УДК 532.525 DOI: 10.14529/mmp140202

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ ДВУХФАЗНЫХ СМЕСЕЙ

Ю.М. Ковалев, Е.А. Ковалева

Проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели М. Байера, Дж. Нунциато, полученной на основе гипотезы взаимопроникающих взаимодействующих континуумов и описывающей процесс перехода горения во взрыв в двухфазных смесях. Показано, что математическая модель, представленная в оригинальной статье М. Байера, Дж. Нунциато является инвариантной относительно преобразования Галилея. Дополнительно в настоящей работе был проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений кинетической и полной энергии отдельных компонентов и смеси. Было показано, что данные уравнения также являются инвариантными относительно преобразования Галилея. Однако, сравнительный анализ уравнений сохранения полной энергии смеси математической модели М. Байера, Дж. Нунциато и математической модели Р.И. Нигматулина с сотрудниками показал их различие. Поэтому для выбора математической модели, адекватно описывающей процесс перехода горения во взрыв в двухфазных смесях, требуется дополнительный анализ.

Ключевые слова: математическая модель; инвариантность; многокомпонентная смесь.

Развитие современной вычислительной техники позволило значительно усложнить математические модели физических процессов, используемых в науке и технике. В связи с этим повысился статус математического моделирования как источника получения информации о процессах. Более того, есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений [1, 2]. Поэтому с особой остротой встает проблема адекватности математических моделей тем физическим процессам, которые они пытаются описывать [3]. Отсутствие в природе чистых веществ привело к активному развитию теории математических моделей многокомпонентных сред [4, 5], основанных на гипотезе взаимопроникающих взаимодействующих континуумов [6].

Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу. В работах Ю.М. Ковалева, В.Ф. Куропатенко [7, 8] проведен анализ математической модели «замороженной» газовзвеси, которая активно используется при анализе затухания ударных волн в гетерогенных средах, и была показана не инвариантность относительно преобразования Галилея уравнения полной энергии газовой фазы. Оказалось, что не инвариантность относительно преобразования Галилея уравнения полной энергии газа приводит к появлению дополнительного источника энергии, связанного с движением системы координат. Этот источник энергии не имеет физической природы и приводит к нарушению второго закона термодинамики.

В настоящей статье проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели М. Байера, Дж. Нунциато [9], описывающей процесс перехода горения во взрыв в двухфазных смесях. Данная модель была также получена на основе гипотезы взаимопроникающих взаимодействующих континуумов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двухфазную химически реагирующую смесь, состоящую из твердой фазы (s) и газа (g). В математической модели, разработанной М. Бэром и Дж. Нунциато [9], уравнения массы, импульса и энергии для каждой фазы имеют следующий вид

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial \rho_s}{\partial x} = -\rho_s \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{\rho_s}{\phi_s} F, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial \rho_g}{\partial x} = -\rho_g \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\rho_g}{\phi_g}(v_s - v_g)\frac{\partial \phi_s}{\partial x} + \frac{\rho_g}{\phi_g} F - (1 - \frac{\rho_g}{\rho_s})\frac{C_g^{\uparrow}}{\phi_g}, \tag{2}$$

$$\phi_s \rho_s \Big[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial x}\Big] = -\phi_s \frac{\partial \rho_s}{\partial x} + (\rho_g - \rho_s)\frac{\partial \phi_s}{\partial x} - \Big(\delta + \frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s - v_g), \tag{3}$$

$$\phi_g \rho_g \Big[\frac{\partial v_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial x}\Big] = -\phi_g \frac{\partial \rho_g}{\partial x} + \Big(\delta + \frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s - v_g), \tag{4}$$

$$\phi_s \rho_s \Big[\frac{\partial e_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial e_s}{\partial x}\Big] = -\phi_s \rho_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(k_s \frac{\partial T_s}{\partial x}\Big) - h(T_s - T_g) - (\rho_s - \beta_s)F, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \phi_g \rho_g \Big[\frac{\partial e_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial e_g}{\partial x}\Big] = -\phi_g \rho_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(k_g \frac{\partial T_g}{\partial x}\Big) + h(T_s - T_g) + \\ +(\rho_s - \beta_s)F - (v_s - v_g)p_g \frac{\partial \phi_s}{\partial x} + \delta(v_s - v_g)^2 - (e_s - e_g)C_s^{\uparrow}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = F + \frac{C_s^{\uparrow}}{\rho_s}, \quad \phi_s = 1 - \phi_g. \tag{7}$$

Все обозначения совпадают с обозначениями, приведенными в оригинальной статье М. Бэра и Дж. Нунциато [9]. Здесь индексы (g) и (s) относятся к параметрам газа и твердых частиц; ρ_i, v_i, p_i, T_i, e_i, ϕ_i, η_i, h_i, ψ_i, k_i – истинная плотность, скорость, давление, температура, удельная внутренняя энергия, объемная доля, энтропия, энтальпия, коэффициент теплопроводности i-й фазы ($i = s,\ g$) соответственно, δ – коэффициент сопротивления, h – коэффициент теплопередачи, $C_s^{\uparrow}$ – интенсивность химического превращения, $\beta_i = \phi_i \rho_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_i}\right)_{\rho_i T_i}$, μ_c – коэффициент вязкости газа, $F = \phi_s \phi_g [p_s - p_g - \beta_s]/\mu_c$.

Уравнения (1), (2) – уравнения неразрывности частиц и газа; (3), (4) – уравнения сохранения импульса частиц и газа; (5), (6) – уравнения сохранения удельной внутренней энергии частиц и газа; (7) – уравнение сохранения объемной доли твердой фазы.

Запишем исходную систему уравнений в новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D. Скорости в новой системе координат будут равны:

$$v_{s\text{н}} = v_s + D, \tag{8}$$

$$v_{g\text{н}} = v_g + D. \tag{9}$$

Координата будет определяться из уравнения:

$$x_{\text{н}} = x + Dt. \tag{10}$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}, \tag{11}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) + \Big(\frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}\Big)D. \tag{12}$$

Для анализа инвариантности относительно преобразования Галилея уравнения неразрывности конденсированной фазы (1) перейдем в новую систему координат в соответствии с формулами (8) – (12). Уравнение неразрывности конденсированной фазы (1) в новой системе координат принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s}{\partial x_{\text{н}}}D + (v_{s\text{н}} - D)\frac{\partial \rho_s}{\partial x_{\text{н}}} = -\rho_s \frac{\partial (v_{s\text{н}} - D)}{\partial x_{\text{н}}} - \frac{\rho_s}{\phi_s}F$$

или

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s}{\partial x_{\text{н}}}D + v_{s\text{н}}\frac{\partial \rho_s}{\partial x_{\text{н}}} - D\frac{\partial \rho_1}{\partial x_{\text{н}}} = -\rho_s \frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}} - \frac{\rho_s}{\phi_s}F.$$

В результате получаем:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + v_{s\text{н}}\frac{\partial \rho_s}{\partial x_{\text{н}}} = -\rho_s \frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}} - \frac{\rho_s}{\phi_s}F. \tag{13}$$

Аналогично, уравнение неразрывности газовой фазы (2) с учетом (8) – (12) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + v_{g\text{н}}\frac{\partial \rho_g}{\partial x_{\text{н}}} = -\rho_g \frac{\partial v_{g\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}} - \frac{\rho_g}{\phi_g}(v_{s\text{н}} - v_{g\text{н}})\frac{\partial \phi_s}{\partial x} + \frac{\rho_g}{\phi_g}F - (1 - \frac{\rho_g}{\rho_s})\frac{C_s^{\uparrow}}{\phi_g}. \tag{14}$$

Для анализа инвариантности относительно преобразования Галилея уравнения сохранения импульса конденсированной фазы (3) перейдем в новую систему координат в соответствии с формулами (8) – (12). Уравнение сохранения импульса конденсированной фазы (3) в новой системе координат принимает следующий вид:

$$\phi_s\rho_s\Big[\frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial t} + D\frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}} + v_{s\text{н}}\frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}} - D\frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}}\Big] =$$
$$= -\phi_s\frac{\partial \rho_s}{\partial x_{\text{н}}} + (\rho_g - \rho_s)\frac{\partial \phi_s}{\partial x_{\text{н}}} - \Big(\delta + \frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_{s\text{н}} - v_{g\text{н}})$$

или

$$\phi_s\rho_s\Big[\frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial t} + v_{s\text{н}}\frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}}\Big] = -\phi_s\frac{\partial \rho_s}{\partial x} + (p_g - p_s)\frac{\partial \phi_s}{\partial x} - \Big(\delta + \frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_{s\text{н}} - v_{g\text{н}}). \tag{15}$$

Аналогично, уравнение сохранения импульса газовой фазы (4) в новой системе координат имеет следующий вид:

$$\phi_g\rho_g\Big[\frac{\partial v_{g\text{н}}}{\partial t} + v_{g\text{н}}\frac{\partial v_{g\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}}\Big] = -\phi_g\frac{\partial \rho_g}{\partial x_{\text{н}}} + \Big(\delta + \frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_{s\text{н}} - v_{g\text{н}}). \tag{16}$$

Рассмотрим уравнение сохранения удельной внутренней энергии конденсированной фазы (5). Переходя в новую систему координат в соответствии с равенствами (8) – (12), получим:

$$\phi_s\rho_s\Big[\frac{\partial e_s}{\partial t}+D\frac{\partial e_s}{\partial x_{\text{н}}}+v_{s\text{н}}\frac{\partial e_s}{\partial x_{\text{н}}}-D\frac{\partial e_s}{\partial x_{\text{н}}}\Big]=$$
$$=-\phi_s\rho_s\frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}}+\frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}\Big(k_s\frac{\partial T_s}{\partial x_{\text{н}}}\Big)-h(T_s-T_g)-(p_s-\beta_s)F$$

или

$$\phi_s\rho_s\Big[\frac{\partial e_s}{\partial t}+v_{s\text{н}}\frac{\partial e_s}{\partial x_{\text{н}}}\Big]=-\phi_s p_s\frac{\partial v_{s\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}}+\frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}\Big(k_s\frac{\partial T_s}{\partial x_{\text{н}}}\Big)+h(T_s-T_g)-(p_s-\beta_s)F. \qquad (17)$$

Аналогично, уравнение сохранения удельной внутренней энергии газовой фазы (6) в новой системе координат имеет следующий вид:

$$\phi_g\rho_g\Big[\frac{\partial e_g}{\partial t}+D\frac{\partial e_g}{\partial x_{\text{н}}}+v_{g\text{н}}\frac{\partial e_g}{\partial x_{\text{н}}}-D\frac{\partial e_g}{\partial x_{\text{н}}}\Big]=-\phi_g p_g\frac{\partial v_{g\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}}+\frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}\Big(k_g\frac{\partial T_g}{\partial x_{\text{н}}}\Big)-$$
$$-h(T_s-T_g)+(p_s-\beta_s)F-(v_{s\text{н}}-v_{g\text{н}})p_g\frac{\partial \phi_s}{\partial x_{\text{н}}}+\delta(v_{s\text{н}}-v_{g\text{н}})^2-(e_s-e_g)C_s^{\uparrow}$$

или

$$\phi_g\rho_g\Big[\frac{\partial e_g}{\partial t}+v_{g\text{н}}\frac{\partial e_g}{\partial x_{\text{н}}}\Big]=-\phi_g p_g\frac{\partial v_{g\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}}+\frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}\Big(k_g\frac{\partial T_g}{\partial x_{\text{н}}}\Big)+h(T_s-T_g)+$$
$$+(p_s-\beta_s)F-(v_{s\text{н}}-v_{g\text{н}})p_g\frac{\partial \phi_s}{\partial x_{\text{н}}}+\delta(v_{s\text{н}}-v_{g\text{н}})^2-(e_s-e_g)C_s^{\uparrow}. \qquad (18)$$

И, наконец, рассмотрим уравнение сохранения объемной доли конденсированной фазы (7). В результате перехода в новую систему координат по формулам (8) – (12) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t}+D\frac{\partial \phi_s}{\partial x_{\text{н}}}+v_{s\text{н}}\frac{\partial \phi_s}{\partial x_{\text{н}}}-D\frac{\partial \phi_s}{\partial x_{\text{н}}}=F+\frac{C_s^{\uparrow}}{\rho_s},$$

которое после простых преобразований записывается в виде:

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t}+v_{s\text{н}}\frac{\partial \phi_s}{\partial x_{\text{н}}}=F+\frac{C_s^{\uparrow}}{\rho_s}. \qquad (19)$$

Таким образом, после преобразований, связанных с переходом в новую систему координат, уравнения неразрывности частиц и газа имеют вид (13) и (14) соответственно, уравнения сохранения импульса частиц и газа – (15) и (16) соответственно, уравнения сохранения удельной внутренней энергии частиц и газа – (17) и (18) соответственно, а уравнение сохранения объемной доли твердого вещества – (19). В уравнениях (13) – (19) не появляются дополнительные слагаемые, связанные с переходом в новую систему координат, следовательно, система уравнений (1) – (7) является инвариантной относительно преобразований Галилея.

Получим уравнения сохранения кинетической энергии частиц и газа. Для этого умножим левые и правые части уравнений сохранения импульса частиц и газа (3) и (4) на скорости v_s и v_g соответственно. Получим

$$\phi_s\rho_s v_s\Big[\frac{\partial v_s}{\partial t}+v_s\frac{\partial v_s}{\partial x}\Big]=v_s\Big[-\phi_s\frac{\partial p_s}{\partial x}+(p_g-p_s)\frac{\partial \phi_s}{\partial x}-\Big(\delta+\frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s-v_g)\Big]$$

$$\phi_g\rho_g v_g\Big[\frac{\partial v_g}{\partial t}+v_g\frac{\partial v_g}{\partial x}\Big]=v_g\Big[-\phi_g\frac{\partial p_g}{\partial x}+\Big(\delta+\frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s-v_g)\Big].$$

После простых преобразований уравнения сохранения кинетической энергии частиц и газа принимают следующий вид

$$\phi_s\rho_s\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{v_s^2}{2}\Big)+v_s\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{v_s^2}{2}\Big)\Big]=v_s\Big[-\phi_s\frac{\partial p_s}{\partial x}+(p_g-p_s)\frac{\partial \phi_s}{\partial x}-\Big(\delta+\frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s-v_g)\Big] \tag{20}$$

$$\phi_g\rho_g\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{v_g^2}{2}\Big)+v_g\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{v_g^2}{2}\Big)\Big]=v_g\Big[-\phi_g\frac{\partial p_g}{\partial x}+\Big(\delta+\frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s-v_g)\Big]. \tag{21}$$

Получим уравнения сохранения полной энергии частиц и газа. Для этого суммируем левые и правые части уравнений (5), (6) и (20), (21) соответственно. В результате имеем

$$\phi_s\rho_s\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(e_s+\frac{v_s^2}{2}\Big)+v_s\frac{\partial}{\partial x}\Big(e_s+\frac{v_s^2}{2}\Big)\Big]=-v_s\phi_s\frac{\partial p_s}{\partial x}+v_s\Big[(p_g-p_s)\frac{\partial \phi_s}{\partial x}-$$
$$-\Big(\delta+\frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s-v_g)\Big]-\phi_s p_s\frac{\partial v_s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}\Big(k_s\frac{\partial T_s}{\partial x_{\text{н}}}\Big)-h(T_s-T_g)+(p_s-\beta_s)F$$

$$\phi_g\rho_g\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(e_g+\frac{v_g^2}{2}\Big)+v_g\frac{\partial}{\partial x}\Big(e_g+\frac{v_g^2}{2}\Big)\Big]=-v_g\phi_g\frac{\partial p_g}{\partial x}+$$
$$+v_g\Big(\delta+\frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s-v_g)-\phi_g p_g\frac{\partial v_g}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(k_g\frac{\partial T_g}{\partial x}\Big)+h(T_s-T_g)+$$
$$+(p_s-\beta_s)F-(v_s-v_g)p_g\frac{\partial \phi_s}{\partial x}+\delta(v_s-v_g)^2-(e_s-e_g)C_s^{\uparrow}.$$

После простых преобразований получим уравнения сохранения полной энергии частиц и газа в следующем виде

$$\phi_s\rho_s\Big[\frac{\partial E_s}{\partial t}+v_s\frac{\partial E_s}{\partial x}\Big]=-\frac{\partial}{\partial x}(\phi_s v_s p_s)+v_s\Big[p_g\frac{\partial \phi_s}{\partial x}-\Big(\delta+\frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s-v_g)\Big]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big(k_s\frac{\partial T_s}{\partial x}\Big)-h(T_s-T_g)-(p_s-\beta_s)F \tag{22}$$

$$\phi_g\rho_g\Big[\frac{\partial E_g}{\partial t}+v_g\frac{\partial E_g}{\partial x}\Big]=-\frac{\partial}{\partial x}(\phi_g v_g p_g)+v_g\Big(\delta+\frac{C_s^{\uparrow}}{2}\Big)(v_s-v_g)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big(k_g\frac{\partial T_g}{\partial x}\Big)+h(T_s-T_g)-(p_s-\beta_s)F-v_s p_g\frac{\partial \phi_s}{\partial x}+\delta(v_s-v_g)^2-(e_s-e_g)C_s^{\uparrow} \tag{23}$$

$$E_s=e_s+\frac{v_s^2}{2};\qquad E_g=e_g+\frac{v_g^2}{2}.$$

Проведя анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения кинетической энергии частиц (20) и газа (21) соответственно, видим, что в новой системе координат не появляются дополнительные члены, зависящие от скорости движения системы координат. Следовательно, уравнение сохранения кинетической энергии частиц и уравнение сохранения кинетической энергии газа являются инвариантными относительно преобразования Галилея.

Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения полной частиц (22) и газа (23) соответственно показывает, что эти уравнения являются инвариантными относительно преобразования Галилея.

Получим уравнение сохранения полной энергии смеси конденсированной и газовой фаз. С этой целью просуммируем левые и правые части уравнений сохранения полной энергии конденсированной (22) и газовой фаз (23) соответственно. В результате получаем уравнение сохранения полной энергии смеси конденсированной и газовой фаз в виде

$$\phi_s\rho_s\Big[\frac{\partial E_s}{\partial t}+v_s\frac{\partial E_s}{\partial x}\Big]+\phi_g\rho_g\Big[\frac{\partial E_g}{\partial t}+v_g\frac{\partial E_g}{\partial x}\Big]=-\frac{\partial}{\partial x}(\phi_s v_s p_s+\phi_g v_g p_g)+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}\Big(k_s\frac{\partial T_s}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(k_g\frac{\partial T_g}{\partial x}\Big)-C_s^{\uparrow}\Big[(e_s-e_g)+\frac{1}{2}(v_s-v_g)^2\Big]. \qquad (24)$$

Очевидно, что уравнение сохранения полной энергии смеси (конденсированной и газовой фаз) (24) инвариантно относительно преобразования Галилея в силу инвариантности относительно преобразования Галилея всех элементов, входящих в уравнение (24): уравнений сохранения внутренней энергии и уравнений сохранения кинетической энергии конденсированной и газовой фаз.

Вопросы, связанные с изучением процессов перехода горения унитарного топлива во взрыв, подробно исследовались Р.И. Нигматулиным с сотрудниками [10]. В этой работе приведена достаточно обширная библиография, посвященная данному вопросу. Сравним полученное уравнение сохранения полной энергии смеси (24) с уравнением сохранения полной энергии смеси, приведенным в работе [10], которое в принятых здесь обозначениях имеет следующий вид

$$\Big[\frac{\partial\phi_s\rho_s E_s}{\partial t}+\frac{\partial\phi_s\rho_s v_s E_s}{\partial x}\Big]+\Big[\frac{\partial\phi_g\rho_s E_g}{\partial t}+\frac{\partial\phi_g\rho_g v_g E_g}{\partial x}\Big]=-\frac{\partial}{\partial x}(\phi_s v_s p_s+\phi_g v_g p_g). \qquad (25)$$

Для этого приведем уравнение (24) к дивергентному виду. В результате получим следующее уравнение

$$\Big[\frac{\partial\phi_s\rho_s E_s}{\partial t}+\frac{\partial\phi_s\rho_s v_s E_s}{\partial x}\Big]+\Big[\frac{\partial\phi_g\rho_s E_g}{\partial t}+\frac{\partial\phi_g\rho_g v_g E_g}{\partial x}\Big]=-\frac{\partial}{\partial x}(\phi_s v_s p_s+\phi_g v_g p_g)+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}\Big(k_s\frac{\partial T_s}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(k_g\frac{\partial T_g}{\partial x}\Big)-C_s^{\uparrow}(v_g^2-v_s v_g).$$

Следуя работе [10], полагаем равенство давлений конденсированной и газовой фаз, а также пренебрегая переносом тепла в фазах за счет молекулярной теплопроводности, получим

$$\Big[\frac{\partial\phi_s\rho_s E_s}{\partial t}+\frac{\partial\phi_s\rho_s v_s E_s}{\partial x}\Big]+\Big[\frac{\partial\phi_g\rho_s E_g}{\partial t}+\frac{\partial\phi_g\rho_g v_g E_g}{\partial x}\Big]= \\ =-\frac{\partial}{\partial x}(\phi_s v_s p_s+\phi_g v_g p_g)-C_s^{\uparrow}(v_g^2-v_s v_g). \qquad (26)$$

Полученное уравнение отличается от уравнения сохранения полной энергии смеси работы [10] тем, что в уравнении (26) появился дополнительный член $-C_s^{\uparrow}(v_g^2-v_s v_g)$.

Заключение

1. Проведенный в работе анализ инвариантности законов сохранения (1) – (7) относительно преобразования Галилея показал, что уравнения неразрывности частиц и газа (1) и (2), уравнения сохранения импульса частиц и газа (3) и (4), уравнения сохранения удельной внутренней энергии частиц и газа – (5) и (6), уравнение сохранения объемной доли конденсированной фазы – (7) являются инвариантными относительно преобразования Галилея.

2. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения кинетической и полной энергии частиц и газа показал, что данные уравнения также являются инвариантными относительно преобразования Галилея.

3. Различие между уравнениями сохранения полной энергии смеси, приведенными в работах [9, 10], требует дополнительного анализа процессов взаимодействия между фазами при изучении процессов, связанных с течениями газовзвесей, претерпевающих химические и фазовые превращения.

Авторы выражают свою благодарность профессору В.Ф. Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №13 – 01 – 00072.

Литература

1. Гришин, А.М. Экспериментальное исследование воздействия взрыва конденсированных ВВ на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 308, № 5. – С. 1074–1078.
2. Гришин, А.М. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимодействия взрыва на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 72–79.
3. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток/ Ю.М Ковалев, А.Ю Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.
4. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред /Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
5. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.
6. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х.А. Рахматулин // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 27. – С. 184–195.
7. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторыхматематических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2012. – Вып. 6, № 11 (270). – С. 4–7.
8. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 12. – С. 69–73.
9. Baer, M. F Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials / M. F. Baer, J. Nunziato// Int. J. Multiphase Flow. – 1986. – V. 12. – P. 861–889.

10. Нестационарные задачи горения аэровзвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматулин // Известия АН СССР, сер. механика жидкости и газа – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

Юрий Михайлович Ковалев, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), yum_kov@mail.ru.

Елена Адамовна Ковалева, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра «Математические методы в экономике», Челябинский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), ea_kov@mail.ru.

Поступила в редакцию 25 декабря 2013 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 2, pp. 29–37.

MSC 76N15 **DOI: 10.14529/mmp140202**

A Mathematical Study of the Conservation Equation for Two-Phase Mixtures

Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, yum_kov@mail.ru,
E.A. Kovaleva, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ea_kov@mail.ru

We study the invariance under the Galilean transformations of the Baer – Nunziato equations for interpenetrating interacting flows which describe the transition from combustion to explosion in two-phase mixtures. We show that the original Baer – Nunziato model is invariant. In addition, we establish the invariance of the kinetic and total energy equations for the components and mixture. But the conservation equations for the total energy of the mixture in the Baer – Nunziato model and in the model of Nigmatulin's group have different behavior. Thus, additional study is required to choose the model describing more adequately the transition from combustion to explosion in two-phase mixtures.

Keywords: mathematical model; invariance; multicomponent mixture.

References

1. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. [Experimental Study on the Impact of the Explosion of Condensed Explosives on the Front Crown Forest Fire]. *Doklady Akademii Nauk*, 1989, vol. 308, no. 5, pp. 1074–1078. (in Russian)
2. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. [Experimental and Theoretical Study of the Interaction of the Explosion on the Front Crown Forest Fire]. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1989, vol. 25, issue 6, pp. 724–730. DOI: 10.1007/BF00758739
3. Kovalev Yu.M., Cheremokhov A.Yu. [The Weakening of the System of Air Shock Wave Gratings]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protzessov* [Problems of Atomic Science and Technology. Series: Mathematical Modelling of Physical Processes], 1997, no. 3, pp. 39–43. (in Russian)

4. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p.
5. Kuropatenko V.F. [New Models of Continuum Mechanics]. [Novie modeli mechanici sploshnikhsred]. *Journal Engineering Physics and Thermophysics* , 2011, vol. 84, no. 1, pp. 74–92. (in Russian) DOI: 10.1007/s10891-011-0457-0
6. Rakhmatulin K.A. [Fundamentals of gas dynamics of interpenetrating motions of compressible media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1956, vol. 20, no. 27, pp. 184–195. (in Russian)
7. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analysis of the Invariance of Some Mathematical Models of Multi-Media. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics, Mechanics, Physics"*, 2012, no. 11 (270), pp. 4–7. (in Russian)
8. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. Analysis of the Invariance Under the Galilean Transformation of Some Mathematical Models of Multi-Media. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, no. 27 (286), issue 12, pp. 69–73. (in Russian)
9. Baer M.F, Nunziato J. Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials. *Int. J. Multiphase Flow*, 1986, vol. 12, pp. 861–889. DOI: 10.1016/0301-9322(86)90033-9
10. Vaynshteyn P.B., Nigmatulin R.I., Popov V.V., Rakhmatulin H.A. Nonstationary Problems of the Combustion of Aerosuspensions in Fuel that Contains the Oxidant. *Fluid Dynamics*, 1981, vol. 16, no. 1, pp. 14–19. DOI: 10.1007/BF01094807

Received December 25, 2013