УДК 519.62

ОБ УСТОЙЧИВЫХ АЛГОРИТМАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Булатов, О.С. Будникова

При исследованиях в различных областях приложений, если моделируемый процесс обладает последействием, возникает необходимость изучения интегро-алгебраических уравнений (ИАУ). В частности, в виде ИАУ можно записать систему взаимосвязанных интегральных уравнений Вольтерра I, II рода и алгебраических уравнений. В работе рассматриваются линейные ИАУ, для численного решения которых были сконструированы многошаговые методы, основанные на явных методах типа Адамса и экстраполяционных формулах. Ранее была доказана сходимость предлагаемых алгоритмов.

В данной работе показано, что полученные многошаговые алгоритмы обладают свойством саморегуляризации, а параметром регуляризации является шаг сетки, определенным образом связанный с уровнем погрешности правой части рассматриваемых систем. Результаты численных расчетов иллюстрируют теоретические выкладки.

Ключевые слова: интегро-алгебраические уравнения; многошаговые методы; саморегуляризация.

Введение

В середине 70-х годов началось активное исследование и построение численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), t \in [0,1], \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$– $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – n -мерные известная и искомая вектор-функции.

Предполагается, что

$$det A(t) \equiv 0. \tag{3}$$

Системы (1), (2) с условием (3) принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Такие задачи принципиально отличаются от дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной.

Интерес к ДАУ возник в связи с их большим прикладным значением. Пожалуй, первая такая задача появилась при решении интегро-дифференциального уравнения, описывающего процесс переноса нейтронов [3]. Другие важные прикладные задачи приведены в [8, 15, 16].

Первая статья, в которой проведен детальный анализ неявной схемы Эйлера для задачи (1), (2) с постоянными матрицами вышла в 1975 году [7]. С той поры Ю.Е. Бояринцев опубликовал целую серию монографий, посвященных исследованию ДАУ [4 – 8].

В отличии от ОДУ для ДАУ нельзя задавать начальные условия произвольным образом, они должны быть согласованы с правой частью. Одним из подходов согласования начальных данных для ДАУ является иная запись исходной задачи (1), (2), а именно, интегральная форма

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t (B(s) - A'(s))x(s)ds = \int\limits_0^t f(s)ds + A(0)x_0.$$

В данной работе рассмотрены более общие системы интегральных уравнений. Если правая часть таких уравнений задана с погрешностью δ, то показано, что выделенный класс многошаговых методов порождает регуляризирующий алгоритм с параметром регуляризации h-шагом дискретизации, определенным образом связанным с нормой возмущений правой части.

1. Постановка задачи и ее свойства

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \le s \le t \le 1, \tag{4}$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ – $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – n -мерные известная и искомая вектор-функции. Предполагается, что элементы $A(t), K(t,s), f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости. Под решением исходной задачи (4) будем понимать любую непрерывную вектор-функцию $x(t)$, обращающую (4) в тождество.

Принята следующая классификация систем (4) (см., например, [12, 17]) :

a) если $A(t) \equiv 0$, то такие системы принято называть системами интегральных уравнений Вольтерра (СИУВ) первого рода;

b) если $detA(t) \neq 0 \; \forall t \in [0,1]$, в частности, если $A(t)-$единичная матрица, то СИУВ второго рода;

c) если $detA(t) = 0, t_j \in [0,1], j = 1,2,...M$, то СИУВ третьего рода. Точки t_j принято называть сингулярными (особыми) точками.

В данной работе рассмотрен случай, когда матрица $A(t)$ тождественно вырожденная, т.е.

$$detA(t) \equiv 0. \tag{5}$$

Системы (4) с условием (5) принято называть интегральными аналогами дифференциально-алгебраических уравнений [14], вырожденными СИУВ [11], СИУВ четвертого рода и интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ) [18], [19].

Отметим характерные свойства рассматриваемых задач:

a) Система (4) может иметь множество решений.

b) Рассматриваемые задачи являются неустойчивыми к возмущениям входных данных. То есть задача

$$\tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \int\limits_0^t \tilde{K}(t,s)\tilde{x}(s)ds = \tilde{f}(t),$$

где $||\tilde{A}(t) - A(t)|| \le \delta$, $||\tilde{K}(t,s) - K(t,s)|| \le \delta$, $||\tilde{f}(t) - f(t)|| \le \delta$, здесь

$$|| * || = \max_t \max_j | *_j (t)|$$

может не иметь решения или $||\tilde{x}(t) - x(t)|| \to \infty$, при $\delta \to 0$.

В качестве иллюстрации приведем несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $d = 1$ данная система имеет семейство решений $u(t) = \phi(t)$, $v(t) = -\phi'(t)$, где $\phi(t)$– любая функция из класса $C^1_{[0,1]}$.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}.$$

При $\delta_1 = \delta_2 \equiv 0$ данная система имеет единственное решение $u(t) = e^{-t}$, $v(t) = 0$.

При $\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0$ система имеет решение $\tilde{u}(t) = e^{-t}$, $\tilde{v}(t) = \frac{\delta_2}{\delta_1} e^{-\frac{t}{\delta_1}}$. Таким образом, если $\delta_1 \to -0$, то $||\tilde{v}(t)||_C \to \infty$.

Если $\delta_1 = 0, \delta_2 = \delta \sin \frac{t}{\delta^2}$ $(||\delta_2||_C = \delta)$, то $\tilde{u}(t) = e^{-t}$, $\tilde{v}(t) = \frac{1}{\delta} \cos \frac{t}{\delta^2}$, т.е $||\tilde{v}(t)||_C \to \infty$ при $\delta \to 0$.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \delta_4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где δ_4 и δ_3 - скалярные малые параметры.

При $\delta_3 = \delta_4 \equiv 0$ данная система имеет только тривиальное решение, но если $\delta_3 \neq 0, \delta_4 \neq 0$, то решение данной системы примет вид: $\tilde{u}(t) = \delta_4 e^{-\frac{t}{\delta_3}}$, $\tilde{v}(t) = -\frac{\delta_4}{\delta_3} e^{-\frac{t}{\delta_3}}$.

Пример два относится к классическим некорректно поставленным задачам: нахождение полуобратных матриц и восстановление производной. В примере 3 «хорошее» возмущение (δ_3 не меняет ранг матрицы $A(t)$) изменяет структуру матричного пучка $\lambda A(t) + B(t)$.

В дальнейшем изложении нам потребуются ряд определений и вспомогательные утверждения.

В 1987 году вышла первая работа, посвященная ИАУ, в которой были сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения для рассматриваемого класса задач [14].

Определение 1. [14]. *Пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень» на отрезке $[0,1]$ (имеет индекс один, имеет простую структуру), если*

$$rank A(t) = deg(det(\lambda A(t) + B(t))) = m = const \; \forall t \in [0,1],$$

где λ скаляр, символ deg (.) означает показатель степени многочлена (.), а операция deg(0) не определена.

Теорема 1. [14]. *Пусть для задачи* (4) *выполнены условия:*
1. $A(t) \in C^1_{[0,1]}, f(t) \in C^1_{[0,1]}, K(t,s) \in C^2_\Delta, \Delta = \{0 \le s \le t \le 1\}$;

2. Пучок $\lambda A(t) + K(t,t)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень» на отрезке $[0,1]$;
3. $rankA(0) = rank(A(0) \mid f(0))$.
Тогда исходная система имеет единственное непрерывное решение.

В примере 3, как отмечалось выше, «хорошие» возмущения не меняют ранга матрицы $A(t)$, но меняют структуру матричного пучка:

$$det(\lambda A(t) + K(t,t)) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \delta_3 \end{vmatrix} = \lambda\delta_3 - 1,$$

таким образом, степень определителя пучка матриц зависит от значения δ_3:

$$deg(\lambda\delta_3 - 1) = \begin{cases} 1, \delta_3 \neq 0, \\ 0, \delta_3 = 0. \end{cases}$$

Нарушается второе условие теоремы 1, условие «ранг-степень», отвечающее за отсутствие сингулярных точек в решении. И при решении возмущенной задачи (см. выше пример 3) при $\delta_3 = 0$ решения не существует.

2. Численный метод

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $t_i = ih, i = 1,2,\ldots,N,\ h = \frac{1}{N}$ и обозначим $A_i = A(t_i), K_{i,j} = K(t_i,t_j), f_i = f(t_i), x_i \approx x(t_i)$.

Многошаговые методы имеют вид:

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i+1-j} + h\sum_{l=0}^{i+1}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}, i = k, k+1, ..., N, \tag{6}$$

где $\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i+1-j}$ – аппроксимация $x(t_{i+1})$, $h\sum_{l=0}^{i+1}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l$ – аппроксимация интегрального слагаемого, $\omega_{i+1,l}$ – называются весами квадратурной формулы.

Предполагается, что начальные значения $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$ заранее вычислены с достаточной точностью.

Формулы (6) могут быть:
1) явными при $\alpha_0 \neq 0$, $\omega_{i+1,i+1} = 0$;
2) неявными при $\alpha_0 \neq 0$, $\omega_{i+1,i+1} \neq 0$.

В силу вырожденности матрицы $A(t)$ можно применять только неявные методы. Однако ряд таких методов порождают неустойчивые процессы [2, 13, 20].

В статье [9] предложены и обоснованы k-шаговые методы, основанные на явном методе Адамса (см., например, [13, 20]) для интегрального слагаемого и на экстраполяционной формуле для вычисления x_{i+1} по заранее вычисленным значениям $x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-k}$.

Данные методы имеют вид:

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j} + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}. \tag{7}$$

Приведем табл. 1 коэффициентов α_j для $k = 1,2,...,5$ (см. [9]) и значения коэффициентов $\omega_{i+1,l}$ для $k = 1,2,3$ (см. [13]):

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 3 & & \\ 3 & 2 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \omega_{i+1,l} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 & & & & \\ 9 & 5 & 11 & 23 & & & \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 & & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 12 & 7 & 23 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 64 & -32 & 64 & & & & & \\ 55 & 5 & 5 & 55 & & & & \\ 55 & -4 & 42 & -4 & 55 & & & \\ 55 & -4 & 33 & 33 & -4 & 55 & & \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 33 & -4 & 55 & \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 24 & 33 & -4 & 55 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Таблица 1

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	–1	–	–	–	–
2	3	–3	1	–	–	–
3	4	–6	4	–1	–	–
4	5	–10	10	–5	1	–
5	6	–15	20	–15	6	–1

Относительно сходимости предложенных методов (7) в [9] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. [9]. *Пусть для задачи* (4) *выполнены условия:*

1. элементы $x(t),\ A(t),\ f(t) \in C^{(k+1)}_{[0,1]},\ K(t,s) \in C^{(k+2)}_{\Delta}, \Delta = \{0 \leq s \leq t \leq 1\}$;

2. пучок $\lambda A(t) + K(t,t)$ *удовлетворяет критерию «ранг-степень» на всем отрезке* $[0,1]$;

3. $rank A(0) = rank(A(0) \mid f(0))$.

4. для начальных значений справедливо $||x_j - x(t_j)|| \leq Rh^{k+1}, R < \infty,\ j = 0, 1, \cdots, k-1$

Тогда метод (7) *при* $k \leq 5$ *сходится к точному решению с порядком* $k+1$*, то есть, справедлива оценка*

$$||x_i - x(t_i)|| = O(h^{k+1}),\ i = k, k+1, ..., N-1.$$

3. Устойчивость метода к возмущениям исходных данных

Рассмотрим возмущенную задачу

$$A(t)\tilde{x}(t) + \int\limits_0^t K(t,s)\tilde{x}(s)ds = \tilde{f}(t), 0 \leq s \leq t \leq 1. \tag{8}$$

Как уже отмечалось выше, рассматриваемые задачи относятся к классу условно корректных задач и $||\tilde{x}(t) - x(t)|| \to \infty$, при $\delta \to 0$.

Покажем, что (7) является регуляризирующим алгоритмом, если связать h и δ определенным образом. Выпишем для (8) схему (7):

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\tilde{x}_{i-j} + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}\tilde{x}_l = \tilde{f}_{i+1},\ i = 1, 2, ... \tag{9}$$

Введем вектор погрешности решения $\tilde{\epsilon}_j = \tilde{x}_i - x(t_i)$ и оценим его норму в метрике C. Данный вектор удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\tilde{\epsilon}_{i-j}+h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}\tilde{\epsilon}_l=\tilde{r}_{i+1}, \tag{10}$$

где $\tilde{r}_{i+1}=r_{i+1}+f_{i+1}-\tilde{f}_{i+1}, i=1,...,N$, $r_{i+1}-$ погрешность квадратурной формулы.

Проводя выкладки, аналогичные [9], получим

$$||\tilde{\epsilon}_i||\leq L_1h^{k+1}+\frac{2\delta}{h}.$$

Выбирая h следующим образом:

$$L_1h^{k+1}+\frac{2\delta}{h}\to\min,$$

$$h(\delta)\asymp\delta^{\frac{1}{k+2}}, \tag{11}$$

получим:

$$||\tilde{x}_j-x(t_j)||=O(\delta^{\frac{k+1}{k+2}}). \tag{12}$$

Из (11), (12) вытекает, что метод (7) можно рассматривать как регуляризирующий алгоритм, в котором шаг сетки является параметром регуляризации.

То значение h, при котором $||\tilde{x}_j-x(t_j)||$ принимает минимальные значения будем называть, по аналогии с [1], квазиоптимальным шагом и обозначать $h_{k.o.}$.

4. Численные эксперименты

Численные расчеты проводились на нескольких тестовых ИАУ с пилообразным возмущением правой части, т.е. вместо точного значения вектор-функции $f(t_i)$ мы взяли $\widehat{f_i}=f_i+\dot{\delta}(-1)^i$.

Пример 4.

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\x_2(s)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}t^2+t\\\frac{t^3}{3}+t^2+t\end{pmatrix},\quad t\in[0,1].$$

Точное решение: $x(t)=\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Пример 5.

$$\begin{pmatrix}1&t\\t&t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}e^{t-s}&0\\e^{-2s}&e^{t+s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\x_2(s)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}t\cdot e^{-t}+e^t(t+1)\\2t\cdot e^t+1+e^{-t}(t^2-1)\end{pmatrix},\ t\in[0,1].$$

Точное решение: $x(t)=\begin{pmatrix}e^t\\e^{-t}\end{pmatrix}$. Результаты расчетов приведены в табл. 3.

Пример 6.

$$\begin{pmatrix}1&1\\e^t&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}t+2s&t-s\\1+s&2e^{t+s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\x_2(s)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}2t+1+e^{-t}(1-3t)\\2t\cdot e^t+4-e^{-t}(2+t)\end{pmatrix},$$

$$t\in[0,1].$$

Точное решение: $x(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}$. Результаты расчетов приведены в табл. 4.

Таблица 2

$k=0$			$k=1$			$k=2$		
δ	$h_{k.o}$	err	δ	$h_{k.o}$	err	δ	$h_{k.o}$	err
$0,1$	$0,3162$	$0,46$	$0,1$	$0,46416$	$0,22135$	$0,1$	$0,5623$	$0,01376$
$\frac{0,1}{4}$	$0,1581$	$0,2561$	$\frac{0,1}{8}$	$0,2321$	$0,0662$	$\frac{0,1}{16}$	$0,2812$	$0,13 \cdot 10^{-3}$
$\frac{0,1}{4^2}$	$0,0791$	$0,1228$	$\frac{0,1}{8^2}$	$0,11604$	$0,016804$	$\frac{0,1}{16^2}$	$0,1406$	$0,35 \cdot 10^{-4}$
$\frac{0,1}{4^3}$	$0,0395$	$0,0603$	$\frac{0,1}{8^3}$	$0,05802$	$0,00402$	$\frac{0,1}{16^3}$	$0,0703$	$0,16 \cdot 10^{-5}$
$\frac{0,1}{4^4}$	$0,0198$	$0,0307$	$\frac{0,1}{8^4}$	$0,0290$	$0,00101$	$\frac{0,1}{16^4}$	$0,0352$	$0,1 \cdot 10^{-6}$

Таблица 3

$k=0$			$k=1$			$k=2$		
δ	$h_{k.o}$	err	δ	$h_{k.o}$	err	δ	$h_{k.o}$	err
$0,1$	$0,3162$	$0,242$	$0,1$	$0,46416$	$0,1950$	$0,1$	$0,5623$	$0,0684$
$\frac{0,1}{4}$	$0,1581$	$0,11304$	$\frac{0,1}{8}$	$0,2321$	$0,0563$	$\frac{0,1}{16}$	$0,2812$	$0,011$
$\frac{0,1}{4^2}$	$0,0791$	$0,055$	$\frac{0,1}{8^2}$	$0,11604$	$0,01251$	$\frac{0,1}{16^2}$	$0,1406$	$0,00218$
$\frac{0,1}{4^3}$	$0,0395$	$0,0257$	$\frac{0,1}{8^3}$	$0,05802$	$0,00312$	$\frac{0,1}{16^3}$	$0,0703$	$0,26 \cdot 10^{-3}$
$\frac{0,1}{4^4}$	$0,0198$	$0,01391$	$\frac{0,1}{8^4}$	$0,0290$	$0,79 \cdot 10^{-3}$	$\frac{0,1}{16^4}$	$0,0352$	$0,32 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4

$k=0$			$k=1$			$k=2$		
δ	$h_{k.o}$	err	δ	$h_{k.o}$	err	δ	$h_{k.o}$	err
$0,1$	$0,3162$	$0,12$	$0,1$	$0,46416$	$0,0758$	$0,1$	$0,5623$	$0,011$
$\frac{0.1}{4}$	$0,1581$	$0,0324$	$\frac{0.1}{8}$	$0,2321$	$0,0149$	$\frac{0.1}{16}$	$0,2812$	$0,0084$
$\frac{0.1}{4^2}$	$0,0791$	$0,0174$	$\frac{0.1}{8^2}$	$0,11604$	$0,0002$	$\frac{0.1}{16^2}$	$0,1406$	$0,00037$
$\frac{0.1}{4^3}$	$0,0395$	$0,0089$	$\frac{0.1}{8^3}$	$0,05802$	$0,47 \cdot 10^{-3}$	$\frac{0.1}{16^3}$	$0,0703$	$0,47 \cdot 10^{-4}$
$\frac{0.1}{4^4}$	$0,0198$	$0,0042$	$\frac{0.1}{8^4}$	$0,0290$	$0,28 \cdot 10^{-4}$	$\frac{0.1}{16^4}$	$0,0352$	$0,71 \cdot 10^{-5}$

Результаты численных экспериментов хорошо согласуются с теоретические выкладками.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ номер 11-01-00639-а и 13-01-93002-Вьет-а.

Литература

1. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А.С. Апарцин. — Новосибирск: Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1999.
2. Апарцин, А.С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра 1 рода методом квадратур / А.С. Апарцин, А.Б. Бакушинский // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: ИГУ, 1972. – Вып. 1. – С. 248–258.
3. Бояринцев, Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
4. Бояринцев, Ю.Е. Применение обобщенных обратных матриц к решению и исследованию систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка / Ю.Е. Бояринцев // Методы оптимизации и исследования операций. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1984. – С. 123–141.
5. Бояринцев, Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 1988. – 158 с.

6. Бояринцев, Ю.Е. Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 1996. – 261 с.
7. Бояринцев, Ю.Е. Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев, В.М. Корсуков // Вопр. приклад. математики. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1975. – С. 140–152.
8. Бояринцев, Ю.Е. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев, И. В. Орлова. – Новосибирск: Наука, 2006. – 124 с.
9. Будникова, О.С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами / О.С. Будникова, М.В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, №5. – С. 829–839.
10. Булатов, М.В. Решение алгебро-дифференциальных систем методом наименьших квадратов / М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков // Тр. XI Междунар. Байкал. шк.-семинара «Методы оптимизации и приложения». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1998. – Т. 4. – С. 72–75.
11. Булатов, М.В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра / М.В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2002. — Т. 42, № 3. – С. 330–335.
12. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, решения / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986.
13. Тен Мен Ян Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода: дис. . . . канд. физ. мат. наук / Тен Мен Ян. – Иркутск, 1985. – 215 с.
14. Чистяков, В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В.Ф. Чистяков //Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 231–239.
15. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: пер. с англ. / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
16. Brenan, K.F. Numercal Solution of Initial-Value Problems in Differental-Algebraic Equations /K.F. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold // Appl. Math. – Philadelphia, 1996.
17. Brunner, H. The Numercal Solution of Volterra Equations / H. Brunner, P. J. van der Houwen. — Amsterdam: North-Holland, CWI Monographs 3, 1986.
18. Brunner, H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functioal Equations / H. Brunner. – Cambridge: Unversity Press, 2004.
19. Kauthen, J.P. The Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations of Index-1 by Pollinomial Spline Collocation Methods / J.P. Kauthen // Math. Comp. – 2000. – V. 236. – P. 1503–1514.
20. Linz, P. A Survey of Methods for the Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind / P. Linz //Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. – University Press, Cambridge, 2004.
21. Hadizadeh, M. Jacobi Spectral Solution for Integral Algebraic Equations of Index-2 / M. Hadizadeh, F. Ghoreishi, S. Pishbin // Appl. Numer. Math. – 2011. – V. 61, issue 1. – P. 131–148.

Михаил Валерьянович Булатов, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет (г. Иркутск, Российская Федерация), mvbul@icc.ru.

Ольга Сергеевна Будникова, ассистент, кафедра «Математика и методика обучения математике», ФГБОУ ВПО «Восточно-Сибирская государственная академия образования» (г. Иркутск, Российская Федерация), osbud@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 4, pp. 5–14.

MSC 65R20

On Stable Algorithms for Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations

M.V. Bulatov, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk State Technical University, Irkutsk, Russian Federation, mvbul@icc.ru,
O.S. Budnikova, East Siberian State Academy of Education, Irkutsk, Russian Federation, osbud@mail.ru

There is the necessity to study integral-algebraic equations if a prototype process has an aftereffect at the analysis of various areas of science. Particularly, a system of interrelated Volterra equations of the first and second kind and algebraic equations can be written as integral-algebraic equation. In this paper linear integral-algebraic equations are considered. We have constructed multistep methods for numerical solutions of IAEs. These methods are based on Adams quadrature formulas and on extrapolation formulas as well. We have proven suggested algorithms convergence. In this paper we show that our multistep methods have a property of self-regularizing; and regularization parameter is the step of a grid, which is connected with the level of accuracy of right-part error of the system under consideration. The results of numerical experiments illustrate theoretical computations.

Keywords: integral-algebraic equations; multistep methods; self-regularization.

References

1. Apartsyn A.S. *Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind.* VSP, Utrecht, 2003.
2. Apartsyn A.S., Bakushinskii A.B. Approximate Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind by the Quadrature Method [Priblizhennoe reshenie integral'nyh uravnenij Vol'terra 1 roda metodom kvadratur]. *Differential and Integral Equations,* Irkutsk. Gos. Univ., Irkutsk, 1973, issue 1, pp. 107–116.
3. Boyarintsev YU.E. *Reguljarnye i singuljarnye sistemy linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij* [Regular and Singular Systems of Linear Ordinary Differential Equations]. Novosibirsk, Nauka, 1980. 222 p.
4. Boyarintsev YU.E. Application of Generalized Inverse Matrices to Solve and to Research Systems of Partial Differential Equations of First Order [Primenenie obobshchennykh obratnykh matrits k resheniyu i issledovaniyu sistem differentsialŸnykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka]. *Metody optimizatsii i issledovanie operatsiy* [Methods of Optimization and Operations Research], Irkutsk, SEI SO AN USSR, 1984, pp. 123–141.
5. Boyarintsev YU.E. *Metody reshenija vyrozhdennyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij* [Methods of Solution of Singular Systems of Ordinary Differential Equations]. Novosibirsk, Nauka, 1988. 158 p.

6. Boyarintsev YU.E.*Metody reshenija nepreryvnyh i diskretnyh zadach dlja singuljarnyh sistem uravnenij* [Methods of Solution of Continuous and Discontinuous Problems for Singular Systems of Equations]. Novosibirsk, Nauka, 1996. 261 p.
7. Boyarintsev, YU. E., Korsukov, V. M. Application of Difference Methods to Solve Regular Systems of Ordinary Differential Equations [Primenenie raznostnyh metodov k resheniju reguljarnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij]. *Vopr. prikladnoj matematiki* [Questions of Applied Mathematics], Irkutsk, SEI SO AN USSR, 1975, pp. 140–152.
8. Boyarintsev YU.E., Orlova I.V.*Puchki matric i algebro-differencial'nye sistemy* [Pencil Matrix and Algebraic-Differential Systems]. Novosibirsk, Nauka, 2006. 124 p.
9. Budnikova O.S., Bulatov M.V. Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations of Multistep Methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, issue 5, pp. 691–701.
10. Bulatov M.V., Chistjakov V.F. Solution of Algebro-Differential Systems by Least Square Method [Reshenie algebro-differencial'nyh sistem metodom naimen'shih kvadratov]. *Trudy XI Mezhdunar. Bajkal'skoj shkoly-seminara Metody optimizacii i prilozhenija* [Prod. XI Baikal Int. workshop «Optimization Methods and Applications»]. Irkutsk, ESI SB RAS, 1998, vol. 4, pp. 72–75.
11. Bulatov M.V. Regularization of Singular Systems of Volterra Integral Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, no. 3, pp. 315–320.
12. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral'nye uravnenija: metody, algoritmy, reshenija* [Integral Equations: Methods, Algoritms, Solutions]. Kiev, Naukova dumka, 1986.
13. Ten Men Yan *Priblizhennoe reshenie linejnyh integral'nyh uravnenij Vol'terra I roda* [Approximate Solution of Linear Volterra Integral Equations of the First Kind]. Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics, Irkutsk, 1985.
14. Chistyakov V.F. On Singular Systems of Ordinary Differential Equations and Their Integrals Analogues [*O singuljarnyh sistemah obyknovennyh differencial'nyh uravnenij i ih integral'nyh analogah*]. *Lyapunov Functions and Applications*, Novosibirsk, Nauka, 1987, pp. 231–239.
15. Harrier E., Wanner G.*Solving Ordinary Differential Equations II.* Springer-Verlag, 1991.
16. Brenan K.F., Campbell S.L., Petzold L.R. Numercal Solution of Initial-Value Problems in Differental-Algebraic Equations. *Appl. Math.,* Philadelphia, 1996.
17. Brunner H., van der Houwen P.J. *The Numercal Solution of Volterra Equations.* Amsterdam, North-Holland, CWI Monographs 3, 1986.
18. Brunner H. *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functioal Equations.* Unversity Press, Cambridge, 2004.
19. Kauthen J.P. The Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations of Index-1 by Pollinomial Spline Collocation Methods. *Math. Comp.,* 2000, vol. 236, pp. 1503–1514.
20. Linz P.A Survey of Methods for the Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind.*Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations,* University Press, Cambridge, 2004.
21. Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S. Jacobi Spectral Solution for Integral Algebraic Equations of Index-2. *Appl. Numer. Math,* 2011, vol. 61, issue 1, pp. 131–148.

Поступила в редакцию 2 июля 2013 г.