

УДК 621.3

ОБОСНОВАНИЕ ВВЕДЕНИЯ В УЧЕБНЫЙ КУРС ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ ПРОЦЕДУРЫ ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ ПО МУРУ–ПЕНРОУЗУ

М.И. Грамм, И.Е. Киесин

Рассмотрены варианты применения функций, содержащихся в распространённых математических пакетах для ПК, но не задействованных в стандартных курсах математики и метрологии в силу традиции, стереотипов преподавания и т. п. На примерах практики обработки экспериментальных данных в электротехнике показана производительность и компактность современных процедур обработки данных, полученных в экспериментах.

Ключевые слова: экспериментальные данные, погрешность, среднеквадратичное отклонение, минимизация ошибки, псевдообращение, ортогональные полиномы.

Предлагаемое сообщение имеет целью последовательным развитием обсуждения достаточно тривиальных и общеупотребительных приёмов обработки экспериментальных данных до мотивированного предложения использовать функции и операции, содержащиеся в арсенале современных математических пакетов, но не задействованных в актуальном учебном процессе в силу традиций, оценок кажущейся сложности, неквалифицированности аудитории и т. п.

Начнём обсуждение с простого примера обработки данных при экспериментальном определении величины R сопротивления линейного резистора. Пусть в n экспериментах получены величины I_i ($i = 1, 2, \dots, n$) токов, список которых оформим как компоненты вектора:

$$\mathbf{I} = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_n]. \quad (1)$$

Соответствующие токам по (1) напряжения U_i также сведём в вектор:

$$\mathbf{U} = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n]. \quad (2)$$

Если бы величина R сопротивления точно воспроизводилась в каждом опыте, то система из n уравнений

$$\mathbf{I} \cdot R = \mathbf{U} \quad (3)$$

имела бы единственное точное решение для величины R . Этой ситуации соответствует точная коллинеарность векторов \mathbf{U} и \mathbf{I} . Однако в практических экспериментах это не так и имеет место ненулевой вектор разницы:

$$\mathbf{U} - \mathbf{I} \cdot R \neq 0. \quad (4)$$

Кратчайшее расстояние между векторами \mathbf{I} и $\mathbf{U} - \mathbf{I} \cdot R$ будет измеряться по перпендикуляру к вектору \mathbf{I} , что аналитически оформляется как требование ортогональности между ними:

$$\mathbf{I}^T \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{I} \cdot R) = 0. \quad (5)$$

Отсюда получаем оптимальное решение системы (3) из несовместных уравнений:

$$R = \frac{\mathbf{I}^T \cdot \mathbf{U}}{\mathbf{I}^T \cdot \mathbf{I}}. \quad (6)$$

Часто полагают, что в случае комплексного параметра, исследуемого в эксперименте, подход по (6) неприменим. Это не так. Рассмотрим пример.

Пусть на основе комплекта экспериментальных данных из n показаний ваттметра, вольтметра и амперметра требуется получить линейную модель в комплексной форме $Z = jx_L + R$ реальной катушки.

Каждая строка системы уравнений типа (3) в этом случае может иметь вид, следующий из определения комплексной формы полной мощности:

$$I_i^2 \cdot Z = P_i + j\sqrt{(U_i \cdot I_i)^2 - P_i^2}, \quad (7)$$

где U_i и I_i – действующие значения напряжений и токов в i – ом эксперименте, P_i – показание ваттметра.

Отметим, что для того, чтобы при вычислениях с комплексными величинами, скалярное произведение давало вещественную величину (например, квадрат длины вектора) второй компонент произведения берут с комплексно сопряжёнными элементами. В большинстве математических пакетов для ПК это заложено в программы.

Пример для расчёта параметров реальной катушки в пакете MathCAD:

<u>ORIGIN</u> := 1	$i := 1..5$	Номера и количество экспериментов
$I := (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$	$I := I^T$	Токи в экспериментах
$U := (23 \ 47 \ 70 \ 87 \ 112)$	$U := U^T$	Напряжения
$P := (12 \ 21 \ 45 \ 60 \ 83)$	$P := P^T$	Мощности
$M_i := (I_i)^2$		Вектор левой части
<u>N</u> _{i} := $P_i + j \cdot \sqrt{[(U_i \cdot I_i)^2 - (P_i)^2]}$		Вектор правой части
$Z := \frac{(M \cdot N)}{(M \cdot M)}$	$Z = 3.612 - 22.025i$	

Программа даёт комплексное сопротивление реальной катушки с минимальной суммой квадратов отклонений и допускает любое количество экспериментов. Очевидно, программа достаточно универсальна и позволяет обрабатывать экспериментальные данные в любом случае оптимальных измерений комплексного параметра.

Описанная выше логика использования скалярных произведений для оптимальной обработки массивов разного рода данных с наименьшей сум-

мой квадратов отклонений лежит в основе внешне гораздо более сложной процедуры Мура–Пенроуза. Опишем её кратко на примере.

Предположим, что некоторый набор экспериментальных данных \mathbf{I} и \mathbf{U} предназначен для вычисления коэффициентов кубичной $m = 3$ аппроксимации $u(i) = a_0 + a_1 \cdot i + a_3 \cdot i^3$ вольтамперной характеристики нелинейного резистора. Экспериментальные данные, конечно, точно не следуют назначенной кубичной зависимости и следствием этой естественной неточности будет несовместность уравнений в системе:

$$\begin{bmatrix} 1 & i_1 & i_1^3 \\ 1 & i_2 & i_2^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & i_n & i_n^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}. \quad (8)$$

Если бы число экспериментов равнялось числу искоемых коэффициентов аппроксимации (что, к сожалению, до сих пор рекомендуют во многих руководствах с ущербом для числа n возможных экспериментов), то матрица \mathbf{M} оказалась бы квадратной и решение $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{U}$ для (8) оказалось бы точным и единственным в связи с простой обратимостью квадратных матриц. Но необходимость учёта большого числа экспериментов приведёт к $n > m$, как в примере (8) и обычное обращение матрицы \mathbf{M} исключено, поскольку она в этом случае оказывается прямоугольной размером $n \times m$.

Тем не менее, в большинстве современных математических пакетов существует функция так называемого обобщённого обращения *generalized inversion* (в MathCAD имеет вид $\text{geninv}(\mathbf{M})$) матриц любых размеров, называемого в отечественной литературе псевдоинверсией, [1], и позволяющего обращать матрицы по формуле, напрямую следующей из сопоставления с (6) в предположении, что \mathbf{M} является некоторым вектором размера $n > m$, а деление на скалярное число $\mathbf{I}^T \cdot \mathbf{I}$ следует заменить обращением матриц:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{M}^+ \cdot \mathbf{U}. \quad (9)$$

Отметим, что операция по (9) в случае квадратной \mathbf{M} переходит в обычное обращение. Сначала Э. Мур в 1924 году предложил эту процедуру, а затем только в 1955 году Р. Пенроуз окончательно подтвердил, что получаемые по (9) значения компонентов \mathbf{A} дают наименьшую сумму квадратов отклонений левой и правой частей (8).

Этому трудному пути в теоретической статистике чрезвычайно полезной процедуры (9) соответствует практически полное до сих пор её отсутствие в современных учебных руководствах по обработке экспериментальных данных. А между тем, кроме компактности процедуры (9), её радикальным преимуществом как способа организации обработки экспериментов по (8)-(9) является возможность учёта любого числа экспериментальных данных. В частности, нет необходимости это число n увязывать с порядком используемой, например, полиномиальной аппроксимации. Особо, конечно,

следует отметить здесь и наступление нового уровня использования процедуры (9) с разработкой программного обеспечения матричных операций в современных ПК. Потенциал этих операций в учебных курсах используется далеко не полно. В этой связи необходимо сделать несколько замечаний.

Из-за компактности освещения вопросов аппроксимирования аналитическими выражениями экспериментальных зависимостей в курсах математики для технических специальностей до сих пор преподаётся, например, установка, что для повышения идентичности искомой аналитической зависимости экспериментам следует повышать её порядок (например, увеличивать степень и количество слагаемых в аппроксимирующем полиноме или же, например, увеличивать число членов ряда Фурье для уточнения разложения периодических функций).

Дело в том, что повышение порядка аппроксимирующей функции чревато появлением высокого порядка производных функции по аргументу, соответствующих «быстрым движениям» между точками отсчётов, где аппроксимирующая функция «ни за что не отвечает». Это приводит к «открытиям» неких «дополнительных возможностей» в нелинейных цепях – в выпрямительных схемах с «высшими гармониками» для компенсации реактивной мощности и т.п. явлений, которых в реальных схемах нет. В частности, продуктом такой ошибки является так называемое «явление Гиббса» – появление выброса на фронте импульса при его описании длинным рядом Фурье. Естественно, такого выброса в реальной схеме не может быть!

Другим изъяном учебных курсов, который процедура по (9) могла бы компенсировать, является отсутствие сведений об удобстве взаимной ортогональности слагаемых функций в аппроксимирующем выражении. Только тогда при переходе к следующему компоненту нет надобности уточнять предыдущие (например, такая ортогональность соблюдается среди слагаемых ряда Фурье). В этой связи «за бортом» познаний студента остаётся понимание причин существования взаимно ортогональных слагаемых типа полиномов Лежандра (они есть в инженерном пакете MathCAD!), полиномов Чебышёва, функций Уолша, Хаара и т. п. Многие из этих наборов содержатся в современном ПО персональных компьютеров.

Библиографический список

1. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

[К содержанию](#)