УДК 517.957 **DOI: 10.14529/mmp200404**

АНИЗОТРОПНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

***А.А. Косов*[1], *Э.И. Семенов*[1]**
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация

Рассматривается нелинейная кинетическая модель, описываемая системой двух уравнений эллиптического типа с экспоненциальными нелинейностями. Предлагается строить точные решения указанной математической модели в классе логарифмов от квадратичных функций пространственных переменных. Коэффициенты решений модели находятся из систем квадратных матричных и линейных векторных уравнений. Предложенный подход применяется, в частности, для построения анизотропных решений уравнения Лиувилля, часто используемого в качестве математической модели стационарных распределений в физике плазмы. Приводится ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

Ключевые слова: кинетическая модель; нелинейная эллиптическая система; уравнение Лиувилля; матричные уравнения; точные решения.

80-летию профессора Н.А. Сидорова посвящается

Введение

Статья посвящена построению новых точных анизотропных решений нелинейной кинетической модели, описываемой следующей системой эллиптических уравнений с экспоненциальными нелинейностями

$$\Delta U = \alpha e^{\sigma_1 U} + \gamma e^{2\sigma_1 U - \sigma_2 V}, \quad \Delta V = \beta e^{\sigma_2 V} + \delta e^{2\sigma_2 V - \sigma_1 U}, \tag{1}$$

где $U = U(\mathbf{x})$, $V = V(\mathbf{x})$ – искомые функции переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$ $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, α, β, $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$ – произвольные параметры.

Нелинейная эллиптическая система (1) появляется во многих задачах, например, она встречается при исследовании стационарной системы Власова – Максвелла с экспоненциальной функцией распределения [1–3] и в математической модели цепочек Тоды [4]. В частном случае при $\gamma = 0$, $\delta = 0$ система (1) переходит в известное уравнение Лиувилля. Кроме того, система (1) используется при исследовании стационарных процессов двух нелинейных уравнений реакции-диффузии с объемными источниками (стоками)

$$u_t = \nabla \cdot \left(u^\lambda \nabla u\right) + a u^{1-\lambda} v^\mu - cu, \quad v_t = \nabla \cdot \left(v^\mu \nabla v\right) + b u^\lambda v^{1-\mu} - dv, \tag{2}$$

в случае $\lambda = \mu = -1$. Системы вида (2) моделируют процессы нелинейной диффузии в реагирующих двухкомпонентных сплошных средах [4–9], где $u = u(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$ – функции, которые можно трактовать как концентрации взаимодействующих составляющих некоторой смеси веществ; ∇ – градиент; a, b, c, d – некоторые параметры, знаки которых характеризуют либо убывание, либо возрастание концентрации элементов смеси во время реакции. Стационарные решения $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$0 = \nabla \cdot \Big(u^{\lambda} \nabla u\Big) + a u^{1-\lambda} v^{\mu} - cu, \quad 0 = \nabla \cdot \Big(v^{\mu} \nabla v\Big) + b u^{\lambda} v^{1-\mu} - dv. \tag{3}$$

Если в (3) $\lambda = \mu = -1$, то нелинейная эллиптическая система (1) получается из (3) преобразованием $\ln u = \sigma_1 U$, $\ln v = \sigma_2 V$.

Отметим, что ранее авторами в [10] исследовался частный случай системы (2) при $c = d = 0$, для которой строились точные многомерные решения с использованием следующей конструкции

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где ненулевая числовая симметрическая матрица A размера $n \times n$, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ являются неизвестными, которые должны быть определены. Как будет показано ниже, конструкцию вида (4) можно использовать для нахождения точных многомерных решений нелинейной эллиптической системы (1).

1. Точные многомерные решения системы (1)

В этом разделе строятся частные точные решения нелинейной эллиптической системы (1) с использованием многомерной конструкции (4).

Предложение 1. *Пусть функции $W_i(\mathbf{x})$ задаются формулами*

$$W_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A_i\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}_i, \mathbf{x}) + C_i, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

в которых числовые симметрические матрицы A_i, постоянные векторы $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^n$ и константы $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$A_1\Theta_1 - 2A_1^2 + \gamma\sigma_1 A_2 = 0, \quad A_2\Theta_2 - 2A_2^2 + \delta\sigma_2 A_1 = 0, \tag{6}$$

$$\mathbf{B}_1\Theta_1 - 2A_1\mathbf{B}_1 + \gamma\sigma_1 \mathbf{B}_2 = 0, \quad \mathbf{B}_2\Theta_2 - 2A_2\mathbf{B}_2 + \delta\sigma_2 \mathbf{B}_1 = 0, \tag{7}$$

$$C_1\Theta_1 - |\mathbf{B}_1|^2 + \gamma\sigma_1 C_2 = 0, \quad C_2\Theta_2 - |\mathbf{B}_2|^2 + \delta\sigma_2 C_1 = 0, \tag{8}$$

где введены обозначения

$$\Theta_1 = \operatorname{tr} A_1 + \alpha\sigma_1, \quad \Theta_2 = \operatorname{tr} A_2 + \beta\sigma_2, \tag{9}$$

$\operatorname{tr} A_i$ *– след матрицы A_i, $i = 1, 2$. Тогда нелинейная эллиптическая система вида* (1) *обладает частным точным многомерным решением следующего вида*

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\sigma_1} \ln W_1(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\sigma_2} \ln W_2(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Доказательство. После подстановки функций (10) в систему уравнений (1) и элементарных преобразований получим следующие равенства:

$$W_1\left(\Delta W_1 + \alpha\sigma_1\right) - |\nabla W_1|^2 + \gamma\sigma_1 W_2 = 0, \quad W_2\left(\Delta W_2 + \beta\sigma_2\right) - |\nabla W_2|^2 + \delta\sigma_2 W_1 = 0. \quad (11)$$

В силу симметричности матриц A_i, $i = 1, 2$ из (5) прямым вычислением находим

$$|\nabla W_i(\mathbf{x})|^2 = (A_i^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(A_i\mathbf{B}_i, \mathbf{x}) + |\mathbf{B}_i|^2, \quad \Delta W_i(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} A_i.$$

С учетом этих соотношений, приравнивая выражения при одинаковых степенях $\mathbf{x}$, равенства (11) сводятся к системе алгебраических уравнений (6)–(8). Что и требовалось доказать. $\square$

Рассмотрим вопрос о разрешимости системы матричных уравнений (6). Далее будем рассматривать только нетривиальные решения этой системы. Относительно искомых элементов матриц A_1, A_2 система (6) является системой скалярных алгебраических $n^2 + n$ уравнений с квадратичными нелинейностями. Хотя эта система уравнений является совместной, ее аналитическое решение представляет значительные трудности, связанные с нелинейностью и большим числом уравнений. Однако, как будет показано ниже, система матричных уравнений (6) допускает параметрические семейства частных точных решений. Так, имеет место утверждение.

Предложение 2. *Пусть* $\Theta_1 \neq 0$, $\Theta_2 \neq 0$, *тогда система матричных уравнений* (6) *обладает частным решением*

$$A_1 = \nu S E_m S^T, \quad A_2 = \frac{\nu}{\gamma\sigma_1}\left((2-m)\nu - \alpha\sigma_1\right) S E_m S^T, \quad (12)$$

где S *– произвольная ортогональная матрица,* E_m *– диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены* $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *единиц и* $n - m$ *нулей, а параметр* $\nu \neq 0$ *является вещественным корнем кубического уравнения*

$$(m-2)^3\nu^3 + 2\alpha\sigma_1(m-2)^2\nu^2 + \sigma_1\left(\alpha^2\sigma_1 - \beta\gamma\sigma_2\right)(m-2)\nu - \gamma\sigma_1^2\sigma_2(\alpha\beta - \gamma\delta) = 0 \quad (13)$$

и удовлетворяет неравенствам

$$(2-m)\nu - \alpha\sigma_1 \neq 0, \quad (14)$$

$$m\nu + \alpha\sigma_1 \neq 0, \quad \frac{(2-m)m}{\gamma\sigma_1}\nu^2 + \frac{m\alpha}{\gamma}\nu + \beta\sigma_2 \neq 0. \quad (15)$$

Доказательство. Будем отыскивать числовую симметрическую матрицу A_1 в виде $A_1 = \nu S E_m S^T$, где S – произвольная ортогональная матрица, E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, $\nu \neq 0$ – вещественный параметр, подлежащий определению. Отметим, что матрица E_m является идемпотентной [14], то есть $E_m = E_m^2$. После подстановки матрицы A_1 в первое матричное уравнение системы (6) и элементарных преобразований получим выражение для матрицы A_2 следующего вида:

$$A_2 = \frac{\nu}{\gamma\sigma_1}\left(2\nu - \Theta_1\right) S E_m S^T. \quad (16)$$

При этом имеем $\operatorname{tr} A_1 = m\nu$, $\operatorname{tr} A_2 = \dfrac{m\nu}{\gamma\sigma_1}(2\nu - \Theta_1)$. С учетом соотношений (9) находим

$$\Theta_1 = m\nu + \alpha\sigma_1, \quad \Theta_2 = \frac{(2-m)m}{\gamma\sigma_1}\,\nu^2 + \frac{m\alpha}{\gamma}\,\nu + \beta\sigma_2.$$

Так как по условию утверждения $\Theta_1 \neq 0$, $\Theta_2 \neq 0$, то должны быть выполнены неравенства (15). Подставляя выражение для Θ_1 в формулу (16), получим окончательный вид матрицы A_2, определяемый формулой (12). Теперь подставим матрицы (12) во второе матричное уравнение системы (6) и после несложных преобразований придем к равенству

$$\frac{\nu}{\gamma^2\sigma_1^2}\left[(m-2)^3\nu^3+2\alpha\sigma_1(m-2)^2\nu^2+\sigma_1\left(\alpha^2\sigma_1-\beta\gamma\sigma_2\right)(m-2)\nu-\gamma\sigma_1^2\sigma_2(\alpha\beta-\gamma\delta)\right]SE_mS^T=0.$$

По предположению $\nu \neq 0$, поэтому, чтобы это равенство обращалось в тождество, мы должны потребовать равенство нулю выражения, стоящего в квадратных скобках, которое можно рассматривать как кубическое уравнение (13) относительно искомого параметра ν. Поскольку кубическое уравнение имеет по крайней мере один вещественный корень, то построенные матрицы A_1, A_2 вида (12) с параметром ν будут также вещественными. Кроме того, найденный из уравнения (13) вещественный параметр ν должен удовлетворять условию (14), выполнение которого гарантирует нетривиальность матрицы A_2. Предложение доказано. □

Замечание 1. Пространственная структура решений определяется рангом матриц E_m. Если $\operatorname{rank} E_m = 1$, то имеем «псевдомногомерные» точные решения, то есть решения с линейной комбинацией пространственных переменных. Если $1 < \operatorname{rank} E_m < n$, то получим анизотропные по пространственным переменным точные решения. Наконец, если $\operatorname{rank} E_m = n$, то имеем радиально-симметричные по пространственным переменным точные решения.

Предложение 2 доказано в предположении $\Theta_1 \neq 0$, $\Theta_2 \neq 0$. Если система алгебраических уравнений (6)–(8) нагружена дополнительным условием $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$, то имеет место утверждение.

Предложение 3. *Пусть* $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$, *тогда система матричных уравнений* (6) *обладает частным решением*

$$A_1 = SDS^T, \quad A_2 = \frac{2}{\gamma\sigma_1}\,SD^2S^T, \tag{17}$$

где S *– произвольная ортогональная матрица,* D *– диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположен вещественный корень кубического уравнения*

$$\frac{8}{\gamma^2\sigma_1^2}\,\zeta^3 - \delta\sigma_2 = 0. \tag{18}$$

Пример 1. В этом примере, используя результаты предложений 1, 2, построим анизотропное по пространственным переменным, точное решение нелинейной эллиптической системы (1) в трехмерном случае. Для $n = 3$ матрицы E_m можно выбрать трех возможных рангов: $\operatorname{rank} E_1 = 1$, $\operatorname{rank} E_2 = 2$ и $\operatorname{rank} E_3 = 3$. Параметрические семейства решений, получаемые для матриц E_1, E_3, рассматривать не будем. Так как для матрицы E_1 получим «псевдомногомерные» решения, то есть решения с линейной комбинацией пространственных переменных, а для матрицы E_3 имеем радиально-симметричные точные решения. Итак, пусть ортогональная матрица S и матрица E_2 имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{3\sqrt{3}}{8} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} & -\dfrac{5}{8} \\ -\dfrac{1}{8} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \\ \dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основании предложения 2, для матрицы E_2 мы должны предъявить вещественные числа ν, которые должны удовлетворять кубическому уравнению (13) и условию (14). Для $m = 2$ неравенства (14), (15) эквивалентны условиям $\alpha\sigma_1 \neq 0$ и

$$2\nu + \alpha\sigma_1 \neq 0, \quad 2\alpha\nu + \beta\gamma\sigma_2 \neq 0, \tag{19}$$

а кубическое уравнение (13) переходит в равенство $\alpha\beta - \gamma\delta = 0$. При $\gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\delta}$ получаем частное точное, анизотропное по пространственным переменным параметрическое семейство решений нелинейной эллиптической системы уравнений (1) следующего вида:

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\nu}{128} f(x,y,z) + bx + \frac{6\beta c + 5\sqrt{3}\delta b}{9\delta} y - \frac{\beta c}{\delta} z + \frac{h}{54\nu\delta^2} \right),$$

$$V(x,y,z) = -\frac{1}{\sigma_1} \ln \left(-\frac{\nu\delta}{128\beta} f(x,y,z) - \frac{\delta b}{\beta} x - \frac{6\beta c + 5\sqrt{3}\delta b}{9\delta} y + cz - \frac{h}{54\nu\beta\delta} \right),$$

где введены обозначения

$$f(x,y,z) = 39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}\, xy + 20\sqrt{3}\, xz - 36yz,$$

$$h = 52b^2\delta^2 + 20\sqrt{3}\beta\delta bc + 39\beta^2 c^2,$$

$\nu \neq 0$, b, c – произвольные параметры, причем параметр ν должен удовлетворять неравенствам (19).

Пример 2. Нелинейная эллиптическая система уравнений (1) в трехмерном координатном пространстве обладает частным точным, анизотропным по пространственным переменным, решением

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{(a_1 x^2 + b_1 (y^2 + z^2))}{2}, \quad V(x,y,z) = -\frac{1}{\sigma_2} \ln \frac{(a_2 x^2 + b_2 (y^2 + z^2))}{2}.$$

Здесь

$$a_1 = \sigma_1 P, \quad P = \sqrt{(\alpha\beta - \gamma\delta)\frac{\alpha}{\beta}}, \quad a_2 = \frac{\beta\sigma_2 (\alpha\gamma\delta - \alpha^2\beta - (\alpha\beta - \gamma\delta)P)}{\alpha (\alpha\beta - \gamma\delta + \beta P)},$$

$$b_1 = \frac{\gamma\left(\beta\sigma_2(\alpha\beta - \gamma\delta) + (\beta^2\sigma_2 - \alpha\delta\sigma_1)P\right)}{2\alpha\left(\alpha\beta - \gamma\delta + \beta P\right)},$$

$$b_2 = \frac{\alpha(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha\delta\sigma_1 - 2\beta^2\sigma_2) + \beta(\alpha^2\delta\sigma_1 + \beta\gamma\delta\sigma_2 - 2\alpha\beta^2\sigma_2)P}{2\alpha\left(\alpha\beta - \gamma\delta + \beta P\right)}.$$

Отметим, что это частное решение получено без использования результатов утверждения 2. Конкретно, решалась система матричных уравнений (6) для случая $n = 3$ в предположении, что матрицы A_1, A_2 являются диагональными.

2. Многомерные анизотропные решения обобщенного уравнения Лиувилля

Как было отмечено выше, нелинейная эллиптическая система (1) заменой $V = \varepsilon_1 U + \varepsilon_2$, $\sigma_1 = \varepsilon\sigma_2$, $\alpha = \beta/\varepsilon_1$, $\gamma = \delta\exp\left(3\varepsilon_2\sigma_2\right)/\varepsilon_1$ сводится к известному уравнению Лиувилля. Кроме того, полагая $\sigma_1 = 0$ или $\sigma_2 = 0$, система (1) сводится к уравнению вида

$$\Delta U = \alpha e^{\sigma U} + \beta e^{2\sigma U}, \tag{20}$$

которое будем называть обобщенным уравнением Лиувилля. При $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ уравнение (20) сводится к обычному уравнению Лиувилля с одной экспонентой.

Предложение 4. *Обобщенное уравнение Лиувилля* (20) *обладает точным многомерным решением вида*

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\sigma}\ln W(\mathbf{x}), \tag{21}$$

где функция $W(\mathbf{x})$ задается формулой (4)*, в которой числовая симметрическая матрица A, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений*

$$A\Theta - 2A^2 = 0, \quad \mathbf{B}\Theta - 2A\mathbf{B} = 0, \quad C\Theta - |\mathbf{B}|^2 + \beta\sigma = 0, \tag{22}$$

где введено обозначение $\Theta = \operatorname{tr} A + \alpha\sigma$.

В справедливости данного предложения можно убедиться непосредственной подстановкой формулы (21) в уравнение (20). При подстановке (21) в формулу (20), с учетом вида функции (4), после упрощения, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\mathbf{x}$, придем к системе алгебраических уравнений (22).

Рассмотрим разрешимость матричного уравнения (22). Будем рассматривать только нетривиальные решения этого уравнения, в предположении что $\Theta \neq 0$. В противном случае, матричное уравнение $A^2 = 0$ в классе симметричных матриц имеет решением вещественную матрицу $A = 0$.

Предложение 5. *Пусть E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 3, \ldots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей. Тогда матрица*

$$A = \nu S E_m S^T, \quad \nu = \frac{\alpha\sigma}{2 - m}, \tag{23}$$

где S – произвольная ортогональная матрица, является решением матричного уравнения (22).

Доказательство. След матрицы A, определяемой по формуле (23), имеет вид

$$\operatorname{tr} A = m\nu \equiv \frac{\alpha\sigma m}{2-m}. \tag{24}$$

Учитывая соотношение (24), запишем матричное уравнение (22) как $\nu\, A = A^2$. Решением этого матричного уравнения является $A = \nu\, P$, где P – произвольная идемпотентная матрица, т.е. матрица, удовлетворяющая равенству $P^2 = P$. Известно [14], что любую идемпотентную матрицу P можно записать как $P = ME_mM^{-1}$, где M – произвольная невырожденная матрица порядка n, E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ единиц и $n-m$ нулей; E_m также является идемпотентной: $E_m^2 = E_m$. Так как нам нужны только симметрические матрицы A, то идемпотентные матрицы P мы возьмем также симметрическими, т.е. $P = SE_mS^T$, где S – произвольная ортогональная матрица. Таким образом, получаем окончательный вид матрицы A, определяемой формулой (23). Утверждение доказано. □

Уравнения (22) являются системой n линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент $b_1, \ldots, b_n$ искомого вектора $\mathbf{B}$. Для любой зафиксированной матрицы (23) с $\operatorname{rank} A = m < n$ всегда существует нетривиальное решение линейной однородной системы, причем компоненты $b_1, \ldots, b_m$ вектора $\mathbf{B}$ могут быть выбраны произвольно из m-мерного линейного многообразия. В случае когда $\operatorname{rank} A = m \equiv n$, т.е. при $E_m \equiv E$, линейная однородная система уравнений имеет решение – произвольный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$. По найденным решениям матричного и векторного уравнений постоянные C находятся из скалярных уравнений (22) единственным образом.

Пример 3. Пусть $n = 4$, тогда обобщенное уравнение Лиувилля (20) обладает точным, анизотропным по пространственным переменным решением (21), где функция $W(\mathbf{x}) = W(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеет вид

$$W(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha\sigma}{128}\left(39x_1^2 + 37x_2^2 + 52x_3^2 + 64x_4^2 + 30\sqrt{3}\,x_1x_2 + 20\sqrt{3}\,x_1x_3 - 36x_2x_3\right) +$$

$$+b_1x_1 + \left(\frac{5}{9}\sqrt{3}\,b_1 - \frac{2}{3}\,b_2\right)x_2 + b_2x_3 + b_3x_4 - \frac{1}{54\sigma}\left(52b_1^2 - 20\sqrt{3}\,b_1b_2 + 39b_2^2 + 27b_3^3\right) + \frac{\beta}{2\alpha},$$

где b_i, $i = 1, 2, 3$ – произвольные постоянные.

Заключение

В статье получены формулы новых анизотропных решений нелинейной кинетической модели, описываемой эллиптической системой (1) и уравнением Лиувилля (20). Найденные в статье явные формулы точных решений, выражаемые в элементарных функциях, могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, так как их можно использовать в качестве рабочих режимов электрофизической аппаратуры, а также для апробирования и отладки численных методов и программных комплексов построения приближенных решений краевых задач.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-08-00746 и № 20-07-00397).

Литература

1. Markov, Y. Steady State Solutions of the Vlasov-Maxwell System and Their Stability / Y. Markov, G. Rudykh, N. Sidorov, A. Sinitsyn, D. Tolstonogov // Acta Applicandae Mathematica. – 1992. – V. 28, № 3. – P. 253–293.
2. Сидоров, Н.А. Стационарная система Власова – Максвелла в ограниченных областях / Н.А. Сидоров, А.В. Синицын // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2003. – P. 50–88.
3. Sidorov, N. Toward General Theory of Differential Operator and Kinetic Models / N. Sidorov, D. Sidorov, A. Sinitsyn. – Singapore: World Scientific, 2020.
4. Журавлев, В.М. Диффузионные цепочки Тоды в моделях нелинейных волн в активных средах / В.М. Журавлев // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1998. – Т. 114, вып. 5. – С. 1897–1914.
5. Журавлев, В.М. Об одном классе моделей автоволн в активных средах с диффузией, допускающих точные решения / В.М. Журавлев // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1997. – Т. 65, вып. 3. – С. 285–290.
6. Polyanin, A.D. Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering / A.D. Polyanin, A.M. Kutepov, A.V. Vyazmin, D.A. Kazenin – London; N.Y.: Taylor & Francis, 2002.
7. Капцов, О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными / О.В Капцов. – М.: Физматлит, 2009.
8. Шмидт, А.В. Точные решения систем уравнений типа реакция-диффузия / А.В. Шмидт // Вычислительные технологии.– 1998. – Т. 3, № 4. – С. 87–94.
9. Cherniha R., King J.R. Non-Linear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansatze and Exact Solutions / R. Cherniha, J.R. King. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2005. – V. 308. – P. 11–35.
10. Косов, А.А. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции-диффузии / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 108–122.
11. Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев – М.: Физматлит, 2002.
12. Полянин, А.Д. Нелинейные уравнения математической физики. Ч. 1 / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев – М.: Физматлит, 2017.
13. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Ч. 2 / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев – М.: Физматлит, 2017.
14. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988.

Александр Аркадьевич Косов, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), kosov_idstu@mail.ru.

Эдуард Иванович Семенов, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), edwseiz@gmail.com.

Поступила в редакцию 15 сентября 2020 г.

MSC 35J47, 35J60 DOI: 10.14529/mmp200404

ANISOTROPIC SOLUTIONS OF A NONLINEAR KINETIC MODEL OF ELLIPTIC TYPE

A.A. Kosov[1]***, E.I. Semenov***[1]
[1]Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation
E-mails: kosov_idstu@mail.ru, edwseiz@gmail.com

We consider a nonlinear kinetic model described by a system of two equations in partial derivatives of the elliptic type with exponential nonlinearities. We propose to construct exact solutions of the mathematical model in the class of logarithms from quadratic functions of spatial variables. The solution coefficients of the model are found from systems of square matrix and linear vector equations. In particular, the proposed approach is used to construct anisotropic solutions to the Liouville equation, often used as a mathematical model of stationary distributions in plasma physics. We illustrate the results by a number of examples.

Keywords: kinetic model; nonlinear elliptic system; Liouville equation; matrix equations; exact solutions.

References

1. Markov Y., Rudykh G., Sidorov N., Sinitsyn A., Tolstonogov D. Steady State Solutions of the Vlasov–Maxwell System and Their Stability. *Acta Applicandae Mathematica* 1992, vol. 28, no. 3, pp. 253–293.
2. Sidorov N.A., Sinitsyn A.V. [Stationary Vlasov–Maxwell System in Bounded Areas] *Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations*, Moscow, Fizmatlit, 2003, pp. 50–88. (in Russian)
3. Sidorov N., Sidorov D., Sinitsyn A. *Toward General Theory of Differential Operator and Kinetic Models*. Singapore, World Scientific, 2020. DOI: 10.1142/11651
4. Zhuravlev V.M. Diffusive Toda Chains in Models of Nonlinear Waves in Active Media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1998, vol. 87, no. 5, pp. 1031–1039.
5. Zhuravlev V.M. On One Class of Models of Autowaves in Active Media with Diffusion, Admitting Exact Solutions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 1996, vol. 65, no. 3, pp. 300–304.
6. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*. London, N.Y., Taylor & Francis, 2002.
7. Kapcov O.V. *Metody integrirovaniya uravnenij s chastnymi proizvodnymi* [Integration Methods for Partial Differential Equations]. Moscow, Fizmatlit, 2009. (in Russian)
8. Shmidt A.V. Exact Solutions of Systems of Equations of the Reaction-Diffusion Type. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 87–94. (in Russian)
9. Cherniha R., King J.R. Non-Linear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansatze and Exact Solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, vol. 308, pp.11–35.
10. Kosov A.A., Semenov E.I. On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of Reaction-Diffusion Equations. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 106–120.

11. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations Second Edition, Updated, Revised and Extended.* Boca Raton, London, N.Y., Chapman & Hall/CRC Press, 2012.
12. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Nelinejnye uravneniya matematicheskoj fiziki. Uchebnoe posobie. Chast' 1* [Nonlinear Equations of Mathematical Physics. Part 1]. Moscow, Fizmatlit, 2017. (in Russian)
13. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Nelinejnye uravneniya matematicheskoj fiziki. Chast' 2* [Nonlinear Equations of Mathematical Physics. Part 2]. Moscow, Fizmatlit, 2017. (in Russian)
14. Gantmaxer F.R. *Teoriya matric* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)

Received September 15, 2020