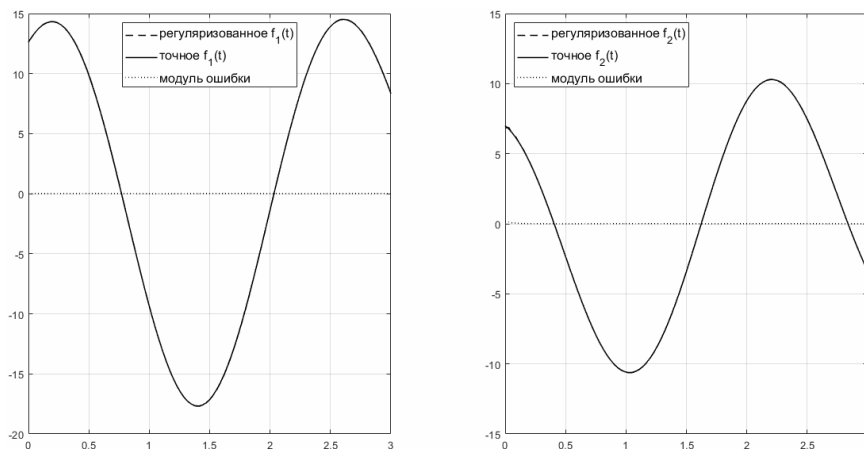


Рис. 3. Решение точной модельной задачи в сравнении с $\bar{f}_{\text{норм}}$

Для сравнения решим ту же искажённую модельную задачу и сравним её решение с $\bar{f}_{\text{норм}}$. На рис. 4 изображено приближённое решение $\tilde{f}_{\text{норм}}^{\text{возм}}$ и $\bar{f}_{\text{норм}}$. Относительная точность решения $\delta_2 f_{\text{норм}} = 0,101$.

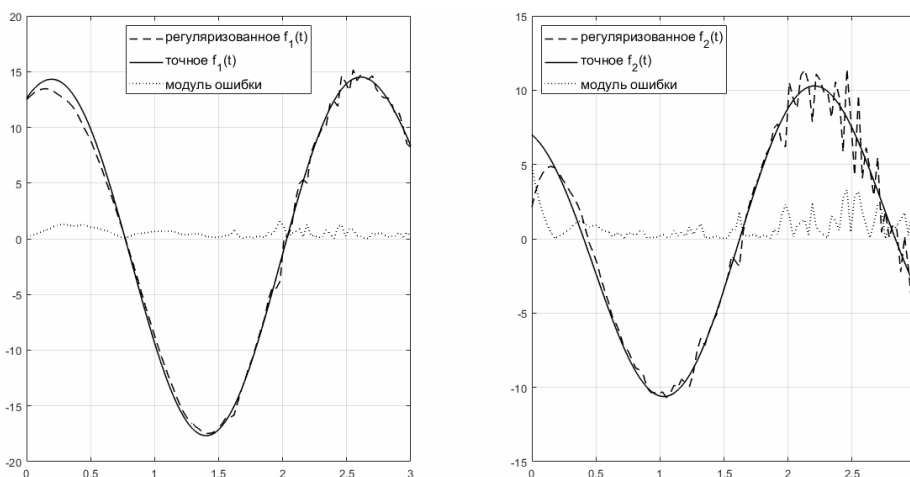


Рис. 4. Решение искажённой модельной задачи в сравнении с $\bar{f}_{\text{норм}}$

Таким образом, наблюдается неустранимая ошибка решения, связанная с разницей между x и нормальным псевдорешением $x_{\text{норм}}$ системы измерений (2). Очевидно, что в случае, если система измерений имеет единственное обычное решение, регуляризованное решение задачи (1)–(2) ведёт себя аналогично изображённому на рис. 4 приближённое решение.

Литература

1. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1983. – 198 с.
2. Ягола, А.Г. Некорректные задачи с априорной информацией / А.Г. Ягола. – Сиб. электрон. матем. изв. – 2010. – Т. 7. – С. 343–361.
3. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993. – 261 с.
4. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 303 с.

5. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2013. – 256 с.
6. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
7. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
8. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
9. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 229 с.
10. Заляпин, В.И. Оценка погрешности численного метода решения одной обратной задачи / В.И. Заляпин, Ю.С. Попенко, Е.В. Харитонова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 51–58.
11. Леонов, А.С. Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризирующих алгоритмах / А.С. Леонов // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 14–24.

Поступила в редакцию 5 октября 2020 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2020, vol. 12, no. 4, pp. 19–27*

DOI: 10.14529/mmph200402

INTEGRAL EQUATIONS METHOD FOR A VECTOR INVERSE PROBLEM

V.I. Zaliapin, V.S. Shalgin

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: zaliapinvi@susu.ru*

The paper discusses a dynamic system described by a system of linear differential equations. In many cases, instead of the true signal, which is perceived by the measuring device, a distorted signal is observed at the output, which significantly differs in structure, magnitude, and time parameters from the true one. Such distortions are generated by the operation principles of the measuring device, noise or interference contained in the input signal, and distortions arising from the operation of the device itself. Under these conditions, one of the problems of significant interest for applications is the inverse problem, restoring the input signal from the available information (including indirect information) about the signal at the output of the system and estimating the accuracy of the solutions obtained. The paper proposes a method of integral equations and its numerical implementation, which make it possible to effectively restore the input action on a dynamic system from indirect experimental information.

Keywords: linear dynamical system; indirect measurements; pseudosolution; system of integral equations; regularization.

References

1. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Regulariziruyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya* (Regularizing Algorithms and a Priori Information), Moscow, Nauka Publ., 1983, 198 p. (in Russ.).
2. Yagola A.G. Ill-posed Problems with Apriori Information. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2010, Vol. 7, pp. 343–361. (in Russ.).
3. Vasin V.V., Ageev A.L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoj informatsiyey*. Ekaterinburg, UIF Nauka Publ., 1993, 261 p. (in Russ.).
4. Voevodin V.V. *Vychislitel'nye osnovy lineynoy algebrы* (Computational Foundations of Linear Algebra). Moscow, Nauka Publ., 1977, 303 p. (in Russ.).

5. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskikh izmereniyah* (Methods of the Automatical Control Theory to Dynamical Measurements). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2013, 256 p. (in Russ.).

6. Khartman F. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary Differential Equations), Moscow, Mir Publ., 1970, 720 p. (in Russ.).

7. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods for Solving Ill-Posed Problems), Moscow, Nauka Publ., 1986, 286 p. (in Russ.).

8. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i yeye prilozheniya* (The Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications), Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p. (in Russ.).

9. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems). Moscow, Nauka Publ., 1990, 229 p. (in Russ.).

10. Zalyapin V.I., Popenko Yu.S., Kharitonova Ye.V. Error Estimate of Numerical Method for Solving an Inverse Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2013, Vol. 6, no. 3, pp. 51–58. (in Russ.).

11. Leonov A.S. On a Posteriori Accuracy Estimates for Solutions of Linear Ill-Posed Problems and Extra-Optimal Regularizing Algorithms. *Num. Meth. Prog.*, 2010, Vol. 11, no. 1, pp. 14–24. (in Russ.).

Received October 5, 2020