УДК 519.833

# О ПОСТРОЕНИИ ПАРЕТО – РАВНОВЕСНОЙ СИТУАЦИИ В ОДНОЙ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЕ

***К.Н. Кудрявцев***

Рассматриваются достаточные условия существования равновесия по Нэшу, максимального по Парето по отношению ко всем остальным таким равновесиям. Предлагается алгоритм построения такого равновесия, основанный на использовании специального вида свертки Гермейера.

Ключевые слова: бескоалиционная игра, равновесие по Нэшу, максимум по Парето, свертка Гермейера.

Наиболее распространенным понятием решения в теории бескоалиционных игр является равновесие по Нэшу, предложенное в [1] в 1950 г. Это равновесие широко используется в экономике, социологии, военных науках и во многих других областях человеческой деятельности. Однако множеству ситуаций равновесия по Нэшу присуще негативное свойство: могут существовать две ситуации равновесия по Нэшу такие, что выигрыши каждого игрока в первой из них строго больше соответствующих выигрышей в другой. На этот факт было обращено внимание в серии работ [2, 3] при исследовании вопроса существования гарантированного равновесного решения бескоалиционной игры при неопределенности. Именно, там была использована ситуация равновесия по Нэшу, одновременно максимальная по Парето по отношению к остальным ситуациям равновесия, что позволяло преодолеть указанные отрицательные свойства. Однако возникает вопрос: как найти такое равновесие (названное в [4] *Парето – равновесной ситуацией*)? В [4] было предложено использовать достаточные условия, позволяющие свести задачу построения Парето – равновесной ситуации к нахождению седловой точки в специального вида гермейеровской свертке функций выигрыша.

Отметим, что при формализации неулучшаемого по Парето равновесия по Нэшу может быть использовано два подхода: первый – требовать оптимальности по Парето на множестве всех ситуаций рассматриваемой игры, второй - находить максимальное по Парето равновесие на множестве всех равновесий по Нэшу. Первый подход обычно предполагает [5] построение всех ситуаций равновесия по Нэшу с последующей проверкой каждой такой ситуации на принадлежность Парето–границе множества ситуаций игры. Численные алгоритмы, реализующие такой способ, предлагаются для биматричных игр в [5], для некоторых игр двух лиц в нормальной форме в статье [6] и др. Второй подход развивается в [4].

Итак, рассмотрим бескоалиционную игру $N$ лиц:

$$\left\langle \mathbb{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{N}=\{1,2,...,N\}$ – множество порядковых номеров игроков, каждый из которых самостоятельно выбирает свою *стратегию* $x_i$ из множества стратегий $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{R}^{n_i}$, в результате такого выбора складывается *ситуация* $x=(x_1,x_2,...,x_N)\in \mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times...\times\mathrm{X}_N$ игры (1), на множестве всех таких ситуаций определена скалярная функция выигрыша *i*-го игрока $f_i(x)$ $(i=1,2,...,N)$, значение которой на реализовавшейся ситуации называется выигрышем *i*-го игрока. Далее будем применять обозначения $(x\|z_i)=(x_1,...,x_{i-1},z_i,x_{i-1},...x_N)$ и $f=(f_1,...,f_N)$.

Пара $(x^e,f^e)=\left((x_1^e,...,x_N^e),\left(f_1(x^e),...,f_N(x^e)\right)\right)\in \mathrm{X}\times\mathrm{R}^N$ называется [1] *равновесием по Нэшу* в игре (1), если:

$$\max_{x_i\in\mathrm{X}_i} f_i(x^e\|x_i)=f_i(x^e) \quad (i\in\mathbb{N}); \tag{2}$$

далее $x^e$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу* в игре (1), а через $\mathrm{X}^e$ обозначим все множество таких ситуаций $x^e$ в игре (1).

Одним из негативных свойств ситуации равновесия по Нэшу, как было сказано выше, является внутренняя неустойчивость множества всех таких ситуаций. А именно, в игре (1) может существовать две ситуации равновесия по Нэшу $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ таких, что при каждом $i \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство:

$$f_i\left(x^{(1)}\right) > f_i\left(x^{(2)}\right).$$

Отсюда следует, что игрокам в игре (1) нужно использовать не любую ситуацию равновесия по Нэшу, а лишь ту, которая одновременно максимальна по Парето по отношению к остальным равновесным по Нэшу ситуациям.

**Определение 1** [4]. Ситуацию $x^P \in \mathrm{X}$ назовем *Парето – равновесной* ситуацией (ПРС) в игре (1), если:

– во-первых, $x^P$ равновесна по Нэшу в игре (1), то есть удовлетворяет условиям (2);

– во-вторых, $x^P$ максимальна по Парето в $N$-критериальной задаче:

$$\left\langle \mathrm{X}^e, \left\{ f_i(x) \right\}_{i \in \mathbb{N}} \right\rangle,$$

то есть, при любых ситуациях $x \in \mathrm{X}^e$ несовместна система неравенств:

$$f_i(x) \geq f_i\left(x^P\right) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Для выявления достаточных условий существования ПРС рассмотрим $N$+1 скалярную функцию:

$$\varphi_i(x,z) = f_i\left(z \| x_i\right) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

и

$$\varphi_{N+1}(x,z) = \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(z),$$

определенные на декартовом произведении $\mathrm{X} \times \mathrm{Z}$; здесь и далее ситуации $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathrm{X}$, $z = (z_1, ..., z_N) \in \mathrm{Z} = \mathrm{X}$, а $\left(x \| z_i\right) = \left(x_1, ..., x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, ..., x_N\right)$.

*Сверткой Гермейера* функций $\varphi_j(x,z)$ $\left(j = 1, ..., N, N+1\right)$ называется [7] функция:

$$\varphi(x,z) = \max_{j=1,...,\mathrm{N}+1} \varphi_j(x,z).$$

**Лемма** [7]. Если $N$+1 скалярные функции $\varphi_j(x,z)$ $\left(j = 1, ..., N, N+1\right)$ непрерывны на $\mathrm{X} \times \mathrm{Z}$, а множества $\mathrm{X}, \mathrm{Z} \in \operatorname{comp} \mathrm{R}^n$, то их свертка Гермейера $\varphi(x,z)$ также непрерывна на $\mathrm{X} \times \mathrm{Z}$.

Далее, по функциям выигрыша $f_i(x)$ игры (1) построим гермейеровскую свертку:

$$\varphi(x,z)=\max\left\{\left[\, f_i\left(z\|x_i\right)-f_i(z)\quad (i\in\mathbb{N})\right],\left(\sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(x)-\sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(z)\right)\right\}, \qquad (3)$$

заданную на $\mathrm{X}\times(\mathrm{Z}{=}\mathrm{X})$.

Игре (1) сопоставим вспомогательную антагонистическую игру:

$$\left\langle \mathrm{X}, \mathrm{Z}{=}\mathrm{X}, \varphi(x,z)\right\rangle. \qquad (4)$$

Седловая точка $\left(x^0,z^*\right)\in \mathrm{X}\times\mathrm{Z}$ в игре (4) определяется цепочкой неравенств:

$$\varphi\left(x,z^*\right)\le\varphi\left(x^0,z^*\right)\le\varphi\left(x^0,z\right) \qquad \forall x,z\in \mathrm{X}.$$

**Теорема 1** [4]. (Достаточные условия существования ПРС) Если в антагонистической игре (4) существует седловая точка $\left(x^0,z^*\right)$, то минимаксная стратегия $z^*$ является равновесной по Бержу–Парето ситуацией в бескоалиционной игре (1).

Следующий *алгоритм* построения ПРС ситуации в бескоалиционной игре (1) диктуется теоремой 1:

– *во-первых*, построить по формулам (3) функцию $\varphi(x,z)$;

– *во-вторых*, найти седловую точку $\left(x^0,z^*\right)$ функции $\varphi(x,z)$.

Тогда найденная ситуация $z^*\in \mathrm{X}$ как раз и будет являться ПРС.

Данный алгоритм был реализован для конечных (матричных) игр N лиц в среде Maple.

На вопрос о существовании ПРС в смешанном расширении игры (1) отвечает следующее утверждение

**Утверждение 1** [4]. Пусть в игре (1):

а) у каждого *i*-го игрока множество стратегий $\mathrm{X}_i$ есть непустой компакт в $\mathrm{R}^{n_i}$ $(i\in\mathbb{N})$;

б) функции выигрыша $f_i(x)$ у *i*-го игрока непрерывны на множестве ситуаций $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times\ldots\times\mathrm{X}_N$.

Тогда в игре (1) существует Парето – равновесная ситуация в смешанных стратегиях.

Библиографический список

1. Nash, J.F Equilibrium points in N-person games / J.F. Nash // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. – 1950. – V. 36. – Pp. 48–49.

2. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 27–44.

3. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 3–45.

4. Жуковский, В.И. Парето-равновесная ситуация: достаточные условия и существование в смешанных стратегиях / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 74–91.

5. Gatti, N. On the verification and computation of strong nash equilibrium / N. Gatti, M. Rocco, T. Sandhom // Proceedings of the ACM International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS), Saint Paul, USA, May 6–10. – 2013. – P. 723–730.

6. Gasko, N. Pareto -optimal Nash equilibrium detection using an evolutionary approach / N. Gasko, M. Suciu, R.I. Lung, D. Dumitrescu // Acta Univ. Sapientiae, Informatica. – 2012. – V.4. N. 2. – Pp. 237–246.

7. Гермейер, Ю.Б. Введение в теорию исследования операций / Ю.Б. Гермейер. – М: Наука, 1971, – 384 с.