УДК 624.07:534

ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫ С УЧЁТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И КОНСТРУКТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПРИ ЗАПРОЕКТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Е.М. Уфимцев

Показано приложение метода временного анализа к задачам динамщики стержневых систем с учётом упругопластической работы материала. Приведены примеры динамического расчёта плоской 3-х-стержневой ферменной конструкции как физически и конструктивно нелинейной системы при действии синусоидального импульса.

Ключевые слова: временной анализ, метод, математическая модель, билинейная диаграмма, перемещения, нелинейная восстанавливающая сила, физическая нелинейность, конструктивная нелинейность, гистерезис.

Введение. Современные конструкции работают в условиях сверхнормативных нагружений, обусловленных различными запроектными воздействиями (импульс, удар, взрыв), в результате чего напряжения в сечениях несущих элементов нередко превышают предел упругости. В связи с этим, одной из актуальных проблем расчёта конструкций, является проблема учёта работы материала с учётом его пластических свойств. Экспериментальные исследования в этом направлении показывают, что поведение материалов в этом случае может быть довольно сложным [1] и связано с накоплением необратимых остаточных деформаций. В несущих элементах конструкций могут протекать процессы нелинейного деформирования, имеющего гистерезисный характер. При этом форма и размеры петель будут зависеть от величин и знаков пластических деформаций, которые, в свою очередь, определяются конструктивной схемой сооружения, физико-механическими свойствами материала и нагрузкой.

На сегодняшний день разработаны и внедрены в практику вычислительные методы, позволяющие проводить расчёты в такой постановке [2, 3], однако большинство из них построено на численных подходах. С одной стороны, это делает возможным решение широкого спектра задач, а с другой – остаётся открытым вопрос адекватности результатов расчётов и оценки действительного состояния конструкций. Развитие же аналитических подходов, о важности которых отмечено в работе [4], позволило бы строго оценивать точность полученного решения. Одним из таких подходов является метод временного анализа, основанный на исследовании характеристического матричного квадратного уравнения [5].

В данной статье рассматривается проблема расчёта конструкций указанным методом с учётом упругопластической работы материала при действии динамических нагрузок. Приводятся примеры расчёта статически нагруженной плоской стальной фермы как системы с физической и конструктивной нелинейностью при действии импульсной нагрузки.

Математическая модель упругопластического расчёта. Уравнение движения дискретной диссипативной системы (*ДДС*) и начальные условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{Y}(t) + CY(t) + R(t) = Q + P(t), \\ Y(t_0) = Y_0,\ \dot{Y}(t_0) = \dot{Y}_0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где M = diag (m_1, ... , m_n), $C = C^{\mathrm{T}}$ – матрицы масс и демпфирования; $Y(t)$, $R(t)$ – векторы перемещений и динамических восстанавливающих сил (*ДВС*); Q, $P(t)$ – векторы статической (собственный вес) и динамической нагрузок.

Для системы с физической нелинейностью вектор ДВС состоит из следующих слагаемых (рис. 1):

– для упругой системы (участок диаграммы *OA*):

$$R(t) = KY(t),$$

– для упругопластической системы (участки *AB, BC*):

$$R(t) = R_{ke}(t) + R_u(t_j) - R_p(t_j). \quad (2)$$

Составляющая $R_{ke}(t) = K_j \cdot Y(t)$ – вектор квазиупругих усилий, где K_j – матрица жёсткости системы в момент t_j (точка A на диаграмме), t_j – время перехода квазиупругой

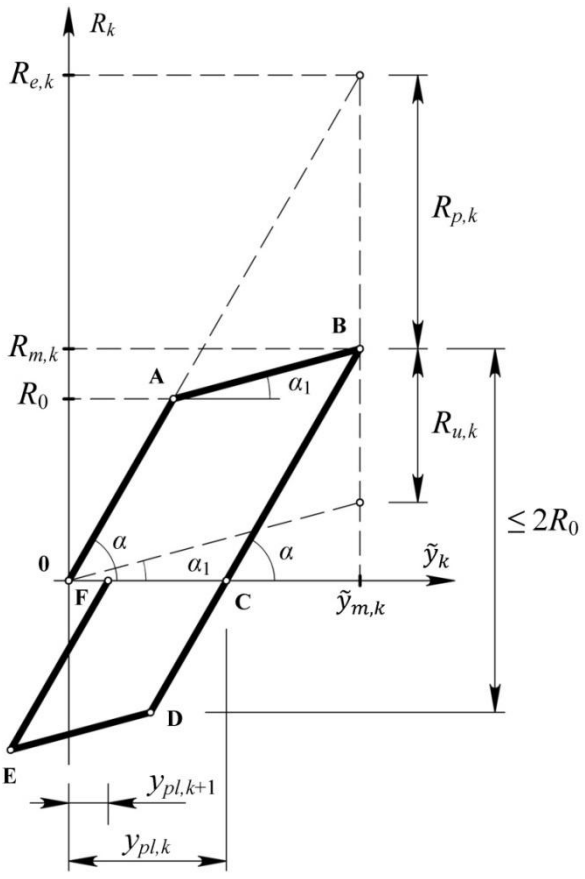

Рис. 1. Билинейная диаграмма жёсткости системы

системы из одного промежуточного состояния в другое (начало текучести в некотором несущем элементе). Здесь $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha_1$ – жёсткости некоторого несущего элемента, соответственно, на участках *OA* и *AB*.

Составляющая $R_u(t_j) = \Delta K_j \cdot Y(t_j)$ – есть вектор предельных значений (на рис. 1 приведена *k*-я компонента этого вектора), где $\Delta K_j = K_{j-1} - K_j$ – разность матриц жёсткости, соответствующих предыдущему (участок *OA*) и текущему (участок *AB*) состояниям системы.

Составляющая $R_p(t_j) = K_j \cdot Y_{pl}(t_j)$ – суть вектор остаточных усилий. При достижении экстремальных деформаций (в момент времени t_j) в несущем элементе начинается разгрузка (участок *BC*). В результате этого он приобретает необратимые остаточные напряжения и деформации, что в координатах $R \sim \tilde{y}$ выражается векторами $R_p(t_j)$ и $Y_{pl}(t_j)$, постоянными на интервале $[t_j, t_{j+1}]$, где $Y_{pl}(t_j)$ – вектор пластических перемещений.

На участках 2-го полуцикла диаграммы компоненты ДВС вычисляются согласно (2) с учётом накопленных остаточных перемещений:

– участок *CD:*

$$R(t) = K_j \cdot [Y(t) - Y_{pl,k}],$$

– участок *DE:*

$$R_u(t_j) = K_j \cdot [Y(t) - Y_{pl,k}] + \Delta K_j \cdot [Y(t_j) - Y_{pl,k}],$$

– участок *EF:*

$$R(t) = K_j \cdot [Y(t) - Y_{pl,k+1}].$$

Согласно (2), система (1) на квазиупругом интервале $[t_j, t_{j+1}]$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} M_j \ddot{Y}(t) + C_j Y(t) + K_j Y(t) = P(t) + Q - R_u(t_j) + R_p(t_j), \\ Y(t_j) = Y_0,\ \dot{Y}(t_j) = \dot{Y}_0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

На этом же интервале характеристическое матричное квадратное уравнение (для однородного ОДУ в (3)) представляется в следующем виде: $M_j S^2 + C_j S + K_j = 0$.

Матричные корни S_k $(k = 1, 2)$ этого уравнения позволяют построить фундаментальные решения для однородной задачи с помощью фундаментальной матрицы $\Phi(t) = \mathrm{e}^{St}$. Система разрешающих уравнений динамической задачи (3) для случая действия синусоидального импульса $P(t) = P_0 \cdot \sin(\theta t)$ $(t \in [t_j, t_{j+1}])$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} Y(t) = 2\mathrm{Re}\,\{Z(t)\},\ \dot{Y}(t) = 2\mathrm{Re}\,\{S_j \cdot Z(t)\}, \\ \ddot{Y}(t) = 2\mathrm{Re}\,\{S_j^2 \cdot Z(t)\} + M_j^{-1}[Q + P(t) - R_u(t_j) + R_p(t_j)], \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где:

$$\left.\begin{aligned} Z(t) = Z_0(t-t_j) + Z^{QR}(t-t_j) + Z^P(t-t_j), \\ Z_0(t-t_j) = \Phi(t-t_j) U_j^{-1} M_j [-\bar{S}_j Y_0 + \dot{Y}_0], \\ Z^{QR}(t-t_j) = [\Phi(t-t_j) - E](U_j S_j)^{-1}[Q - R_u(t_j) + R_p(t_j)], \\ Z^P(t-t_j) = \{S[\Phi(t-t_j)\sin(\theta t_j) - \sin(\theta t)] + \\ \quad + [\Phi(t-t_j)\cos(\theta t_j) - \cos(\theta t)]\theta\}[U_j (S_j^2 + E\theta^2)]^{-1} P_0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Здесь: $U_j = M_j S_j + S_j^{\mathrm{T}} M_j + C_j$; Q – вектор статической нагрузки от собственного веса конструкции; P_0 – вектор амплитуд импульсной нагрузки; $\theta = \pi / t_a$; t_a – длина импульса.

Соотношения (4) представляют собой кинематические параметры реакции упругопластической системы (перемещения, скорости и ускорения), с помощью которых можно получить силовые параметры реакции (векторы восстанавливающих (2), диссипативных и инерционных сил):

$$F(t) = C_j \dot{Y}(t),\ I(t) = -M_j \ddot{Y}(t). \qquad (6)$$

Появление нелинейных составляющих вектора восстанавливающих сил (2) в выражении вектора ускорений в (4) связано с тем, что в квазиупругих состояниях системы эти составляющие входят в выражение правой части уравнения (3).

По характеру кинематических параметров реакции (4) вектор-функции перемещений и скоростей – непрерывны, что обеспечивается постановкой начальных условий Y_0, $\dot{Y}_0$ на границах квазиупругих интервалов. Для вектор-функции ускорений в силу дискретного изменения величин S, R_u и R_p величина $\ddot{Y}(t)$ во временных точках $t_j, t_{j+1}, \ldots$ будет иметь разрывы.

Непрерывность силового параметра $R(t)$ для физически нелинейной задачи обеспечивается принятой математической моделью (2); для случая конструктивно нелинейной задачи $R(t)$ будет иметь разрывы, связанные с внезапным изменением жесткостных параметров системы вследствие выключения несущего элемента в момент времени t_j. Другие два силовых параметра (диссипативные $F(t)$ и инерционные $I(t)$ силы) представляют собой разрывные функции в точках перехода квазиупругой системы из одного состояния в другое (6). В работе [6] получены аналитические выражения скачков для параметров реакции $\ddot{Y}(t), F(t), I(t)$, которые зависят от жесткостных, демпфирующих и инерционных характеристик системы.

Пример. В качестве примера рассмотрена задача колебаний плоской ферменной конструкции как системы с двумя степенями свободы (рис. 2). Элементы системы имеют квадратные поперечные сечение со сторонами: *1*–2,6 см, *2*–1,0 см, *3*–2,5 см – и выполнены из стали 09Г2 с начальным модулем упругости E = 210060 МПа. Узловая масса m = 10 т. Векторы перемещений и статической нагрузки, а также матрица масс имеют вид:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

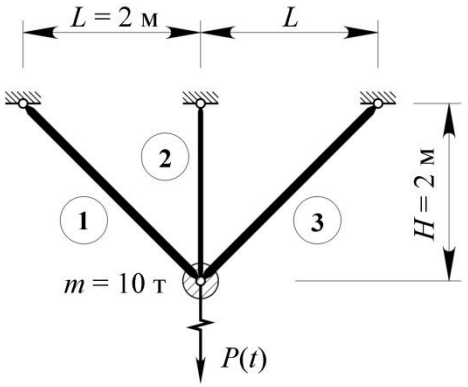

Рис. 2. Расчётная динамическая модель ферменной конструкции

Элементы матриц жёсткости K_j и демпфирования C_j вычисляются в процессе временного анализа. Матрица C_j строится по модели непропорционального демпфирования [5].

Решение задачи проводилось в 2-х вариантах: без учёта и с учётом потери устойчивости центрального стержня при его упругопластическом деформировании.

Вектор амплитуд внешней нагрузки для 1-го варианта составляет – $P_0 = [0, 425]^T$ кН; для 2-го – $P_0 = [0, 250]^T$ кН. Продолжительность импульсов в обоих вариантах – $t_a = 0{,}01$ с.

Анализ результатов. При рассмотрении 1-го варианта задачи на стадии нелинейной работы система находится в состоянии циклического упругопластического деформирования 2-го стержня. За наступившими пластическими деформациями следует разгрузка. Этот процесс имеет гистерезисный характер (рис. 3). Согласно представленной математической модели расчёта (2), характерные точки диаграммы находятся в соответствии с временными точками t_j, разделяющими процесс упругопластической реакции системы на квазиупругие интервалы. По окончании нелинейного процесса система переходит в стадию упругого деформирования с учётом накопленных остаточных деформаций в центральном стержне.

При реализации разрешающих уравнений (4)–(6) положения характерных точек (рис. 3) находятся следующим образом. Точка *A* определяется из условия достижения нормальными напряжениями в стержне предела текучести σ_T, а положение точки *B* – из условия достижения в элементе экстремальных деформаций. Нахождение точки *D* связано с использованием принципа Мазинга [1], согласно которому переход к неупругому деформированию во втором полуцикле происходит после упругого деформирования на величину, равную двум пределам текучести. Расстояния между соответствующими точками в последующих гистерезисных петлях уменьшалось в среднем на 4 %. Положение точек *E*, *F*, … в этих петлях определялось аналогично предыдущим точкам.

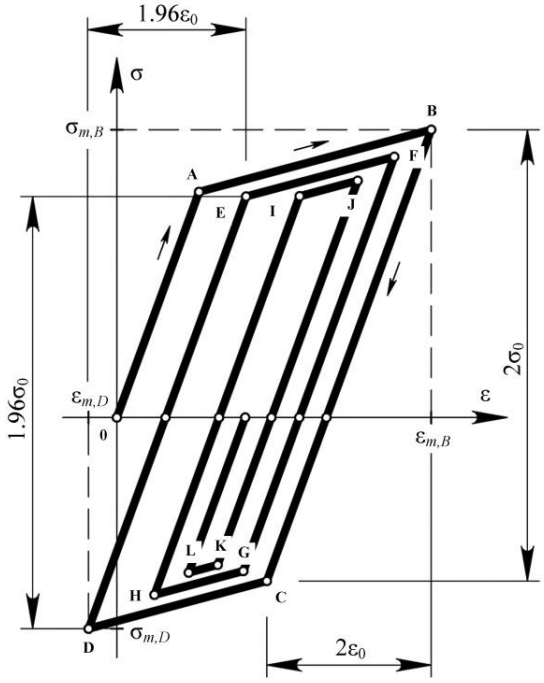

Рис. 3. Диаграмма циклического продольного деформирования материала стержня № 2

Во 2-м варианте задачи центральный стержень после упругопластического деформирования и разгрузки (1-й полуцикл диаграммы) выключился из работы вследствие потери устойчивости при критическом сжимающем напряжении σ_{cr} = 4,11 МПа. После этого работа системы происходила в упругой стадии без накопленных остаточных деформаций.

В табл. 1 приведены параметры собственных колебаний фермы для 3-х состояний: упругого (столбец 1) и упругопластического (столбец 2) и при выключении центрального стержня (столбец 3).

Таблица 1

Параметр собственных колебаний	Состояния системы		
	Упругое (начальное)	Упругопластическое	Упругое при выключении элемента
Частоты ω, $с^{-1}$	69,26 76.90	68,14 70,86	68,12 70,85
Коэффициенты демпфирования ε, $с^{-1}$	0,739 0,834	0.725 0,780	0.905 0,975

На рис. 4, *а*, *б*, для 2-х вариантов решения, показаны осциллограммы кинематических параметров реакции системы – горизонтальных и вертикальных перемещений массы *m*. Вертикальные перемещения совершаются относительно ненулевой асимптоты, высота которой меняется в моменты перехода системы в новое состояние, а для перемещений массы в горизонтальном направлении характерны те же эффекты, что и для вертикальных колебаний, но они выражены значительно слабее.

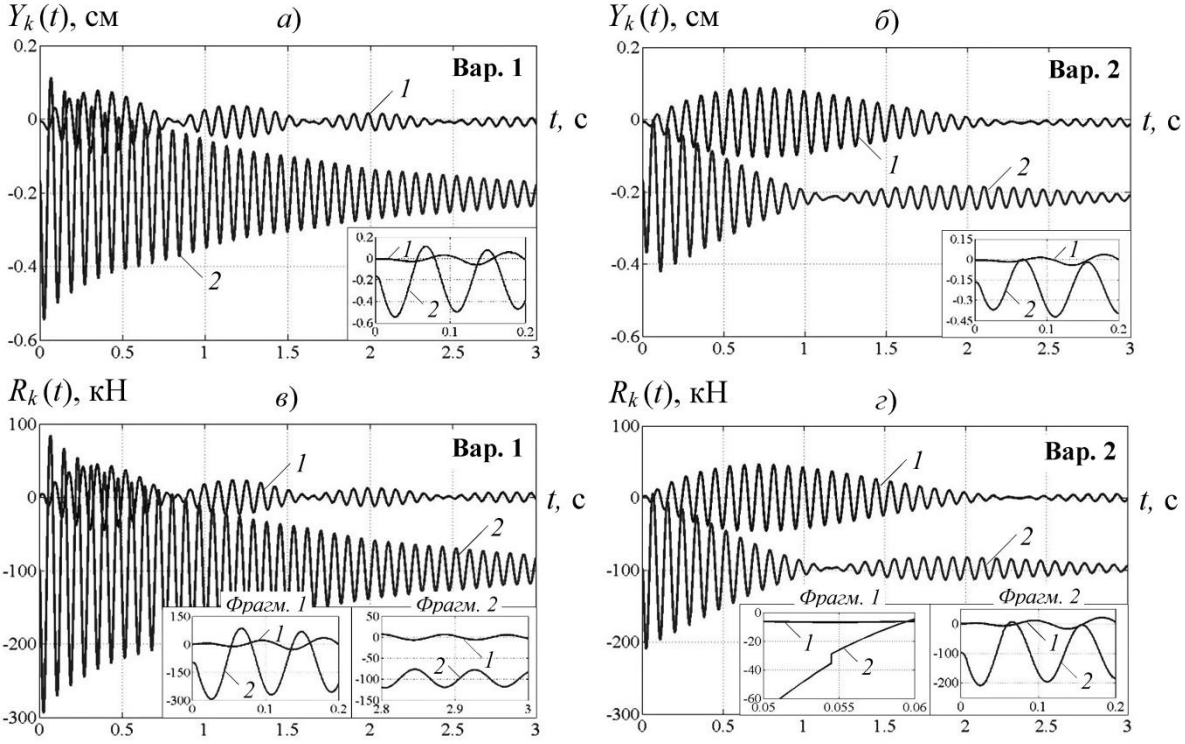

Рис. 4. Осциллограммы параметров реакции системы:
а), *б*) перемещения; *в*), *г*) восстанавливающие силы
(*1* – по горизонтали, *2* – по вертикали)

На рис. 4, *в*, *г* представлены осциллограммы силовых параметров реакции – восстанавливающих сил. Для 1-го варианта решения (*в*) графики непрерывны, а для 2-го (*г*) – на осциллограмме восстанавливающих сил в вертикальном направлении в момент выключения центрального стержня возникает разрыв (фрагм. 1). Вертикальная восстанавливающая сила, как следует из графика, имеет асимптоту, высота которой численно равна значению статического усилия *Q*.

На рис. 5 приведены осциллограммы нормальных напряжений в стержнях. Из графиков видно, что пластические деформации имеют место только в среднем стержне (рис. 2), о чём свидетельствуют пологие участки. В 1-м варианте решения на осциллограмме появляются 6 пологих участков, но явно заметны только три из них; во 2-м варианте – на графике появляется только один такой участок.

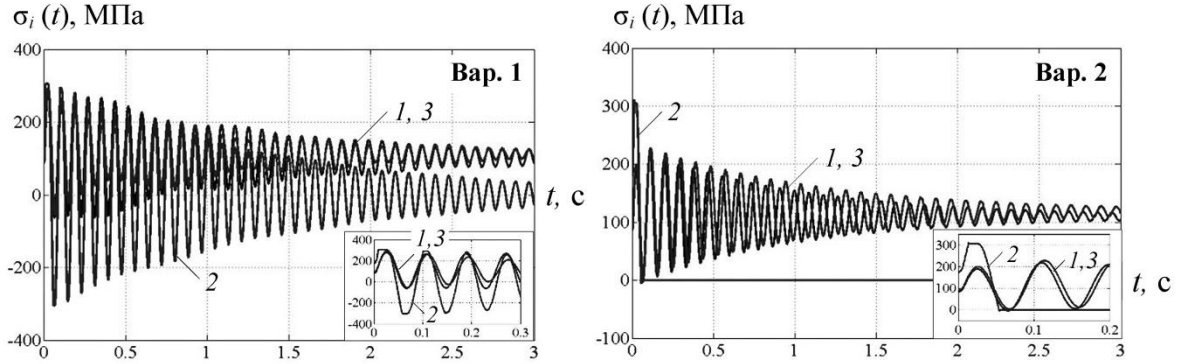

Рис. 5. Осциллограммы нормальных напряжений
в элементах стрежневой системы

Для проверки условия динамического равновесия системы полученное решение (4) было подставлено в левую часть уравнения (3). В результате обе части уравнения полностью совпадают между собой на всём интервале интегрирования. На рис. 6 показаны все вертикальные силы расчётной модели согласно (3), обеспечивающие её динамическое равновесие во временной области.

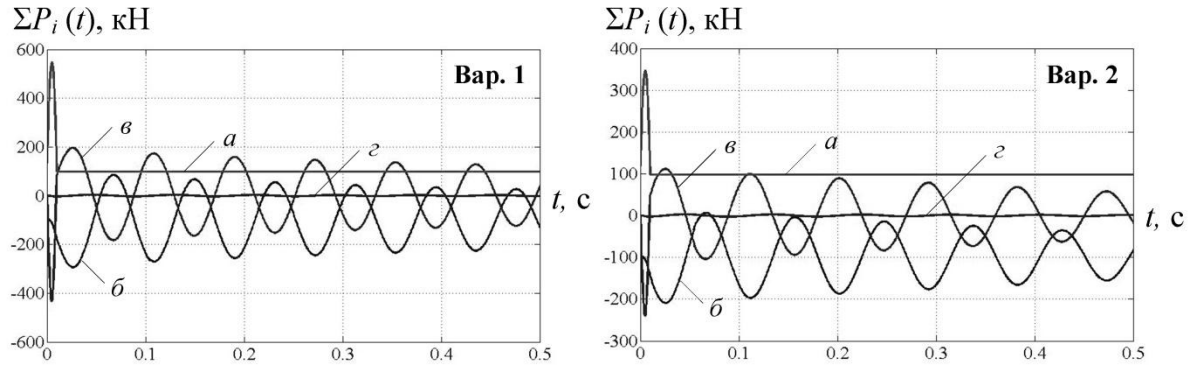

Рис. 6. Вертикальные силы уравнения движения (3):
а – внешняя нагрузка (*P*(*t*) и *Q*); *б* – восстанавливающая;
в – инерционная; *г* – диссипативная

Выводы. Представленный временной анализ позволяет получать в рамках принятых математических моделей точное решение задачи в аналитическом виде. Для динамической задачи в замкнутой форме построены кинематические и силовые параметры реакции системы с физической и конструктивной нелинейностью.

Библиографический список

1. Москвитин, В.В. Пластичность при переменных нагружениях / В.В. Москвитин – М.: Изд-во МГУ, 1965 – 264 с.

2. Трушин, С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи: Учеб. пособие / С.И. Трушин. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2008. – 256 с.

3. Белостоцкий, А.М. Расчёты зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения с учётом физической и геометрической нелинейностей / А.М. Белостоцкий, А.А. Аул, О.А. Козырев, А.С. Павлов // Международная научно-практическая конференция «Теория и практика расчёта зданий, конструкций и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». Сборник трудов. – М.: Изд-во МГСУ, 2008. – С. 183–193.

4. Еремеев, П.Г. Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях / П.Г. Еремеев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2006. – № 2. – С. 65–72.

5. Потапов, А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях: монография / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.

6. Потапов, А.Н. Анализ колебаний конструкций с выключающимися связями / А.Н. Потапов // Морские интеллектуальные технологии. – 2011. – № 3. – С. 45–48.

К содержанию