

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

А.Л. Казаков¹, П.А. Кузнецов¹

¹Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация

Настоящая работа продолжает большой цикл публикаций авторов, посвященных решениям нелинейного уравнения теплопроводности, которые имеют тип тепловой волны, распространяющейся по нулевому фону с конечной скоростью. Изучается проблема построения точных решений искомого типа для нелинейного уравнения теплопроводности с источником (стоком) и определения их свойств. Особенностью подобных решений является то, что на фронте тепловой волны параболический тип уравнения имеет вырождение, из-за чего оно приобретает необычные для параболических уравнений свойства. Рассмотрены два типа решений: простая волна, которая движется с постоянной скоростью и имеет вид уединенной волны (солитона); волна с экспоненциальным законом движения фронта. В обоих случаях построение редуцируется к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, которые наследуют особенность от исходной задачи. Построены фазовые портреты ОДУ, установлены свойства траекторий, проходящих через особые точки. Также получены разложения искомых решений в степенные ряды, для которых найдены оценки радиуса сходимости.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности; тепловая волна; точное решение; фазовый портрет; ряд.

Введение

Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение второго порядка

$$U_t = \Phi(U)_{xx} + \Psi(U), \quad (1)$$

которое является весьма известным и популярным математическим объектом, поскольку обладает как интересными математическими свойствами, так и многочисленными приложениями. В физике и математическом моделировании (1) применяется (в различных формах) для описания процессов, протекающих в высокотемпературной плазме [1], фильтрации жидкостей и газов в пористых средах [2], популяционной динамики [3] и т.п. Математические свойства (1) исследуются в (без преувеличения) тысячах публикаций. Особого упоминания, по мнению авторов, заслуживают работы российских (советских) ученых: А.А. Самарского (с соавторами) [4], О.А. Ладыженской (с соавторами) [5] и фундаментальная монография испанского автора Х.Л. Васкеса [6].

Одной из интересных математических особенностей (1), которая, отметим, тесно связана с приложениями, является то, что в случае, когда $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$, у него появляется один специфический класс решений. Последние, будучи, вообще говоря, нетривиальными и неотрицательными, обращаются в нуль на некотором многообразии: $U|_{a(t,x)=0} = 0$. Такого рода решения иногда именуют *тепловыми волнами* [1] или *волнами фильтрации* [7]. По-видимому, впервые они были обнаружены в 40-е годы

прошлого столетия в связи с исследованиями процессов, происходящих после ядерного взрыва [8]. Несколько позднее подобные математические объекты были использованы для моделирования фильтрации газа в пористой среде [9]. Большое внимание таким решениям уделяется в научной школе А.Ф. Сидорова [7], в качестве инструмента исследования обычно применяется метод специальных рядов [10]. Среди работ, посвященных решениям упомянутого вида, особое место занимают работы С.Н. Антонцева с соавторами (см., например, [11]), в которых (1) рассматривается с весьма общих позиций.

В литературе наиболее распространен случай степенных нелинейностей – когда $\Phi(U)$ и $\Psi(U)$ представляют собой степенные функции. Именно он является основным объектом рассмотрения в упомянутых выше классических работах [4, 6, 7]. Одним из ключевых направлений развития теории уравнений математической физики можно назвать построение и изучение точных решений [12]. В связи с точными решениями уравнения (1) со степенными нелинейностями могут быть упомянуты работы представителей научной школы А.А. Самарского [13], а также иркутских математиков [14].

1. Постановка задачи

Уравнение (1) в случае степенных нелинейностей с помощью простой замены (см., например, [15]) легко преобразуется к виду

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + \alpha u^\beta. \quad (2)$$

Будем предполагать, что уравнение фронта тепловой волны может быть разрешено относительно x и тогда условие на ее фронте следующее:

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \quad (3)$$

Для задачи (2), (3) при $\beta \in \mathbb{N}$ выполняются условия доказанной авторами ранее теоремы [15], которая обеспечивает существование и единственность нетривиального аналитического решения, меняющего знак при переходе через линию $x = a(t)$. Неотрицательная часть указанного решения вкупе с тривиальным $u \equiv 0$ (его существование при $\beta > 0$ очевидно) образует уже упоминавшуюся тепловую волну, распространяющуюся по нулевому фону с конечной скоростью $a'(t) < \infty$.

Поскольку доказательство теоремы носит конструктивный характер и содержит рекуррентную процедуру построения решения в виде характеристического [16] ряда, его, в принципе, можно использовать для верификации результатов численных расчетов. Так, авторы имеют подобный опыт проверки с использованием отрезков рядов вычислений, выполненных с помощью алгоритмов на основе метода граничных элементов (МГЭ) [17, 18] и разностной схемы [19]. Однако при нецелых значениях $\beta > 0$ теорема, вообще говоря, неприменима, кроме того, радиус сходимости характеристического ряда, как правило, неизвестен и невелик. В этом контексте дополнительную актуальность приобретает проблема построения точных [12] решений, имеющих тип тепловой волны.

Ранее авторами данная проблематика рассматривалась как в частном случае $\alpha = 0$ [20, 21], так для уравнения (2) общего вида [15, 22]. Были получены точные обобщенно-автомодельные решения $u = u_1(t)u_2(x/a(t))$ и решения в виде обобщенной бегущей волны $u = u_1(t)u_2(x - a(t))$. Они строятся в виде степенных рядов, для

которых в некоторых случаях найдены оценки радиусов сходимости [20]. Выполнен анализ свойств решений методами качественной теории [23] обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [21, 22].

В ходе исследований, проведенных в упомянутых выше работах авторов, остались некоторые открытые вопросы, представляющие интерес для области исследования. В частности, случай нецелых положительных значений β был разобран [24] не полностью даже для решений типа простой волны. Кроме того, напрашивается рассмотрение иных способов разделения переменных, например, когда функция $u_1 = u_1(x)$, т.е. зависит не от t , как в опубликованных статьях, а от x . В рамках настоящей работы авторами получены результаты, позволяющие продвинуться в решении данных вопросов. В частности, для двух динамических систем, к которым сводится нахождение точных решений типа тепловой волны для (2), получены фазовые портреты, что позволило установить некоторые свойства решений. Кроме того, построены разложения последних в степенные ряды, анализ коэффициентов которых дал возможность оценить радиусы сходимости, а также сделать другие содержательные выводы.

2. Редукция к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Вначале рассмотрим решения, имеющие тип бегущей волны. Пусть $u = v(x - \mu t)$. Подстановка данного выражения в (2) приводит к следующему ОДУ:

$$vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \mu v' + \alpha v^\beta = 0. \quad (4)$$

К уравнению (4) добавляем условия Коши

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = -\mu\sigma. \quad (5)$$

Первое из условий (5) является следствием (3), а второе обеспечивает совместность уравнения и существование нетривиального решения. Задача Коши (4), (5) будет предметом изучения в последующих разделах.

Также будем искать точное обобщенно-автомодельное решение (2), (3) в виде

$$u(t, x) = \phi(x)v(z), \quad z = x/a(t).$$

Отметим, что данный способ получения решений искомого типа ранее нами не рассматривался. В результате постановки получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\phi^2(x)}{a^2(t)}vv'' + \frac{\phi^2(x)}{\sigma a^2(t)}(v')^2 + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \frac{2\phi(x)\phi'(x)}{a(t)}vv' + \left[\frac{(\phi'(x))^2}{\sigma} + \phi(x)\phi''(x)\right]v^2 + \\ + \frac{x\phi(x)a'(t)}{a^2(t)}v' + \alpha\phi^\beta(x)v^\beta = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее сделаем в (6) замену независимой переменной $s = \ln z$, в результате которой уравнение примет вид

$$\frac{\phi^2(x)}{x^2}v(v'' - v') + \frac{\phi^2(x)}{\sigma x^2}(v')^2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \frac{\phi(x)\phi'(x)}{x}vv' + \left[\frac{(\phi'(x))^2}{\sigma} + \phi(x)\phi''(x)\right]v^2 +$$

$$+\frac{x\phi(x)a'(t)}{a(t)}v' + \alpha\phi^\beta(x)v^\beta = 0. \quad (7)$$

После приведения подобных и умножения обеих частей на $x^2/\phi^2(x)$ получим

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left[2\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\frac{x\phi'(x)}{\phi(x)} - 1\right]vv' + \frac{x^2}{\phi(x)}\left[\frac{(\phi'(x))^2}{\sigma} + \phi''(x)\right]v^2 + \frac{a'(t)}{a(t)}\frac{x^2}{\phi(x)}v' + \alpha x^2\phi^{\beta-2}(x)v^\beta = 0. \quad (8)$$

Предложение 1. Уравнение (8) является ОДУ тогда и только тогда, когда 1) $\alpha = 0$ или $\alpha \neq 0, \beta = 1$; 2) $\phi = Ax^2$; 3) $a(t) = \exp(Bt)$ или $a(t) = B$, где $A \neq 0$ и $B \neq 0$ – произвольные константы.

Доказательство. Обоснование справедливости предложения состоит в последовательном рассмотрении всех коэффициентов в уравнении (8). При этом $\phi(x)$ определяется из алгебраического уравнения $\phi(x)/x^2 = A$, а $a(t)$ – из дифференциального $a'(a)/a(t) = B$. \square

Далее будем рассматривать случай, когда $a(t) = \exp(Bt)$. В условиях предложения 1 уравнение (8) имеет вид

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(3 + \frac{4}{\sigma}\right)vv' + \left(2 + \frac{4}{\sigma}\right)v^2 + \frac{B}{A}v' + \frac{\alpha}{A}v = 0. \quad (9)$$

Пусть $A = B > 0, \alpha > 0$. Тогда (9) несколько упрощается

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(3 + \frac{4}{\sigma}\right)vv' + \left(2 + \frac{4}{\sigma}\right)v^2 + v' + \frac{\alpha}{B}v = 0. \quad (10)$$

Для уравнения (10) рассматриваются условия Коши (5): первое из условий по-прежнему следует из (3), а второе обеспечивает совместность уравнения и существование нетривиального решения. Решение задачи (10), (5) (его существование и единственность следуют из ранее доказанной теоремы [15]) дает решение задачи (2), (3) вида

$$u = Bx^2v(s), s = \ln z = \ln x - Bt.$$

При этом $u|_{x=\exp(Bt)} = 0$ приводит к $v(0) = 0$; при $x \rightarrow +0$ имеем, что $s \rightarrow -\infty$, т.е. решения задачи (10), (5) представляют для нас интерес на $(-\infty, 0]$.

3. Качественный анализ

Для получения свойств решений задач (4), (5) и (10), (5) выполним их анализ методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [23]. Рассмотрим обе задачи последовательно.

Вначале перейдем от уравнения (4) к динамической системе. Для этого предварительно сделаем замену независимой переменной и искомой функции. Пусть

$$v'(h) = p, h = v^\beta.$$

Тогда уравнение (4) запишется как

$$\beta h p \frac{dp}{dh} + \frac{p^2}{\sigma} + \mu p + \alpha h = 0. \quad (11)$$

Поскольку при $\beta > 0$ справедливо равенство $v^\beta|_{v=0} = 0$, для уравнения (11) имеем, что условию (5) соответствует

$$p(0) = -\mu\sigma. \quad (12)$$

Теперь перейдем к эквивалентной динамической системе

$$\begin{cases} \frac{dh}{d\xi} = \beta w p, \\ \frac{dp}{d\xi} = -\frac{1}{\sigma} p^2 - \mu p - \alpha h. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь параметризация выбрана таким образом, что $dz = v d\xi$.

Переход от уравнения (10) к динамической системе производится проще, последняя имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} = vw, \\ \frac{dw}{d\xi} = -\frac{1}{\sigma} w^2 - \left(3 + \frac{4}{\sigma}\right) vw - \left(2 + \frac{4}{\sigma}\right) v^2 - w - \frac{\alpha}{B} v. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь также $dz = v d\xi$.

На рисунке изображены динамические портреты системы (13) (слева) и системы (14) для случая $\alpha/B \leq 1$ (справа). Отметим, что левый рисунок ранее уже встречался в работе авторов [21], однако там он фигурировал применительно к уравнению (2) без источника ($\alpha = 0$) и в несколько ином контексте.

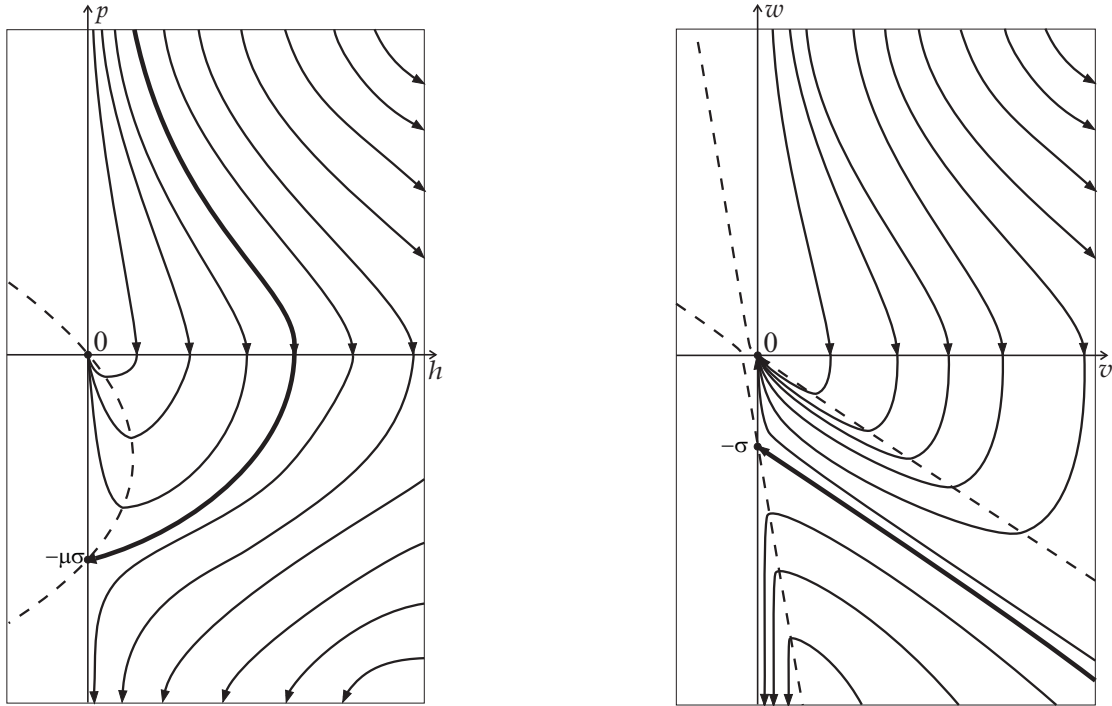
Поскольку по смыслу рассматриваемой задачи (2), (3) нас интересуют неотрицательные значения v и h , представлены только правые полуплоскости. Можно видеть, что, несмотря на сходство фазовых портретов в первом квадранте, в четвертом квадранте имеются заметные различия в поведении фазовых траекторий, связанные с тем, что кривая второго порядка, на которой правая часть второго уравнения меняет знак (и, соответственно, фазовая траектория меняет направление движения относительно оси ординат), для системы (13) является параболой

$$p^2 + \mu\sigma p + \alpha\sigma h = 0,$$

ветви которой направлены влево, а для системы (14) – гиперболой

$$\frac{1}{\sigma} w^2 + \left(3 + \frac{4}{\sigma}\right) vw + \left(2 + \frac{4}{\sigma}\right) v^2 + w + \frac{\alpha}{B} v = 0$$

(соответствующие линии изображены на рисунке пунктиром). Вследствие этого сепаратриса, разделяющая узловой и седловой сектора, в первом случае огибает узловой сектор, приходит в особую точку $(0, -\mu\sigma)$ и порождает решение задачи (4), (5), принимающее положительные значения на конечном интервале $(-h_*, 0)$, которое



Фазовые портреты систем (13) и (14)

ограничено сверху (см. [22]); во втором случае данная сепаратриса является монотонной кривой, вдоль которой v меняется от $+\infty$ до 0 , и порождает она решение задачи (10), (5), стремящееся к бесконечности при $s \rightarrow -\infty$. Отметим, что случай $\alpha/B = 1$ приводит к решению, которое может быть представлено в виде явной формулы (см. ниже), случай $\alpha/B > 1$ требует отдельного рассмотрения, которое выходит за рамки данной работы.

4. Построение бегущей волны в виде ряда

Отметим, что степенные ряды используются для построения решений дифференциальных уравнений достаточно часто. Однако в современной математике классический метод степенных рядов [16], как правило, требует адаптации к исследуемой задаче. При этом коэффициенты могут быть представлены в виде самых разнообразных конструкций. Например, в работе Н.А. Сидорова и Д.Н. Сидорова [25] решение ОДУ приводится в виде степенного ряда с коэффициентами, зависящими от логарифмов. Отдельно упомянем метод специальных рядов [10] (см. также [7]).

Решение задачи Коши (11), (12) мы будем строить в виде ряда Тейлора

$$p(h) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{h^n}{n!}, \quad p_n = \left. \frac{d^n p}{dh^n} \right|_{h=0}. \quad (15)$$

Из начального условия (12) следует, что $p_0 = -\mu\sigma$. Остальные коэффициенты ряда (15) определим, применяя к уравнению (11) дифференциальный оператор $D_n[\cdot] = d^n/dh^n|_{w=0}$. При $n = 1$ получим равенство

$$\beta p_0 p_1 + \frac{2}{\sigma} p_0 p_1 + \mu p_1 + \alpha = 0,$$

из которого выразим p_1

$$p_1 = \frac{\alpha}{\mu(1 + \sigma\beta)}. \quad (16)$$

При $n = 2$ и $n = 3$ имеем, соответственно,

$$p_2 = \frac{2\alpha^2}{\sigma\mu^3(1 + \sigma\beta)(1 + 2\sigma\beta)}, \quad p_3 = \frac{6(2 + 3\sigma\beta)\alpha^3}{\sigma^2\mu^5(1 + \sigma\beta)^2(1 + 2\sigma\beta)(1 + 3\sigma\beta)}. \quad (17)$$

На n -ом шаге имеем формулу

$$p_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} [1 + \sigma\beta(n - k)] C_n^k p_k p_{n-k}}{\sigma\mu(1 + n\sigma\beta)}, \quad n \geq 2. \quad (18)$$

Коэффициенты p_n , $n \geq 1$ однозначно определены и положительны при $\alpha > 0$.

Пусть теперь $\alpha > 0$ и $\sigma\beta \geq 1$. В этом частном случае авторам удалось получить оценки радиуса сходимости ряда (15). Для этого будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 1. Коэффициенты (16)–(18) можно представить в виде

$$p_n = \sigma\mu(1 + \sigma\beta) \left[\frac{\alpha}{\sigma\mu^2(1 + \sigma\beta)} \right]^n \frac{n!q_n}{1 + n\sigma\beta}, \quad n \geq 1, \quad (19)$$

где q_n определяются из рекуррентного соотношения

$$q_1 = q_2 = 1, \quad q_n = (1 + \sigma\beta) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_k q_{n-k}}{1 + k\sigma\beta}, \quad n \geq 2. \quad (20)$$

Доказательство. Лемма легко доказывается подстановкой (19) в (18). \square

В дальнейшем для большего удобства мы будем использовать именно это представление коэффициентов ряда.

Для исследования радиуса сходимости R воспользуемся формулой Адамара

$$R = \frac{1}{L}, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{p_n}{n!}}. \quad (21)$$

В силу рекуррентного задания q_n , непосредственно определить, чему равен радиус R довольно сложно. В этом разделе мы ограничимся его оценками, полученными с помощью следующих двух предложений.

Предложение 2. Для всех натуральных $n \geq 1$ справедливо неравенство $q_n \geq 1$.

Доказательство. Неравенство $q_n \geq 1$ справедливо при $n = 1, 2$. Базис индукции выполнен. Предположим теперь, что $q_i \geq 1$ при $i = 3, \dots, n - 1$. Пользуясь формулой (20), получаем неравенство

$$q_n = (1 + \sigma\beta) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_k q_{n-k}}{1 + k\sigma\beta} \geq (1 + \sigma\beta) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 + k\sigma\beta} = 1 + (1 + \sigma\beta) \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{1 + k\sigma\beta} > 1.$$

Предложение доказано. \square

Предложение 3. Существует константа $M > 1$ такая, что для всех натуральных $n \geq 1$ справедливо неравенство $q_n \leq M^{n-1}/n$.

Доказательство. Чтобы выполнялся базис индукции $q_1 \leq 1, q_2 \leq M/2$, необходимо положить $M \geq 2$. Предположим теперь, что

$$q_i \leq \frac{M^{i-1}}{i}, \quad i = 3, \dots, n-1.$$

Следуя формуле (20), получаем оценку

$$q_n = (1 + \sigma\beta) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_k q_{n-k}}{1 + k\sigma\beta} \leq \frac{(1 + \sigma\beta)}{M} M^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + k\sigma\beta)k(n-k)}.$$

Осталось показать, что существует константа $M \geq 2$, при которой выполняется неравенство

$$n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + k\sigma\beta)k(n-k)} \leq \frac{M}{(1 + \sigma\beta)}. \quad (22)$$

В силу равенства

$$\frac{1}{(1 + k\sigma\beta)k(n-k)} = \frac{-(\sigma\beta)^2}{(1 + n\sigma\beta)(1 + k\sigma\beta)} + \frac{1}{nk} + \frac{1}{n(1 + n\sigma\beta)(n-k)},$$

левая часть (22) может быть преобразована как

$$\begin{aligned} y_n &= n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + k\sigma\beta)k(n-k)} = \frac{-(\sigma\beta)^2 n}{1 + n\sigma\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 + k\sigma\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{1 + n\sigma\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \\ &= \frac{-(\sigma\beta)^2 n}{1 + n\sigma\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 + k\sigma\beta} + \left(1 + \frac{1}{1 + n\sigma\beta}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Оценим y_n , используя следующую лемму (ее доказательство носит характер упражнения для студентов и для краткости опускается).

Лемма 2. Для любого $\xi > 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 + k\xi} \leq \frac{1}{1 + \xi} + \frac{1}{\xi} \ln \frac{1 + \xi(n-1)}{1 + \xi}. \quad (23)$$

Отсюда при $\sigma\beta \geq 1$ следует оценка

$$\begin{aligned} y_n &\leq \frac{-\sigma\beta n}{1 + n\sigma\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 + k} + \left(1 + \frac{1}{1 + n\sigma\beta}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \\ &= \frac{2}{1 + n\sigma\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 + k} + 1 + \frac{1}{1 + n\sigma\beta} - \frac{1}{n} - \frac{2}{n(1 + n\sigma\beta)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2}{1+n\sigma\beta} \left(\ln \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) + 1 + \frac{1}{1+n\sigma\beta} - \frac{1}{n} - \frac{2}{n(1+n\sigma\beta)} \leq \\ &\leq \frac{2}{1+2\sigma\beta} + \frac{2 \ln \frac{n}{2}}{1+n\sigma\beta} + 1 \leq \frac{2}{1+2\sigma\beta} + 2 \max_{n \geq 2} \frac{\ln \frac{n}{2}}{1+n\sigma\beta} + 1. \end{aligned}$$

Получаем, что константа M существует и равна

$$M = (1 + \sigma\beta) \left(\frac{2}{1+2\sigma\beta} + 2 \max_{n \geq 2} \frac{\ln \frac{n}{2}}{1+n\sigma\beta} + 1 \right).$$

Предложение доказано. \square

Добавим, что при $\sigma\beta = 1$ значение M можно существенно уточнить. Действительно, y_n в этом случае запишется в виде

$$\begin{aligned} y_n &= n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(1+k)k(n-k)} = \frac{-n}{1+n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+k} + \left(1 + \frac{1}{1+n} \right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+k} + \left(1 + \frac{1}{1+n} \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + 1 - \frac{1}{n} \right) = \\ &= \frac{(n+2)(n-1)}{(n+1)n} + \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством (23), получим оценку

$$y_n \leq \frac{(n+2)(n-1)}{(n+1)n} + \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{n}{2} \right) = \frac{n+2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} + \frac{2 \ln \frac{n}{2}}{n+1}.$$

Таким образом, при $\sigma\beta = 1$ следует положить

$$M = 2 \max_{n \geq 2} \left[\frac{n+2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} + \frac{2 \ln \frac{n}{2}}{n+1} \right] = 2 \left[\frac{n+2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} + \frac{2 \ln \frac{n}{2}}{n+1} \right] \Big|_{n=6} = \frac{46}{21} + \frac{4 \ln 3}{7}.$$

Константа M приближенно равна 2,818.

Определим теперь интервал, в котором лежит радиус сходимости R . Из доказанных предложений следует двойное неравенство

$$\begin{aligned} \sigma\mu(1 + \sigma\beta) \left[\frac{\alpha}{\sigma\mu^2(1 + \sigma\beta)} \right]^n \frac{1}{1 + n\sigma\beta} &\leq \frac{p_n}{n!} = \sigma\mu(1 + \sigma\beta) \left[\frac{\alpha}{\sigma\mu^2(1 + \sigma\beta)} \right]^n \frac{q_n}{1 + n\sigma\beta} \leq \\ &\leq \frac{\sigma\mu(1 + \sigma\beta)}{M} \left[\frac{\alpha M}{\sigma\mu^2(1 + \sigma\beta)} \right]^n \frac{1}{n(1 + n\sigma\beta)}. \end{aligned}$$

По известной теореме математического анализа о трех последовательностях предел L (см. формулу (21)) существует и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\alpha}{\sigma\mu^2(1 + \sigma\beta)} \leq L \leq \frac{\alpha M}{\sigma\mu^2(1 + \sigma\beta)}.$$

Тогда радиус сходимости ряда (15) лежит в интервале

$$R \in \left(\frac{\sigma\mu^2(1 + \sigma\beta)}{\alpha M}; \frac{\sigma\mu^2(1 + \sigma\beta)}{\alpha} \right).$$

Подводя итог данному разделу, скажем, что подобные исследования радиуса сходимости в указанных задачах публикуются впервые.

5. Построение волны с экспоненциальным фронтом в виде ряда

Для построения и исследования решения в виде степенного ряда удобнее отказаться от замены $s = \ln z$ и рассматривать уравнение (6). В условиях предложения 1 оно имеет вид

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(4 + \frac{4}{\sigma}\right) \frac{vv'}{z} + \left(2 + \frac{4}{\sigma}\right) \frac{v^2}{z^2} + \frac{B}{Az}v' + \frac{\alpha}{Az^2}v = 0. \quad (24)$$

Для (24) имеем условия Коши

$$v(1) = 0, \quad v'(1) = -\sigma. \quad (25)$$

Решение задачи (24), (25) интересует нас на интервале $z \in (0, 1]$. Можно видеть, что (24) имеет особенность в точке $z = 0$. При этом из результатов качественного анализа следует, что $v_{z \rightarrow +0} \rightarrow +\infty$. Для того чтобы раскрыть указанную особенность, сделаем в (24) замену: введем новую искомую функцию f и новую независимую переменную ζ

$$f = z^2v, \quad \zeta = z - 1.$$

После подстановки и приведения подобных слагаемых и умножения на $(\zeta + 1)^4$ получим следующее уравнение:

$$ff'' + \frac{1}{\sigma}(f')^2 + \zeta f' + f' + \eta f = 0. \quad (26)$$

Здесь $A = B > 0$, $\alpha > 0$, $\eta = \alpha/B - 2 \geq -2$. Условия (25) примут вид

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\sigma. \quad (27)$$

Будем строить решение задачи (26), (27) в виде ряда по степеням $\zeta = x \exp(-Bt) - 1$

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n \zeta^n}{n!}, \quad f_n = \left. \frac{d^n f}{d\zeta^n} \right|_{\zeta=0}. \quad (28)$$

Коэффициенты (26) определяются индукцией по n по использованной ранее процедуре. Из условий (27) нам известно, что $f_0 = 0$, $f_1 = -\sigma$. Для нахождения f_2 продифференцируем обе части (26) по ζ и положим $\zeta = 0$. Разрешив полученное равенство относительно f_2 , имеем

$$f_2 = -\frac{\sigma(1 + \eta)}{\sigma + 1}. \quad (29)$$

И так далее. Пусть найдены коэффициенты до n включительно. Для нахождения f_{n+1} продифференцируем обе части (26) n раз по ζ и положим $\zeta = 0$. Получим соотношение

$$\sum_{k=1}^n \left(C_n^k + \frac{1}{\sigma} C_n^{k-1} \right) f_k f_{n+2-k} + \frac{1}{\sigma} f_{n+1} f_1 + f_{n+1} + (n + \eta) f_n = 0,$$

разрешив которое относительно f_{n+1} , имеем формулу

$$f_{n+1} = \frac{1}{1 + n\sigma} \sum_{k=2}^n \left(C_n^k + \frac{1}{\sigma} C_n^{k-1} \right) f_k f_{n+2-k} + \frac{n + \eta}{1 + n\sigma} f_n. \quad (30)$$

Поскольку $\sigma > 0$, значение f_{n+1} из (30) определяется однозначно. Локальная сходимость ряда (28) следует из ранее доказанных авторами теорем (см. [15]).

Интересным является вопрос о величине радиуса сходимости R . Можно ли утверждать, что $R \geq 1$? Положительный ответ на этот вопрос означал бы существование аналитического решения задачи (2), (3) в рассматриваемом случае при всех $t > 0$, $0 \leq x \leq \exp(Bt)$. На момент написания статьи этот вопрос оставался открытым в общем случае. Однако в одном содержательном частном случае на него можно дать положительный ответ.

Предложение 4. Пусть $\alpha/B = 1$. Тогда решение задачи (26), (27) является линейным и имеет вид $f = -\sigma\zeta$. Если $\alpha/B < 1$, то решение является выпуклым вниз; если $\alpha/B > 1$, то решение является выпуклым вверх в некоторой окрестности точки $\zeta = 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha/B = 1$. Тогда $\eta = -1$ и из (29) следует, что $f_2 = 0$. Можно показать, используя (30), что отсюда следуют равенства $f_3 = f_4 = \dots = f_n = \dots = 0$, т.е. ряд (28) обрывается и решение задачи (26), (27) имеет вид $f(\zeta) = f_0 + f_1\zeta = -\sigma\zeta$.

Если $\alpha/B > 1$, то из (29) имеем $f_2 < 0$, а в противном случае $f_2 > 0$, что обеспечивает выпуклость решения соответственно вверх или вниз. Что и требовалось доказать. \square

Из предложений 1 и 4 следует, что при $\beta = 1, \alpha = B > 0$ задача (2), (3) имеет решение

$$u = -\frac{\sigma B x^2 \zeta}{(\zeta + 1)^2} = -\frac{\sigma B x^2 (x \exp(-Bt) - 1)}{x^2 \exp(-2Bt)} = B\sigma \exp(Bt) [\exp(Bt) - x]. \quad (31)$$

Решение (31) является при любом $0 \leq x < \exp(Bt)$ положительным, аналитическим по t во всей области определения, поскольку представляет собой разность двух экспонент. Можно также видеть, что (31) неограниченно возрастает при $0 \leq t < \infty$ и $0 \leq x < \exp(Bt)$. Напомним, что рассматривается (см. раздел 2) случай $B > 0$, т.е. когда тепловая волна движется вправо.

Заключение

В ходе проведенного исследования удалось подробно (с построением разложений в сходящиеся степенные ряды) исследовать точные решения, имеющие тип тепловой волны, распространяющейся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью, для нелинейного уравнения теплопроводности с источником. Одно из них является простой волной, которая движется с постоянной скоростью. Ранее авторами оно уже рассматривалось, однако здесь впервые установлен новый факт: получены достаточно точные оценки на радиус сходимости степенного ряда, в виде которого решение строится. Второе характеризуется экспоненциальным законом движения фронта и ранее нами не исследовалось. Для него получено условие, при выполнении которого степенной ряд обрывается и решение имеет простой и наглядный вид. Также был выполнен сравнительный качественный анализ двух ОДУ, к которым сводится построение указанных решений. Он позволил сделать содержательные выводы о свойствах решений.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с построением оценки радиуса сходимости ряда (28) в общем случае. Также интерес представляет подробное (по аналогичной схеме) изучение других классов точных решений рассматриваемого типа, например, решения со степенным фронтом.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Министерства по науке и технологиям Тайваня (проект № 20-51-S52003), а также РФФИ и Правительства Иркутской области (проект № 20-47-380001).

Литература

1. Зельдович, Я.Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. – М.: Физматлит, 1966.
2. Баренблатт, Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1972.
3. Murray, J. *Mathematical Biology: I. An introduction* / J. Murray. – N.Y.: Springer, 2002.
4. Самарский, А.А. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. – М.: Наука, 1987.
5. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. – М.: Наука, 1967.
6. Vazquez, J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory* / J.L. Vazquez. – Oxford: Clarendon Press, 2007.
7. Сидоров, А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика / А.Ф. Сидоров. – М.: Физматлит, 2001.
8. Зельдович, Я.Б. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры / Я.Б. Зельдович, А.С. Компанец // Сборник, посвященный 70-летию А.Ф. Иоффе. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61–71.
9. Баренблатт, Г.И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, И.М. Вишик // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 3. – С. 411–417.
10. Filimonov, M. Application of Method of Special Series for Solution of Nonlinear Partial Differential Equations / M. Filimonov // AIP Conference Proceedings. – 2014. – V. 40. – P. 218–223.
11. Antontsev, S.N. Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions. Existence, Uniqueness, Localization, Blow-Up / S.N. Antontsev, S.I. Shmarev. – Paris: Atlantis Press, 2015.
12. Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002.
13. Кудряшов, Н.А. Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции-диффузии с нелинейными источниками / Н.А. Кудряшов, Д.И. Синельщиков // Моделирование и анализ информационных систем. – 2016. – Т. 23, № 3. – С. 309–316.
14. Косов, А.А. О точных решениях уравнения нелинейной диффузии / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Сибирский математический журнал. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 123–140.
15. Казаков, А.Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности / А.Л. Казаков // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1057–1068.
16. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964.

17. Казаков, А.Л. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации / А.Л. Казаков, Л.Ф. Спевак // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
18. Казаков, А.Л. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах / А.Л. Казаков, П.А. Кузнецов, Л.Ф. Спевак // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119–129.
19. Казаков, А.Л. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 57–68.
20. Казаков, А.Л. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности / А.Л. Казаков, С.С. Орлов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 112–123.
21. Казаков, А.Л. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности / А.Л. Казаков, С.С. Орлов, С.С. Орлов // Сибирский математический журнал. – 2018. – Т. 59, № 3. – С. 544–560.
22. Казаков, А.Л. Построение и исследование точных решений со свободной границей нелинейного уравнения теплопроводности с источником / А.Л. Казаков // Математические труды. – 2019. – Т. 22, № 2. – С. 54–75.
23. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1990.
24. Kazakov, A.L. On a Heat Wave for the Nonlinear Heat Equation: An Existence Theorem and Exact Solution / A.L. Kazakov, P.A. Kuznetsov, A.A. Lempert // Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy. – Cham: Springer, 2020. – P. 223–228.
25. Sidorov, N.A. Small Solutions of Nonlinear Differential Equations Near Branching Points / N.A. Sidorov, D.N. Sidorov // Russian Mathematics. – 2011. – V. 55, № 5. – P. 43–50.

Александр Леонидович Казаков, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), kazakov@icc.ru.

Павел Александрович Кузнецов, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), kuznetsov@icc.ru.

Поступила в редакцию 6 октября 2020 г.

MSC 35K65

DOI: 10.14529/mmp200403

EXACT SOLUTIONS OF THE NONLINEAR HEAT CONDUCTION MODEL

A.L. Kazakov¹, P.A. Kuznetsov¹

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
Irkutsk, Russian Federation
E-mails: kazakov@icc.ru, kuznetsov@icc.ru

This paper continues a large series of our publications devoted to solutions of the nonlinear heat conduction equation. The solutions are heat waves that propagate over a zero

background with a finite velocity. We study the problem on constructing exact solutions of the considered type for the nonlinear heat conduction equation with a source (sink) and determining their properties. A feature of such solutions is that the parabolic type of the equation is degenerate at the front of a heat wave, therefore, properties unusual for parabolic equations appear. We consider two types of solutions. The first one is a simple wave that moves at a constant speed and has the form of a solitary wave (soliton). The second one is a heat wave with an exponential law of front motion. In both cases, the construction is reduced to Cauchy problems for second-order ordinary differential equations (ODEs), which inherit the singularity from the original problem. We construct phase portraits of ODEs and establish the properties of trajectories passing through singular points. Also, we obtain the power series expansions of the required solutions and estimate their convergence radii.

Keywords: nonlinear heat conduction equation; heat wave; exact solution; phase portrait; series.

References

1. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamics Phenomena*. N.Y., Dover Publications, 2002.
2. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1990. DOI: 10.1007/978-94-015-7899-8
3. Murray J. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. N.Y., Springer, 2002. DOI: 10.1007/b98868
4. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*. Berlin, Walter de Gruyter, 1995. DOI: 10.1515/9783110889864
5. Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*. Providence, American Mathematical Society, 1988.
6. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford, Clarendon Press, 2007.
7. Sidorov A.F. *Izbrannyye trudy: Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics. Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2001.
8. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. [Towards a Theory of Heat Conduction with Thermal Conductivity Depending on the Temperature]. *Sbornik, posvyashchenny 70-letiyu A.F. Ioffe* [Collection of Papers Dedicated to 70th Anniversary of A.F. Ioffe], 1950, Moscow, Izd. Akad. nauk SSSR, pp. 61–72. (in Russian)
9. Barenblatt G.I., Vishik M.I. [On Finite Velocity of Propagation in Problems of Non-Stationary Filtration of a Liquid or Gas]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1956, vol. 20, pp. 411–417. (in Russian)
10. Filimonov M. Application of Method of Special Series for Solution of Nonlinear Partial Differential Equations. *AIP Conference Proceedings*, 2014, vol. 40, pp. 218–223. DOI: 10.1063/1.4902479
11. Antontsev S.N., Shmarev S.I. *Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions. Existence, Uniqueness, Localization, Blow-Up*. Paris, Atlantis Press, 2015. DOI: 10.2991/978-94-6239-112-3
12. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC, 2011.
13. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I. Analytical Solutions for Nonlinear Convection-Diffusion Equations with Nonlinear Sources. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2017, vol. 51, no. 7, pp. 621–626. DOI: 10.3103/S0146411617070148

14. Kosov A.A., Semenov E.I. Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation. *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 1, pp. 93–107. DOI: 10.1134/S0037446619010117
15. Kazakov A.L. On Exact Solutions to a Heat Wave Propagation Boundary-Value Problem for a Nonlinear Heat Equation. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2019, vol. 16, pp. 1057–1068. (in Russian) DOI: 10.33048/semi.2019.16.073
16. Courant R. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations*. N.Y., Interscience, 2008.
17. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary Element Method and Power Series Method for One-Dimensional Non-Linear Filtration Problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 2–17. (in Russian)
18. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a Degenerate Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation in Spherical Coordinates. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119–129. (in Russian)
19. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Investigation of a Nonlinear Filtration Boundary-Value Problem with Degeneration. *Vychislitel'nye tehnologii*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57–68. (in Russian)
20. Kazakov A.L., Orlov S.S. On Some Exact Solutions of the Nonlinear Heat Equation. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 112–123. (in Russian)
21. Kazakov A.L., Orlov S.S., Orlov S.S. Construction and Study of Exact Solutions to a Nonlinear Heat Equation. *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 427–441. DOI: 10.1134/S0037446618030060
22. Kazakov A.L. Construction and Investigation of Exact Solutions with Free Boundary to a Nonlinear Heat Equation with Source. *Siberian Advances in Mathematics*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 91–105. DOI: 10.3103/S1055134420020029
23. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Methods and Techniques of the Qualitative Investigation of Dynamical Systems in the Plane]. Moscow, Nauka, 1990. (in Russian)
24. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. *On a Heat Wave for the Nonlinear Heat Equation: An Existence Theorem and Exact Solution*. Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy, Cham, Springer, 2020, pp. 223–228. DOI: 10.1007/978-3-030-38870-6_29
25. Sidorov N.A., Sidorov D.N. Small Solutions of Nonlinear Differential Equations Near Branching Points. *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 5, pp. 43–50. DOI: 10.3103/S1066369X11050070

Received October 6, 2020