На правах рукописи

БРЕДИХИНА Анна Борисовна

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет" (национальный исследовательский университет) на кафедре вычислительной математики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Танана Виталий Павлович, заведующий кафедрой вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск.

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, доцент Данилин Алексей Руфимович, заведующий отделом уравнений математической физики, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург;

доктор физико-математических наук, Хромова Галина Владимировна, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов.

Ведущая организация: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

Защита диссертации состоится 21 мая 2013 г. в 14 ч. 00 м. на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 в Институте математики и механики УрО РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 17 апреля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук В.Д. Скарин

Общая характеристика работы

Объект исследования. Диссертация посвящена обоснованию численных методов решения некорректно посталенных задач и получению оценок погрешности этих методов .

Актуальность темы. При математическом моделировании процессов и явлений, происходящих в природе и обществе, приходится сталкиваться с задачами, не удовлетворяющими условиям корректности Адамара .

Такие задачи получили название некорректно поставленных. Основы теории моделирования и решения таких задач были заложены в трудах академиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и член-корр. РАН В.К. Иванова, в которых были сформулированы основные принципы регуляризации и предложены некоторые методы их решения, исследование которых продолжается и в настоящее время.

Поскольку особенностью некорректно поставленных задач является низкая точность получаемых приближенных решений и в связи с этим их низкая информативность, то проблема повышения точности методов, а также уточнения оценок их погрешности актуальна.

Поэтому, главным критерием при разработке методов решения таких задач становится оценка их точности. Для этих целей в трудах известных математиков А.Л. Агеева, В.В. Арестова, В.Я. Арсенина, А.Б. Бакушинского, Г.М. Вайникко, В.В. Васина, А.В. Гончарского, А.Р. Данилина, А.М. Денисова, В.В. Иванова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева, А.С. Леонова, И.В. Мельниковой, В.А. Морозова, В.Н. Страхова, В.П. Тананы, А.Н. Тихонова, А.М. Федотова, Г.В. Хромовой, А.В. Чечкина, А.Г. Яголы и др. разработана теория оценивания методов решения таких задач. Особое место среди методов решения некорректно поставленных задач занимают оптимальные, как самые точные, и близкие к ним оптимальные по порядку методы. Заметим, что при решении практических задач даже оптимальные методы не всегда выявляют особенности исследуемого явления.

Настоящая работа представляет собой продолжение исследований в этом направлении.

Цель работы. Обоснование и анализ методов регуляризации, исследование вопросов повышения их эффективности с помощью получения точных оценок погрешности этих методов и разработка новых методов получения оценок при условии кусочной гладкости решения.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, математической физики и теории некорректных задач.

Научная новизна. Проведено аналитическое исследование метода проекционной регуляризации, обоснован нелинейный метод проекционной регуляризации. Доказана оптимальность метода Лаврентьева при решении операторных уравнений с некоторой ошибкой в операторе.

Теоретическая значимость. Получены точные оценки погрешности для линейных методов проекционной регуляризации, метода Лаврентьева, кроме того, получены точные по порядку оценки погрешности для нелинейного метода проекционной регуляризации.

Практическая значимость. Основные результаты диссертационной работы имеют значение для строгого обоснования методов, используемых для решения некоторых обратных задач .

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на первой молодежной международной научной школе-конфе-
ренции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(Новосибирск, 10 20 августа 2009 года), на восьмой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения-2009"(Казань, 1 6 ноября 2009 года), на "Первой конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ"(апрель 2009 года), на "Второй конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ"(апрель 2010 года), на XIV Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения"(февраль 2011 года), на Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(октябрь 2011 года), на Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики"(Новосибирск, 5 12 августа 2012 года), также на научных семинарах кафедры вычислительной математики ЮУрГУ , на семинарах по обратным и некорректным задачам член-корр. РАН В.В. Васина в Институте Математики и Механики УрО РАН .

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–11], список которых приведен в конце автореферата. Статья [1] опубликована в научном журнале "Системы управления и информационные технологии" статьи [2] и [3] опубликованы в научном журнале "Вестник ЮУрГУ" , статьи [4] и [5] – в научном журнале "Труды Института Математики и Механики УрО РАН" , включенных ВАК в перечень журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы, изложена на 117 страницах. Библиографический список содержит 156 наименований.

Содержание работы

Во введении приводится обоснование актуальности выбранной области исследования, сделан краткий экскурс в историю вопроса и дан обзор результатов, полученных другими авторами в области некорректных задач. Излагаются основные результаты диссертации.

В главе 1 приведено понятие класса корректности, модуля непрерывности обратного оператора и метода решения условно-корректной задачи, определена количественная характеристика его точности на соответствующем классе.

В последующих главах рассмотрены методы регуляризации операторного уравнения

$$Au = f, \quad u, \ f \in \mathbb{H}, \tag{1}$$

где $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство, A – инъективный линейный ограниченный оператор, отображающий пространство $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ и имеющий неограниченный обратный.

Определение 1. Множество M_r будем называть классом корректности для задачи (1), если сужение $A_{N_r}^{-1}$ оператора A^{-1} на множество $N_r = AM_r$ равномерно непрерывно.

Условно-корректную задачу приближенного решения уравнения (1) поставим следующим образом.

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение u_0 уравнения (1), которое принадлежит множеству $M_r = B\overline{S}_r$, B – линейный ограниченный оператор, отображающий $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, но точное значение правой части f_0 нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta \in \mathbb{H}$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Требуется, используя исходные данные M_r, f_δ, δ задачи, определить приближенное решение u_δ уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения u_0.

Определение 2. Семейство операторов $\{ T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0 \}$ будем называть **методом приближенного решения** уравнения (1) на множестве M_r, если для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает пространство $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ и $T_\delta f_\delta \longrightarrow u_0$ при $\delta \longrightarrow 0$ равномерно на множестве M_r при условии, что $\|f_\delta - Au_0\| \le \delta$.

Количественная характеристика точности метода на множестве M_r

$$\Delta_\delta[T_\delta] = \sup_{u,\ f_\delta}\{\|u - T_\delta f_\delta\| : u \in M_r, \ \|Au - f_\delta\| \le \delta\}.$$

Обозначим через $C[\mathbb{H}]$ множество всех операторов, непрерывно отображающих пространство $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, а через Δ_δ^{opt} величину

$$\Delta_\delta^{opt} = \inf\{\Delta_\delta(P) \ : \ P \in C[\mathbb{H}]\},$$

где $\Delta_\delta[P] = \sup\limits_{u, f_\delta}\{\|u - Pf_\delta\| : u \in M_r, \ \|f_\delta - Au\| \le \delta\}$.

Определение 3. Метод $\{ T_\delta^{opt} : 0 < \delta \le \delta_0 \}$ будем называть **оптимальным** на классе M_r, если $\Delta_\delta[T_\delta^{opt}] = \Delta_\delta^{opt}$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$.

Определение 4. Метод $\{ \overline{T}_\delta : 0 < \delta \le \delta_0 \}$ будем называть **оптимальным по порядку** на классе M_r, если существует число $K > 1$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ $\Delta_\delta[\overline{T}_\delta] \le K \ \Delta_\delta^{opt}$.

Определение 5. Константу K в определении метода, оптимального по порядку, будем называть точной, если $\Delta_\delta[\overline{T}_\delta] = K \ \Delta_\delta^{opt}$.

Глава 2 посвящена методу М.М. Лаврентьева [1]. Результаты этой главы позволяют получить точные оценки погрешности в линейных методах проекционной регуляризации, изученных в следующей главе.

Регуляризующее семейство операторов $\{R_\alpha : 0 < \alpha \le \alpha_0\}$ метода Лаврентьева определим формулой $R_\alpha = B(C + \alpha E)^{-1}$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$, где $C = AB$, а в качестве приближенного решения уравнения (1) u_δ^α возьмем элемент, определяемый равенством $u_\delta^\alpha = R_\alpha f_\delta$.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что $A^* = A$, $A > 0$ и спектр $Sp(A) = [0, \|A\|]$.

В параграфе 2.1 рассмотрен метод Лаврентьева с выбором параметра регуляризации по схеме Страхова [2], а именно из условия

$$\inf_\alpha\{\|R_\alpha\|\delta + \sup_{\|v_0\|\le r}\|R_\alpha C v_0 - B v_0\|\}.$$

В качестве оператора B рассмотрим функцию $G(A)$, где $G(\sigma) \in C[0, \|A\|] \cap C^1(0, \|A\|)$, $G(0) = 0$ и $G'(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (0, \|A\|)$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$r\, G(\sigma)\sigma = \delta. \tag{2}$$

Из свойств функции $G(\sigma)$ следует, что при условии $\delta < r\, G(\|A\|)\|A\|$ уравнение (2) имеет единственное решение $\overline{\sigma}(\delta)$.

В данном параграфе доказана теорема

Теорема 2.1.1. *Пусть функция* $G(\sigma) \in C[0, \|A\|] \cap C^1(0, \|A\|)$ *и для любого* $\sigma \in (0, \|A\|)$ $G'(\sigma) > 0$, $G^2(\sigma)/G'(\sigma)$ *возрастает*, $G(0) = 0$, $\delta < r\, G(\|A\|)\|A\|$, $\overline{\sigma}(\delta)$ – *решение уравнения* (2), *а*

$$\overline{\alpha}(\delta) = \frac{G^2(\overline{\sigma}(\delta))}{G'(\overline{\sigma}(\delta))}.$$

Тогда $\Delta_\delta(R_{\overline{\alpha}(\delta)}) = r\, G(\overline{\sigma}(\delta)) = \omega(\delta, r)$.

В параграфе 2.2 рассмотрен оптимальный метод М.М. Лаврентьева с приближенно заданными оператором и правой частью. Приведем постановку данной задачи.

Рассмотрим операторное уравнение (1), где u, $f \in \mathbb{H}$, $\mathbb{B}[\mathbb{H}]$ – множество линейных ограниченных самосопряженных неотрицательно определенных операторов, отображающих пространство $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, $\mathbb{B}_1[\mathbb{H}]$ – подмножество множества $\mathbb{B}[\mathbb{H}]$, состоящее из инъективных операторов, $\mathcal{A} \subset \mathbb{B}[\mathbb{H}]$.

[1] Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск : Сибирское отделение АН СССР, 1962. 92 с.

[2] Страхов В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 8. С. 1490–1495.

Предполагается, что при $f = f_0$ и при $A \in \mathcal{A}$ уравнение (1) имеет точное решение u_0, принадлежащее множеству $M_r^h = B_h\overline{S}_r$, где $B_h \in \mathbb{B}[\mathbb{H}]$, а $\overline{S}_r = \{v : v \in \mathbb{H}, \|v\| \le r\}$. Но точные значения f_0 правой части уравнения (1) (из за ошибки измерения) и оператора A (из-за ошибки моделирования) нам неизвестны. Вместо них даны некоторые приближения $f_\delta \in \mathbb{H}$, и $A_h \in \mathcal{A} \cap \mathbb{B}_1[\mathbb{H}]$, а также уровни их погрешности $\delta \ge 0$, $h \ge 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$, $\|A_h - A\| \le h$ и $AB_h = B_hA$, $A_hB_h = B_hA_h$.

Необходимо, используя априорную информацию A_h, h, δ, M_r^h определить приближенное решение $u_{\delta h}$ уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения u_0 на множестве M_r^h.

Класс операторов $\mathcal{A}$ определим следующим образом

$$\mathcal{A} = \{A : A \in \mathbb{B}[\mathbb{H}], A_h - A = \varphi(A_h), \varphi \in \Phi\}, \tag{3}$$

где Φ - множество кусочно-непрерывных функций на отрезке $[0, \|A_h\|]$.

Оператор $B_h \in \mathbb{B}[\mathbb{H}]$ определим формулой

$$B_h = G_h(A_h),$$

где функция $G_h(\sigma) \in C[0, \|A_h\|] \cap C^1(0, \|A_h\|)$, $G_h(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает и $G_h'(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (0, \|A_h\|)$, а $G_h(0) = 0$.

Метод приближенного решения P_h уравнения (1) на множестве $M_r^h \times \mathcal{A}$ определим как линейный ограниченный оператор $P_h \in \mathbb{B}[\mathbb{H}]$, который исходным данным A_h, f_δ задачи ставит в соответствие приближенное решение $u_{\delta h} = P_h[f_\delta] \in \mathbb{H}$.

Введем количественную характеристику точности метода при фиксированных $A_h \in \mathcal{A} \cap \mathbb{B}_1[H]$, $\delta \in (0, \delta_0]$ и $h \in (0, h_0]$.

$$\Delta_{\delta h}[P_h] = \sup_{u, A, f_\delta} \{\|u - P_h[f_\delta]\| : u \in M_r^h, A \in \mathcal{A}, \|A_h - A\| \le h, \|f_\delta - Au\| \le \delta\}.$$

Требуется, используя априорную информацию A_h, δ, h, M_r^h, $\mathcal{A}$, вычислить величину $\Delta_{\delta h}^{opt} = \inf\{\Delta_{\delta h}[P_h] : P_h \in \mathbb{B}[\mathbb{H}]\}$.

Для оценки снизу величины $\Delta_{\delta h}^{opt}$ рассматривается уравнение, связывающее параметры σ, h и δ

$$rG_h(\sigma) = rG_h(\sigma)\frac{h}{\sigma} + \frac{\delta}{\sigma}. \tag{4}$$

Из свойств функции $G_h(\sigma)$ следует, что при выполнении условия

$$\|A_h\| > h + \frac{\delta}{rG_h(\|A_h\|)} \tag{5}$$

уравнение (1) имеет единственное решение $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\delta, h)$.

Кроме того, доказана теорема.

Теорема 2.2.1. *Если выполнено условие* (5), *то справедлива следующая оценка* $\Delta_{\delta h}^{opt} \ge rG_h(\overline{\sigma}(\delta, h))$, *где* $\overline{\sigma}(\delta, h)$ *- решение уравнения* (4).

Для оценки сверху величины $\Delta_{\delta h}^{opt}$ рассмотрено регуляризующее семейство операторов для уравнения (1)

$$T_\alpha^h = B[A_h + \alpha E]^{-1}, \ \alpha \in (0, \|A_h\|]. \tag{6}$$

За приближенное решение уравнения (1) принят элемент, определяемый формулой $u_{\delta h}^\alpha = T_\alpha^h f_\delta$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.2.2. *Пусть значение параметра* $\overline{\sigma}(\delta, h)$ ***является решением уравнения*** *(4), а*

$$\overline{\alpha}(\delta, h) = \frac{G_h^2(\overline{\sigma}(\delta, h))}{G_h'(\overline{\sigma}(\delta, h))} - hG_h(\overline{\sigma}(\delta, h)), \quad \overline{\alpha}(\delta, h) > 0. \tag{7}$$

Тогда $\Delta(T_{\overline{\alpha}(\delta,h)}^h) \le rG_h(\overline{\sigma}(\delta, h))$.

Теорема 2.2.3. *Пусть класс операторов* $\mathcal{A}$ *определен формулой* (3), *а* $\overline{T}_{\delta h} = T_{\overline{\alpha}(\delta,h)}^h$ *определен формулами* (6) *и* (7) *при* $0 < \delta \le \delta_0$ *и* $0 < h \le h_0$.

Тогда метод $\{\overline{T}_{\delta h} : \ 0 < \delta \le \delta_0, 0 < h \le h_0\}$ ***оптимален на классе*** $M_r^h \times \mathcal{A}$ ***и для*** *него справедлива оценка* $\Delta_{\delta h}[\overline{T}_{\delta h}] = rG_h(\overline{\sigma}(\delta, h))$, *где* $\overline{\sigma}(\delta, h)$ ***определено уравнением*** (4).

Пусть A – точное значение оператора в уравнении (1) и $Sp(A) = [0, \|A\|]$, а

$$B = G(A), \tag{8}$$

где $G(\sigma) \in C[0, \|A\|] \cap C^1(0, \|A\|)$, для любого $\sigma \in (0, \|A\|)$ $G'(\sigma) > 0$, а $G(0) = 0$ и $G(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает.

Тогда, если для любого $h > 0$ $\ A_h \in \mathbb{B}_1[\mathbb{H}]$, $\ Sp(A_h) = [0, \|A_h\|]$

$$\|A_h - A\| \le h, \tag{9}$$

$$A = \Psi_h(A_h), \tag{10}$$

где $\Psi_h(\sigma) \in C[0, \|A_h\|] \cap C^1(0, \|A_h\|)$, для любого $\sigma \in (0, \|A_h\|]$ $\Psi_h'(\sigma) > 0$, а $\Psi_h(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает, то для любых $h \in (0, h_0]$ и $\sigma \in [0, \|A_h\|)$

$$G_h(\sigma) = G[\Psi_h(\sigma)]. \tag{11}$$

Кроме того, для любого $h \in (0, h_0]$

$$B = G_h(A_h). \tag{12}$$

Теорема 2.2.4. *Пусть оператор* B *не зависит от* h *и определен* ***формулами*** (12), $G_h(\sigma)$ – *формулой* (11), *а* $\Psi_h(\sigma)$ – *формулой* (10).

Тогда для любого $u_0 \in M_r^h = B\overline{S}_r$ *имеет место сходимость*

$$u_{\delta h}^{\overline{\alpha}(\delta,h)} = T_{\overline{\alpha}(\delta,h)}^h f_\delta \to u_0 \quad \text{при} \ \ \delta \ \text{и} \ h \to 0.$$

В главе 3 рассмотрен метод проекционной регуляризации приближенного решения линейных операторных уравнений [3]. В данной главе рассмотрена задача (1), где $u, f \in \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ – гильбертортово пространство. В качестве регуляризующего семейства операторов рассмотрим семейство

$$P_\alpha f = \int_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma f, \quad \alpha \in (0, \|A\|], \tag{13}$$

где $\{E_\sigma \ : \ 0 \le \sigma \le \|A\|\}$ – спектральное разложение единицы E, порожденное оператором A.

Приближенное решение уравнения (1) определяется формулой

$$u_\delta^\alpha = P_\alpha f_\delta. \tag{14}$$

В параграфе 3.1 рассмотрен метод проекционной регуляризации с выбором параметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ по схеме Лаврентьева, а именно из уравнения $r\, G(\alpha)\alpha = \delta$, которое при $\delta < rG(\|A\|)\|A\|$ имеет единственное решение $\overline{\alpha}(\delta)$. Тогда метод проекционной регуляризации оптимален по порядку с константой $\sqrt{2}$ и для него справедлива точная оценка погрешности

$$\Delta_\delta[P_{\overline{\alpha}(\delta)}] = \sqrt{2}\ r\ G(\overline{\alpha}(\delta)).$$

В параграфе 3.2 параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ выбран по схеме В.Н. Страхова, то есть из условия

$$\min_\alpha \left[\Delta_1^2(\alpha) + \Delta_2^2(\alpha, \delta)\right], \tag{15}$$

где

$$\Delta_1(\alpha) = \sup_{u_0}\{\|u_0^\alpha - u_0\| : u_0 \in M_r\} = r\ G(\alpha),$$

$$\Delta_2(\alpha, \delta) = \sup_{u_0, f_\delta}\{\|u_\delta^\alpha - u_0^\alpha\| : u_0 \in M_r, \|Au_0 - f_\delta\| \le \delta\} = \frac{\delta}{\alpha}; \quad 0 < \alpha \le \|A\|.$$

Тогда условие (15) будет иметь вид

$$\min_{\alpha \in (0, \|A\|]} \left[r^2 G^2(\alpha) + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right]. \tag{16}$$

В этом параграфе была доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Если $G(\sigma) = \sigma^p$ $(p > 0)$, то метод* ***проекционной регуляризации*** *с параметром*

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{\delta}{r\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{p+1}},$$

[3]Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения// М.: Наука, 1978. 208 с.

выбранным из условия (16), *является оптимальным по порядку. Причем, точная константа имеет вид*

$$K = K(p) = \left[p^{\frac{-p}{p+1}} + p^{\frac{1}{p+1}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Оценка метода является точной и определяется формулой

$$\Delta(\alpha(\delta), \delta) = r\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{p}{p+1}} K(p).$$

Пусть $p = 1$, тогда $K(1) = \sqrt{2}$, то есть оценка погрешности метода проекционной регуляризации с выбором параметра по схеме В.Н. Страхова будет иметь вид $\Delta(\delta) = \sqrt{2}\omega(r, \delta)$. Таким образом, при $p = 1$ оценка погрешности метода проекционной регуляризации с параметром, выбранным по схеме В.Н. Страхова, совпадает с погрешностью этого метода для параметра регуляризации, выбранного по схеме М.М. Лаврентьева.

Исследование асимптотического поведения константы $K(p)$ как функции от p, показало, что $K(p) \in (1, \sqrt{2}]$ и для любого $p > 0$ $K(p) > 1$,

$$K(p) \to 1 \text{ при } p \to 0+,$$
$$K(p) \to 1 \text{ при } p \to +\infty.$$

Кроме того, на интервале $(0, 1)$ функция $K(p)$ строго возрастает, а на полупрямой $(1, \infty)$ она строго убывает, а точка $p = 1$ является точкой максимума, в которой $K(p) = \sqrt{2}$.

В параграфе 3.3 приведено обоснование метода проекционной регуляризации [4] с параметром регуляризации, выбранным из принципа невязки, названным в дальнейшем нелинейным методом проекционной регуляризации.

Особенностью этого метода является то, что для получения приближенного решения он использует в качестве исходной информации лишь f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$, кроме того параметр регуляризации в нем $\alpha = \alpha(f_\delta, \delta)$ зависит не только от δ, но и от f_δ.

Для построения метода рассмотрим регуляризующее семейство операторов (13). Для выбора параметра регуляризации $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(f_\delta, \delta)$ в формуле (14) используем уравнение $\|Au_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 = 9\delta^2$, которое имеет решение при условии, что $\|f_\delta\| > 3\delta$.

В дальнейшем приближенное решение u_δ уравнения (1) определим формулой

$$u_\delta = \hat{T}_\delta f_\delta = \begin{cases} P_{\hat{\alpha}(f_\delta,\delta)} f_\delta; & \text{при} \quad \|f_\delta\| > 3\delta, \\ 0 \quad : & \text{при} \quad \|f_\delta\| \le 3\delta, \end{cases} \tag{17}$$

где P_α определен формулой (13).

[4] Морозов В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6. № 1. С. 170–175.

В этом параграфе доказаны следующие утверждения

Лемма 3.3.3. *Оператор $\hat{T}_\delta$, определяемый формулой* (17), *непрерывен на пространстве* $\mathbb{H}$.

Теорема 3.3.2. *Метод* $\{\hat{T}_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$, *определяемый формулой* (17) *оптимален по порядку на классе* M_r *и* $\quad \Delta_\delta[\hat{T}_\delta] \le 6\ \Delta_\delta^{opt}$.

Глава 4 посвящена получению оценок условной устойчивости для некоторых задач математической физики.

В параграфе 4.1 рассмотрена обратная задача Коши для уравнения теплопроводности. Выбор параметра регуляризации осуществлялся по схемам М.М. Лаврентьева и В. Н. Страхова. Проведено сравнение этих результатов.

В параграфе 4.3 нелинейным методом проекционной регуляризации решена задачи Коши для уравнения Лапласа в полосе $-\infty < x < \infty$, $y \in [0, y_0]$, $y_0 > 0$.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \tag{18}$$

при условиях

$$u(x,0) = f(x), \tag{19}$$

$$u_y(x,0) = 0. \tag{20}$$

Требуется найти функцию

$$u(x, y_0) = u_0(x), \tag{21}$$

если $u_0(x)$ – кусочно-гладкая, а ее производная $u_0'(x)$ – четная и имеет конечное число точек разрыва первого рода.

При выполнении известных условий задача (18), (20), (21) имеет единственное классическое решение, определяемое с помощью преобразования Фурье.

Для решения задачи (18)-(20) воспользуемся пространствами $W_2^p(-\infty,\infty)$, $p > 0$, преобразованием Фурье по переменной x

$$F[u(x,y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-i\lambda x} dx = \hat{u}(\lambda, y),$$

и методом проекционной регуляризации с параметром регуляризации, выбранным из принципа невязки.

В результате, окончательная оценка будет иметь вид

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \le 12\ \ e^{3a}\ y_0^{3/2} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}}\ \ln^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\delta}\right), \delta > 0.$$

В параграфе 4.4 рассмотрена задача восстановления фононных спектров по термодинамическим функциям кристалла. Для решения данной задачи был использован нелинейный метод проекционной регуляризации, поскольку спектральное представление решения позволяет минимально искажать физическую структуру последнего.

Задача восстановления фононных спектров сводится к решению уравнения типа свертки

$$Au = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau - t)u(t)dt = f(\tau), \tag{22}$$

где $f(\tau) = e^{-\tau}C(e^{\tau})$, $C(\theta)$ – теплоемкость системы, $u(t) = n(e^t), n(\varepsilon) \in L_2[0, \infty)$ – спектральная плотность, а

$$k(x) = \frac{e^{-3x}}{4\,\mathrm{sh}^2(\frac{e^{-x}}{2})}.$$

Полагая, что $f(\tau)$, $u(t)$ из $L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$, а $\|f_\delta(\tau) - f_0(\tau)\|_{L_2} \leq \delta$. Кроме того предположим, что $u_0(t)$ – четная, а $u_0'(t)$ имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода, отличных от нуля.

Требуется определить приближенное решение $u_\delta(t)$ и оценить его уклонение от точного в метрике L_2.

Применяя к уравнению (22) преобразование Фурье F

$$F[f(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{ip\tau}d\tau = \hat{f}(p),$$

получим операторное уравнение

$$\hat{A}\hat{u}(p) = K(p)\hat{u}(p) = \hat{f}(p), \tag{23}$$

где $K(p)$, $\hat{u}(p)$, $\hat{f}(p)$ – Фурье-образы функций $k(x)$, $u(t)$, $f(\tau)$.

Из теоремы Планшереля следует изометричность преобразования Фурье F в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ и $\|u_\delta(t) - u_0(t)\|_{L_2} \leq \|\hat{u}_\delta(p) - \hat{u}_0(p)\|_{L_2}$. Приближенное решение уравнения (22) $u_\delta(t) = Re[F^{-1}[\hat{u}_\delta(p)]]$, где F^{-1} – обратное преобразование Фурье.

В качестве регуляризующего семейства операторов рассмотрим

$$P_\alpha \hat{f}(p) = \begin{cases} K^{-1}(p)\hat{f}(p)\ ; & |p| \leq \alpha, \\ 0\ ; & |p| > \alpha. \end{cases}$$

Тогда приближенное решение $\hat{u}_\delta^\alpha(p)$ уравнения (23) определим формулой

$$\hat{u}_\delta^\alpha(p) = P_\alpha \hat{f}_\delta(p),$$

где параметр регуляризации $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{f}_\delta, \delta)$ определим из уравнения

$$\|\hat{A}\hat{u}_\delta^\alpha(p) - \hat{f}_\delta(p)\| = 3\delta.$$

которое разрешимо при условии $\|\hat{f}_\delta\| > 3\delta$. В работе доказано существование числа $d > 0$, для которого справедлива следующая оценка

$$\|\hat{u}_\delta(p) - \hat{u}_0(p)\| \leq 6\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}\; G_\varepsilon(\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon)), \tag{24}$$

где функция $G_\varepsilon(\sigma)$ определена параметрически

$$G_\varepsilon(\sigma) = [1 + |p|^{3(1-\varepsilon)}]^{-1/2}, \qquad \sigma = e^{-p}, \qquad |p| \geq p_1,$$

а $\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon)$ определено уравнением

$$\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}\; G_\varepsilon(\alpha)\alpha = \delta.$$

Так как оценка (24) выполняется при любом $\varepsilon \in (0, 1/2]$, то выберем значение $\varepsilon(\delta)$, минимизирующее эту оценку

$$6\sqrt{\frac{d}{\varepsilon(\delta)}}\; G_{\varepsilon(\delta)}(\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon(\delta))) = \min_{\varepsilon\in(0,1/2]} 6\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}}\; G_\varepsilon(\overline{\alpha}(\delta, \varepsilon)).$$

Таким образом, окончательная оценка при достаточно малых значениях δ будет иметь вид

$$\|\hat{u}_\delta(p) - \hat{u}_0(p)\| \leq 24\; e^{3d}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\delta}}\;\; \ln^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

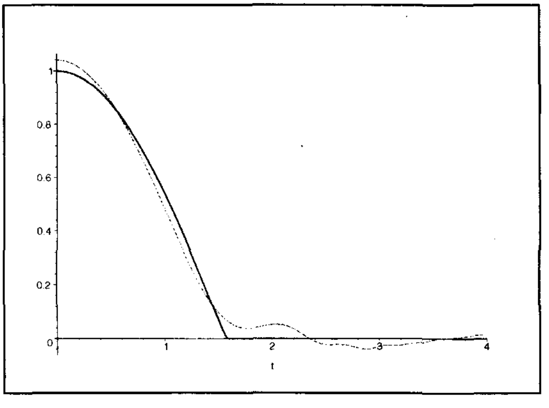
где

$$\varepsilon(\delta) = \frac{2d}{\ln\ln\frac{1}{\delta}}.$$

Вычисления данной задачи производились в системе Maple 10.

На следующем рисунке приведены расчеты для одного из тестовых примеров с начальной погрешностью $\delta = 5\%$.

Сплошной линией изображено точное решение, а пунктирной линией изображено полученное приближенное решение.



Основные результаты диссертационной работы

На защиту выносятся следующие новые научные результаты

1. Исследован на устойчивость метод проекционной регуляризации с параметром, выбранным из принципа невязки, и для него получены точные по порядку оценки погрешности в предположении о принадлежности точного решения некоторому классу корректности.

2. Получены точные оценки погрешности метода проекционной регуляризации, и оценка погрешности приближенного решения обратной задачи физики твердого тела нелинейным методом проекционной регуляризации при условии кусочной гладкости искомого решения.

3. Исследован на оптимальность метод М.М. Лаврентьева для уравнений с приближенно заданным оператором, и получена точная оценка погрешности данного метода.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в научных журналах из списка ВАК

1. Бредихина А.Б. Исследование оптимальности метода проекционной регуляризации // Системы управления и информационные технологии. 2010. № 3(41). С. 70–72.

2. Бредихина А.Б. Нелинейный метод проекционной регуляризации // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011. Вып. 10. № 37(254). С. 4–11.

3. Бредихина А.Б. Об оптимальности метода М.М. Лаврентьева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Физика. Механика. 2011. Вып. 5. № 32(249). С. 18–22.

4. Танана В.П., Бредихина А.Б., Камалтдинова Т.С. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1. С. 281–288.

5. Танана В.П., Бредихина А.Б. Об оптимальности одного обобщения метода М.М. Лаврентьева при решении уравнений с ошибкой в операторе // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. 2013. Т. 19. №1. С. 258–263.

Другие публикации

6. Бредихина А.Б. О наилучшем выборе параметра в методе проекционной регуляризации // Известия ЧНЦ УрО РАН. 2009. Вып. 2(44). URL: http://csc.ac.ru/ej/issue/ru.

7. Бредихина А.Б. О наилучшем выборе параметра в методе проекционной регуляризации// Тез.Межд.школы-конф."Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". Новосибирск. 2009. С. 27.

8. Бредихина А.Б. О наилучшем выборе параметра в методе проекционной регуляризации // Тез. восьмой молодежной научной школы-конф. "Лобачевские чтения–2009". Казань. 2009. Т.39. С. 142.

9-56

Вчебюлист

9. Бредихина А.Б. О точной оценке погрешности метода проекционной регуляризации при наилучшем выборе параметра // Информационный бюллютень № 12 XIV Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения". Екатеринбург. 2011. С. 233.

10. Бредихина А.Б., Танана В.П. Метод М.М. Лаврентьева решения уравнений с ошибкой в операторе//Тез.докл.Междунар.конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых задач посвящ.памяти В.К.Иванова. Екатеринбург. 2011. С.175.

11. Бредихина А.Б., Танана В.П. О решении одной обратной задачи физики твердого тела//Тез.докл.Междунар.конф."Обратные и некорректные задачи математической физики", посвящ. 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева. Новосибирск. 2012. С. 127.

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 02.04.2013. Формат 60x84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 0,70. Тираж 100 экз. Заказ 72/274.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76