

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА

В.И. Ухоботов¹, И.В. Измestьев²

Построены оптимальные управления игроков в линейной дифференциальной игре с импульсным управлением.

Ключевые слова: дифференциальная игра; импульсное управление.

1. Введение

Задачи управления механическими системами переменного состава, в которых допускается мгновенное отделение конечного количества массы топлива с постоянной по величине скоростью, сводятся к задачам с импульсным управлением [1, с. 85–87]. Наличие импульсных управлений может приводить к мгновенному изменению фазового состояния системы, поэтому при исследовании дифференциальных игр с импульсными управлениями возникают специфические особенности [2–6].

В данной статье рассмотрена игровая задача импульсной встречи, которая является модификацией игры «изотропные ракеты» [7, с. 139]. Преследователь управляет движением точки переменного состава, выбирая в каждый момент времени реактивную силу. В отдельные моменты времени конечное количество реактивной массы может отделяться с постоянной по величине скоростью. Убегающий движется с ограниченной по величине скоростью. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени сделать расстояние между собой и вторым игроком не больше одного заданного числа, но не меньше другого заданного числа. Это условие выделяет в фазовом пространстве игры терминальное множество, которое не является выпуклым. Цель второго игрока противоположна.

2. Постановка задачи

Первый игрок управляет движением точки переменного состава x в пространстве \mathbb{R}^n , выбирая в каждый момент времени реактивную силу [1]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad dx_2 = dU,$$

где U – управление первого игрока, которое является функцией с ограниченным изменением. Расход ресурсов, затраченных на формирование этого управления на произвольном отрезке $[t, \tau]$, задается формулой

$$\int_t^\tau \|dU(r)\| = \sup \sum \|U(r_{i+1}) - U(r_i)\|,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям r_i отрезка $[t, \tau]$. В начальный момент времени t_0 зафиксирован запас ресурсов $\mu(t_0) \geq 0$, который не может быть перерасходован в процессе управления.

Второй игрок управляет движением точки, выбирая в каждый момент времени ее скорость, которая ограничена по величине заданным числом $b > 0$

$$\dot{y} = bv, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| \leq 1.$$

Цель первого игрока заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени p осуществить неравенство $\varepsilon_1 \leq \|x(p) - y(p)\| \leq \varepsilon_2$. Здесь $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ – заданные числа. Цель второго игрока противоположна.

3. Формализация задачи

В переменных $z(t) = y(t) - x_1(t) - (p-t)x_2(t)$ рассматриваемая задача примет вид

$$dz = -(p-t)dU + bv, \quad \varepsilon_1 \leq \|z(p)\| \leq \varepsilon_2. \quad (1)$$

¹ Ухоботов Виктор Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет. E-mail: ukh@csu.ru

² Измestьев Игорь Вячеславович – аспирант кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет. E-mail: j748e8@gmail.com

Условие не перерасхода запаса ресурсов запишем в виде неравенства $\mu(t) = \mu(t_0) - \int_{t_0}^t \|dU(r)\| \geq 0$.

Управлением второго игрока является произвольная функция $v: (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая ограничению $\|v(t, z)\| \leq 1$.

Управлением первого игрока является функция вида $U(t, z) = \varphi(t)u(t, z)$, где $u: [t_0, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольная функция, удовлетворяющая равенству $\|u(t, z)\| = 1$. При выборе функции $\varphi(t)$ в отдельные моменты времени осуществляется её коррекция, которая проводится следующим образом. Первый игрок в начальный момент времени выбирает конечный набор моментов коррекций $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q < p$. В момент времени τ_i , зная реализовавшееся состояние $\|z(\tau_i)\|, \mu(\tau_i)$, он выбирает абсолютно-непрерывную, неубывающую и неотрицательную функцию $\varphi: [\tau_i, \tau_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ и число $\Delta_i \geq 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \Delta_i - \int_{\tau_i}^t \dot{\varphi}(r) dr \geq 0, \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}. \quad (2)$$

Движение, порожденное выбранными управлениями на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, определим с помощью ломаных. Для этого зафиксируем разбиение:

$$\omega: \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}$$

с диаметром разбиения $d(\omega) = \max_{0 \leq j \leq k} (t^{(j+1)} - t^{(j)})$ и построим ломаную [6, с. 75]

$$z_\omega(t) = z_\omega(\tau_i) - (\Delta_i + \int_{\tau_i}^t (p-r)\dot{\varphi}(r)dr)u(\tau_i, z_\omega(\tau_i)) + b(t-\tau_i)v(\tau_i, z_\omega(\tau_i)), \quad \text{при } \tau_i < t \leq t^{(1)}$$

и

$$z_\omega(t) = z_\omega(t^{(j)}) - \int_{t^{(j)}}^t (p-r)\dot{\varphi}(r)dr u(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})) + b(t-t^{(j)})v(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})), \quad \text{при } t^{(j)} \leq t \leq t^{(j+1)}. \quad (3)$$

Можно показать, что все ломаные $z_\omega(t)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой. Следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы Арцела [8, с. 236]. Под движением $z(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметр разбиения $d(\omega_k) \rightarrow 0$.

4. Формулировка результатов

Определим для $t < p, \mu \geq 0$ следующие функции:

$$g(t, \mu) = \begin{cases} \varepsilon_1 - (\mu - b)(p - t), & \text{при } \mu < \xi(t), t_1 \leq t < p, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - (p - t) \left(\mu - b \ln \frac{p-t}{p-t_1} \right), & \text{при } \mu < \xi(t), t < t_1, \\ 0, & \text{при } \mu \geq \xi(t), \forall t, \end{cases}$$

$$G(t, \mu) = \begin{cases} \varepsilon_2 + (\mu - b)(p - t), & \text{при } t_1 \leq t < p, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + (p - t) \left(\mu - b \ln \frac{p-t}{p-t_1} \right), & \text{при } t_2 \leq t < t_1, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + (p - t)(\mu - c) - b(t_2 - t), & \text{при } t_3 \leq t < t_2, \\ (p - t) \left(\mu - c - b \ln \frac{p-t}{p-t_3} \right), & \text{при } t < t_3, \end{cases}$$

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{p-t} + b, & \text{при } t_1 \leq t < p, \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2(p-t)} + b \ln \frac{p-t}{p-t_1}, & \text{при } t_c \leq t < t_1, \\ c, & \text{при } t < t_c, \end{cases} \quad M(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t_1 \leq t < p, \\ b \ln \frac{p-t}{p-t_1}, & \text{при } t_2 \leq t < t_1, \\ c, & \text{при } t_3 \leq t < t_2, \\ c + b \ln \frac{p-t}{p-t_3}, & \text{при } t < t_3. \end{cases}$$

Здесь $t_1 = p - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2b}$, $t_c = p - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2b}$, $t_2 = p - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2b}e$, $t_3 = p - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2b}(e+1)$, $c = b \left(1 + \ln \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right)$.

Обозначим $\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$. Покажем, что из любого начального состояния $(z(t_0), \mu(t_0))$ первый игрок сможет осуществить неравенства (1) тогда и только тогда, когда $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t)$, где

$$W(t) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : g(t, \mu) \leq \|z\| \leq G(t, \mu), \mu \geq M(t)\}. \quad (4)$$

5. Задача преследования

Обозначим

$$w(z) = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } \|z\| > 0 \text{ и } w(z) = \forall w : \|w\| = 1 \text{ при } \|z\| = 0. \quad (5)$$

Теорема 5.1. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_1 \leq t_0 < p$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение неравенств (1) при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\|z_0\| > \varepsilon_2 - b(p - t_0)$. Первый игрок берет $u(t, z) = w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и $\phi(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq p$; $\Delta_0 = \frac{\|z_0\| - \varepsilon_2}{p - t_0} + b$.

Тогда, согласно (4), $\mu(p) = \mu(t_0) - \Delta_0 \geq 0$, т.е. верно условие (2). Далее, с помощью (5) и определения t_1 , можно показать, что для любой ломаной (3) выполнено неравенство

$$\varepsilon_1 \leq \|z_\omega(p)\| \leq \varepsilon_2. \quad (6)$$

Случай 2. Пусть $\varepsilon_1 + b(p - t_0) \leq \|z_0\| \leq \varepsilon_2 - b(p - t_0)$. Первый игрок берет $\tau_0 = t_0$, $\Delta_0 = 0$ и $\phi(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq p$. Тогда $\mu(p) = \mu(t_0) \geq 0$ и для любой ломаной (3) выполнено неравенство (6).

Случай 3. Пусть $\|z_0\| < \varepsilon_1 + b(p - t_0)$. Первый игрок берет $u(t, z) = -w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и $\phi(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq p$; $\Delta_0 = \frac{\varepsilon_1 - \|z_0\|}{p - t_0} + b$.

Как и в случае 1 число Δ_0 удовлетворяет условию (2). Далее, с помощью (5) и определения t_1 , можно показать, что это управление обеспечивает неравенства (6).

Из (6) следует, что для любого движения $z(t)$ выполнено условие (1).

Лемма 5.1. Пусть заданы моменты времени $t_* < t^* < p$ такие, что $\|z(t_*)\| = \alpha \geq 0$ и $\mu(t_*) \geq b \ln \frac{p - t_*}{p - t^*} + \gamma$, где $\gamma \geq 0$, тогда на отрезке $[t_*, t^*]$ существует управление первого игрока,

которое обеспечивает выполнение условий $\|z(t^*)\| = \alpha$, $\mu(t^*) \geq \gamma$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\alpha = 0$. Доказательство следует из [6, с. 82–84].

Случай 2. Пусть $\alpha > 0$. Тогда первый игрок выбирает управление

$$u(t, z) = \begin{cases} w(z), & \text{при } \|z\| \geq \alpha, \\ -w(z), & \text{при } \|z\| < \alpha, \end{cases} \quad \varphi(t) = b \ln \frac{p - t_*}{p - t} = b \int_{t_*}^t \frac{1}{p - r} dr. \quad (7)$$

Далее, возьмем разбиение $\Omega: t_* = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(m+1)} = t^*$ такое, что диаметр разбиения $d(\Omega) < \frac{\alpha}{2b}$, и покажем, что для каждой ломаной (3) выполнены неравенства

$$\alpha - 2bd(\Omega) \leq \|z_\Omega(t)\| \leq \alpha + 2bd(\Omega) \text{ при } t_* < t \leq t^*.$$

Из (5) и (7) следует, что для ломаной (3) выполнены соотношения

$$z_\Omega(t^{(1)}) = \alpha \frac{z(t_0)}{\|z(t_0)\|} - b(t^{(1)} - t^{(0)})(w(z(t_0)) - v(t_0, z(t_0))),$$

$$\alpha - 2b(t^{(1)} - t^{(0)}) \leq \|z_\Omega(t^{(1)})\| \leq \alpha \leq \alpha + 2b(t^{(1)} - t^{(0)}).$$

Поэтому, при $j=1$ верны неравенства

$$\alpha - 2b \max_{1 \leq k \leq j} (t^{(k)} - t^{(k-1)}) \leq \|z_\Omega(t^{(j)})\| \leq \alpha + 2b \max_{1 \leq k \leq j} (t^{(k)} - t^{(k-1)}). \quad (8)$$

Предположим, что они выполнены для некоторого $j \leq l$. Покажем, что эти неравенства выполнены и для $j+1$. Обозначим

$$\delta = 2b \max_{1 \leq k \leq j} (t^{(k)} - t^{(k-1)}).$$

Тогда (8) примет вид

$$\alpha - \delta \leq \|z(t_\Omega^{(j)})\| \leq \alpha + \delta.$$

Пусть $\|z_\Omega(t^{(j)})\| \geq \alpha$. Тогда из (3), (5) и (7) следует оценка

$$\alpha - \max\{\delta, 2b(t^{(j+1)} - t^{(j)})\} \leq \|z_\Omega(t^{(j+1)})\| \leq \alpha + \delta.$$

Пусть $\|z_\Omega(t^{(j)})\| < \alpha$. Тогда из (3), (5) и (7) следует оценка

$$\alpha - \delta \leq \|z_\Omega(t^{(j+1)})\| \leq \alpha + \max\{\delta, 2b(t^{(j+1)} - t^{(j)})\}.$$

Выполнен шаг индукции, следовательно, система неравенств (8) верна.

Заметим, что $\max_{0 \leq k \leq j} (t^{(k+1)} - t^{(k)}) \leq d(\Omega)$ при $j=0, m$. Следовательно, при $d(\Omega) \rightarrow 0$ получим,

что для любого движения $z(t)$ при $t_* < t \leq t^*$ будет выполнено равенство $\|z(t)\| = \alpha$.

Неравенство $\mu(t^*) \geq \gamma$ следует из определения функции $\varphi(t)$ в (7).

Теорема 5.2. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_2 \leq t_0 < t_1$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $(z(t_1), \mu(t_1)) \in W(t_1)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\|z(t_0)\| \geq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$. Первый игрок берет $u(t, z) = w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и $\Delta_0 = \frac{2\|z_0\| - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2(p - t_0)}$.

Случай 2. Пусть $\|z(t_0)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

Случай 2.1. Пусть $t_c \leq t_0$. Первый игрок берет $u(t, z) = -w(z)$, $\tau_0 = t_0$ и

$$\Delta_0 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - 2\|z(t_0)\|}{2(p - t_0)}.$$

Для случаев 1 и 2.1, согласно (3)–(5), имеем

$$\|z(t_0 + 0)\| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \quad \mu(t_0 + 0) = \mu_0 - \Delta_0 \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{b}{p - r} dr.$$

Из леммы 5.1 получим, что для состояния $t_0, z(t_0 + 0), \mu(t_0 + 0)$ существует управление первого игрока такое, что оно обеспечивает выполнение равенства $\|z(t_1)\| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ при любом управлении второго игрока.

Случай 2.2. Пусть $t_0 < t_c$. Первый игрок берет $u(t, z) = \forall w: \|w\| = 1, \tau_0 = t_0$ и $\Delta_0 = 0$.

Если $\|z(t)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ при всех $t \in [t_0, t_c)$, то, принимая t_c за начальный момент времени, переходим к случаю 2.1.

Если существует $\tilde{t} \in [t_0, t_1)$ такой, что $\|z(\tilde{t})\| \geq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ и $\|z(t)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ при всех $t \in [t_0, \tilde{t})$, то, принимая \tilde{t} за начальный момент времени, переходим к случаю 1.

В заключение заметим, что выполнена система неравенств

$$g(t_1, \mu(t_1)) = \max \left\{ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \mu(t_1)(p - t_1), 0 \right\} \leq \|z(t_1)\| = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \mu(t_1)(p - t_1) = G(t_1, \mu(t_1)).$$

Отсюда имеем заявленное включение $(z(t_1), \mu(t_1)) \in W(t_1)$.

Теорема 5.3. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_3 \leq t_0 < t_2$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $(z(t_2), \mu(t_2)) \in W(t_2)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.1 из работы [6, с. 76] при $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

Теорема 5.4. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_0 < t_3$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$, тогда существует управление первого игрока, обеспечивающее выполнение включения $(z(t_3), \mu(t_3)) \in W(t_3)$ при любом управлении второго игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.5 из работы [6, с. 82].

6. Задача убегания

Лемма 6.1. Управление второго игрока $v(t, z) = w(z)$ обеспечивает при любом управлении первого игрока для любого движения $z(t)$ и для любых моментов времени $t_* < t^* \leq p$ выполнение неравенства

$$\|z(t^*)\| \geq \|z(t_*)\| - (\mu(t_*) - \mu(t^*))(p - t_*) + b(t^* - t_*). \quad (9)$$

Доказательство следует из [6, с. 78–79].

Лемма 6.2. Пусть $t_* < t^* \leq p$ и $\|z(t_*)\| < g(t_*, \mu(t_*))$, тогда управление второго игрока $v(t, z) = -w(z)$ обеспечивает при любом управлении первого игрока для любого движения $z(t)$ выполнение неравенства $\|z(t^*)\| < g(t^*, \mu(t^*))$.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $t_*, t^* \in [t_1, p]$. Рассмотрим разбиение отрезка $[t_*, t^*]$ ω с моментами коррекции первого игрока τ_i . Покажем, что, если в некоторый момент времени τ_l выполнено неравенство

$$\|z(\tau_l)\| < g(\tau_l, \mu(\tau_l)), \quad (10)$$

то при любом $0 \leq \Delta \leq \mu(\tau_l)$ выполнено неравенство

$$\|z(\tau_l + 0)\| < g(\tau_l + 0, \mu(\tau_l) - \Delta). \quad (11)$$

Из уравнения ломаной (3) следует неравенство

$$\|z(\tau_l + 0)\| < \|z(\tau_l)\| + \Delta(p - \tau_l). \quad (12)$$

Из (10) и (12), учитывая (4), имеем неравенство

$$\|z(\tau_l + 0)\| < \varepsilon_1 - \mu(\tau_l)(p - \tau_l) + b(p - \tau_l) + \Delta(p - \tau_l) = \varepsilon_1 - (\mu(\tau_l) - \Delta)(p - \tau_l) = g(\tau_l + 0, \mu(\tau_l) - \Delta).$$

Затем на $(\tau_l, \tau_{l+1}]$ зафиксируем произвольную непрерывную функцию $\mu(t)$, которая удовлетворяет условию (2) на данном множестве. Далее, доказательство следует из [9, с. 115].

Случай 2. Пусть $t_*, t^* \in (t_c, t_1]$. Покажем, что из (10) следует (11). В самом деле, из (10) и (12), учитывая (4), получим неравенство

$$\|z(\tau_l + 0)\| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - (p - \tau_l) \left(\mu - b \ln \frac{p - \tau_l}{p - t_1} \right) + \Delta(p - \tau_l) = g(\tau_l + 0, \mu(\tau_l) - \Delta).$$

Дальнейшее доказательство проводится по аналогии со случаем 1.

Теорема 6.1. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_1 \leq t_0 < p$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$.

1) Если

$$\|z(t_0)\| > G(t_0, \mu(t_0)) = \varepsilon_2 + (\mu(t_0) - b)(p - t_0), \quad (13)$$

тогда управление второго игрока $v(t, z) = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| > \varepsilon_2$ при любом управлении первого игрока.

2) Если

$$\|z(t_0)\| < g(t_0, \mu(t_0)) = \varepsilon_1 - (\mu(t_0) - b)(p - t_0), \quad (14)$$

тогда управление второго игрока $v(t, z) = -w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| < \varepsilon_1$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство. 1) Из (9) при $t_* = t_0$, $t^* = p$ следует, что

$$\|z(p)\| \geq \|z(t_0)\| - (\mu(t_0) - \mu(p))(p - t_0) + b(p - t_0).$$

Из этого неравенства и неравенства (13) получим $\|z(p)\| > \varepsilon_2 + \mu(p)(p - t_0) \geq \varepsilon_2$.

2) Из леммы 6.2 при $t_* = t_0$, $t^* = p$ и (14) следует, что $\|z(p)\| < \varepsilon_1$.

Теорема 6.2. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_2 \leq t_0 < t_1$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$, тогда существует управление второго игрока, обеспечивающее выполнение включения $(z(t_1), \mu(t_1)) \notin W(t_1)$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство. *Случай 1.* Пусть $\|z(t_0)\| > G(t_0, \mu(t_0))$, тогда второй игрок выбирает управление $v(t, z) = w(z)$. Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.3 из работы [6, с. 80].

Случай 2. Пусть $\|z(t_0)\| < g(t_0, \mu(t_0))$, тогда второй игрок выбирает управление $v(t, z) = -w(z)$. Отсюда и из леммы 6.2 при $t_* = t_0$, $t^* = t_1$ следует, что $\|z(t_1)\| < g(t_1, \mu(t_1))$.

Теорема 6.3. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_3 \leq t_0 < t_2$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$, тогда управление второго игрока $v(t, z) = w(z)$ обеспечивает выполнение включения $(z(t_2), \mu(t_2)) \notin W(t_2)$ при любом управлении первого игрока. Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.2 из работы [6, стр. 79] при $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

Теорема 6.4. Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0), \mu(t_0)$ таково, что $t_0 < t_3$, $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$, тогда управление второго игрока $v(t, z) = w(z)$ обеспечивает выполнение включения $(z(t_3), \mu(t_3)) \notin W(t_3)$ при любом управлении первого игрока.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.3. из работы [6, с. 80].

Литература

1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
2. Красовский, Н.Н. Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы / Н.Н. Красовский // Прикл. матем. и мех. – 1968. – Т. 32. – Вып. 2. – С. 177–184.

3. Пожарицкий, Г.К. Импульсное преследование в случае однотипных объектов второго порядка / Г.К. Пожарицкий // Прикл. матем. и мех. – 1966. – Т. 30. – Вып. 5. – С. 897–907.

4. Субботина, Н.Н. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков / Н.Н. Субботина, А.Н. Субботин // Прикл. матем. и мех. – 1975. – Т. 39. – Вып. 3. – С. 397–406.

5. Петров, Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей / Н.Н. Петров // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 2. – С. 38–44.

6. Ухоботов, В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2005. – 124 с.

7. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967. – 479 с.

8. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

9. Ухоботов, В.И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца / В.И. Ухоботов // Некоторые задачи динамики и управления: сб. научных трудов. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2005. – С. 108–123.

Поступила в редакцию 25 июня 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2014, vol. 6, no. 3, pp. 53–59

ON A GAME OF IMPULSE MEETING WITH A TERMINAL SET IN THE FORM OF A RING

V.I. Ukhobotov¹, I.V. Izmestyev²

Optimum controls for players in a linear differential game with pulse control have been found.

Keywords: differential game; pulse control.

References

1. Krasovskii N.N. *Teoriia upravleniia dvizheniem* (The Theory of Motion Control). Moscow, Nauka Publ., 1970. 420 p. (in Russ.).

2. Krasovskii N.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1968. Vol. 32. Issue 2. pp. 177–184. (in Russ.).

3. Pozharitskiy G.K. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1966. Vol. 30. Issue 5. pp. 897–907. (in Russ.).

4. Subbotina N.N., Subbotin A.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1975. Vol. 39. Issue 3. pp. 397–406. (in Russ.).

5. Petrov, N.N. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2009. no. 2. pp. 38–44. (in Russ.).

6. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* (Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide). Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ.. 2005. 124 p. (in Russ.).

7. Ajzeks R. *Differentsial'nye igry* (Differential Games). Moscow, Mir, 1967. 479 p. (in Russ.). [Isaacs R. *Differential Games*. John Wiley and Sons, 1965.]

8. Ljusternik L.A., Sobolev V.I. *Jelementy funkcional'nogo analiza* (Elements of functional analysis). Moscow, Nauka Publ., 1965. 520 p. (in Russ.).

9. Ukhobotov V.I. *Odnotipnaya differentsial'naya igra s terminal'nym mnozhestvom v forme kol'tsa* (One-type differential game with a terminal set in the form a ring). *Nekotorye zadachi dinamiki i upravleniya: sb. nauchnykh trudov*. (Some dynamic and control problems: collection of research papers) Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ.. 2005. pp. 108–123.

Received 25 June 2014

¹ Ukhobotov Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University. E-mail: ukh@csu.ru

² Izmestyev Igor Vyacheslavovich is Post-graduate Student, Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University. E-mail: j748e8@gmail.com