УДК 539.3

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛИНОМАХ

В.Ф. Сбитнев

Решается плоская задача теории упругости в полиномах; рассматривается полоса, нагруженная распределенной треугольной нагрузкой.

Ключевые слова: полином, бигармоническое уравнение, функция напряжений, нормальные и касательные напряжения, нагрузка, производная.

В целях более глубокого освоения уравнений механики твердого деформируемого тела применим их к решению поставленной задачи, имеющей как научное, так и методическое назначение.

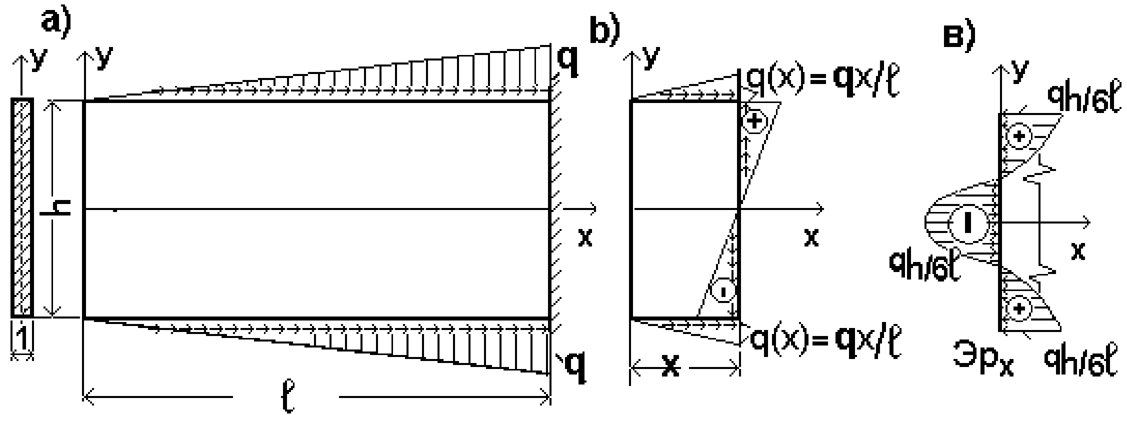
В учебной литературе [1, 2] решение плоской задачи теории упругости в полиномах в основном рассматривается как обратная задача.

При решении этой задачи функцией напряжений $\boldsymbol{\varphi}$ задаются и выясняют, какому случаю напряженного состояния она соответствует. Мы попытаемся решить прямую задачу, т.е. отыскать такую функцию.

Решается следующая задача: на балку-полосу прямоугольного сечения шириной равной единице, длиной $\boldsymbol{l}$ и высотой h, у которой правый конец защемлен, а левый свободный, действует по верхней и нижней поверхностям касательная нагрузка, изменяющаяся по закону треугольника, как показано на рис. Полосу будем считать невесомой.

В курсе сопротивления материалов − это задача центрального сжатия. При ее решении предполагается, что в поперечном сечении полосы возникают только нормальные напряжения $\sigma_x(x) = -\,qx^2/h\boldsymbol{l}$, равномерно распределенные по высоте сечения. Касательных напряжений в поперечном сечении отсутствуют, продольные волокна друг на друга не давят.

Задачу решаем в системе координат, показанной на рис.



Расчётная схема полосы и её нагружение

Сразу заметим, что предлагаемое решение не удовлетворяет уравнениям теории упругости. Взяв производную $\partial\sigma/\partial x = (-2x/h\boldsymbol{l})$ и подставив ее в уравнения равновесия, приходим к выводу, что первое уравнение не удовлетворяется, а второе тождественно равно нулю.

Условия равновесия на контуре заставляют нас искать такое решение, при котором верхняя и нижняя поверхности консоли не несут вертикальной нагрузок, а левый торец ни горизонтальной, ни вертикальной нагрузки. Следовательно, для них $p_Y = 0$ (при $y = \pm h/2$); $p_Y = 0$, $p_X = 0$ (при $x = 0$). Касательная нагрузка в произвольном сечении будет равна $q(x) = q{\cdot}x/h\boldsymbol{l}$.

1. На свободном конце нет касательной и нормальной нагрузок. Тогда в выражениях при вычислении касательных и нормальных напряжений координата x может находиться в любой степени. Т. к. $\tau_{XY} = -\partial^2\varphi/\partial x\partial y$**,** то искомая функция напряжений должна иметь координату x минимум в квадрате. Пусть степень этой координаты равна m (m = 2, 4, 6, …).

В произвольном сечении согласно закону о парности касательных напряжений касательные напряжения вверху (при $y = h/2$) должны принимать значение $\tau_{XY} = qx/\boldsymbol{l}$, а внизу (при $y = -h/2$) $\tau_{XY} = -qx/\boldsymbol{l}$; т.е. касательные напряжения τ_{XY} знакопеременные (эпюра τ_{XY} показана на рис. b). Поэтому в выражении для τ_{XY} координата y должна быть в нечетной степени, а в искомой функции напряжений в четной. Пусть степень этой координаты будет n (n = 2, 4, 6,…).

Эпюра нормальных напряжений $\sigma_x(x,y)$ симметричная, так как сама задача симметричная; поэтому в выражении при вычислении нормальных напряжений координата y должна быть в четной степени. Функция напряжений, связанная с напряжением σ_x зависимостью $\sigma_x(x,y) = \partial^2\varphi/\partial y^2$, тоже будет иметь координату y в четной степени.

2. Итак, напрашивается такой полином: $\varphi(x,y) = Cx^m y^n$. По этой зависимости в точках балки-полосы возникают нормальные напряжения σ_x, σ_y и касательные τ_{XY}. Предлагаемая функция удовлетворяет уравнениям равновесия теории упругости. Убедимся в этом, имея выражения напряжений.

$$\sigma_x = Cn(n-1)x^m y^{n-2},\ \sigma_y = Cm(m-1)x^{m-2}y^n,\ \tau_{XY} = -Cmnx^{m-1}y^{n-1} \tag{1}$$

Теперь необходимые производные имеют такой вид:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = Cmn(n-1)x^{m-1}y^{n-2}, \qquad \frac{\partial\tau_{XY}}{\partial y} = -Cmn(n-1)x^{m-1}y^{n-2},$$

$$\frac{\partial\tau_{XY}}{\partial x} = -Cn(m-1)x^{m-2}y^{n-1} \qquad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = Cm(m-1)nx^{m-2}y^{n-1}$$

Подставляя получившиеся производные в первое уравнение равновесия, получаем:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{XY}}{\partial y} = Cmn(n-1)x^{m-1}y^{n-2} - Cmn(n-1)x^{m-1}y^{n-2} \equiv 0.$$

Уравнение удовлетворяется тождественно при любых m и n.

Подставляя производные во второе уравнение равновесия, имеем

$$\frac{\partial\tau_{XY}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = -Cmn(m-1)x^{m-2}y^{n-1} + Cm(m-1)nx^{m-2}y^{n-1} \equiv 0.$$

Это уравнение тоже удовлетворяется тождественно.

Принимаем m = 2 и n = 2. Тогда функция напряжений будет иметь вид:

$$\varphi(x,y) = Cx^2y^2. \tag{2}$$

3. Эта функция не удовлетворяет бигармоническому уравнению. Чтобы бигармоническое уравнение удовлетворялось, необходимо в функцию напряжений добавить еще дополнительное решение. В качестве такового примем полином $\varphi(x,y) = -Cy^4/3$.

Предлагаемая функция теперь будет иметь вид:

$$\varphi(x,y) = Cx^2y^2 - Cy^4/3. \tag{3}$$

Данный полином удовлетворяет бигармоническому уравнению.

Получим нужные производные:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = 0; \qquad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} = 4C; \qquad \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = -8C. \tag{4}$$

Теперь имеем:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 2\cdot 4C - 8C \equiv 0. \qquad (5)$$

4. Полином (3) не удовлетворяет условию задачи; на левом торце балки, появляются горизонтальные силы, которые не дают момента (из-за симметрии). Для уничтожения этих сил необходимо приложить на этом торце силы противоположного направления. Тогда торец балки будет свободен от всяких усилий. Следовательно, к полученному решению необходимо добавить еще одно – дополнительное решение.

В качестве такого введем полином, чтобы напряжения σ_y и τ_{XY} при этой добавке не изменялись, а напряжения σ_x остались бы симметричными. Это слагаемое можно представить в таком виде $\varphi_3 = By^2$, так как другие полиномы не удовлетворяет бигармоническому уравнению.

5. Таким образом, получаем:

$$\varphi = 2Cx^2 + 2B - 4Cy^2. \qquad (6)$$

Так как при x = 0 в каждой точке торцевого сечения (y произвольное) выражение (5) для σ_x не может обеспечить равенства $p_x = 0$, то воспользуемся приемом смягчения граничного условия, т.е. потребуем, чтобы продольльная сила на торце равнялась нулю.

Параметр B выразим через C из условия равенства площадей нагрузок, направленных в разные стороны. Имеем:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (2B - 4Cy^2)dy = 0 \qquad (7)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}(2B - 4Cy^2)dy = [2By - 4Cy^3/3]_{-h/2}^{h/2} = 2B(h/2 + h/2) - 4C/3\cdot(h^3/8 + h^3/8) = 0.$$

Тогда:

$$B = Ch^2/6. \qquad (8)$$

Площадь полученной эпюры p_X равна нулю, что не противоречит статическому условию $N_X = 0$.

6. Теперь найдем параметр C. Заметим: а) с одной стороны, в сечении с координатой x из формулы (2) при y = h/2 касательные напряжения равны $\tau_{XY} = -4Cxh/2 = -2Cxh$; б) с другой стороны, (по закону парности касательных напряжений) $\tau_{XY} = qx/\boldsymbol{l}$. Приравнивая эти напряжения, получаем:

$$-2Cxh = qx/\boldsymbol{l}. \qquad (9)$$

$$C = -q/2h\boldsymbol{l}. \qquad (10)$$

Следовательно, функция напряжений теперь будет иметь такой вид:

$$\varphi(x,y) = -\,q\,x^2y^2/2hl - qy^2h^2/12l + qy^4/6hl. \qquad (11)$$

Поэтому окончательные напряжения:

$$\sigma_x = -\,qx^2/h\boldsymbol{l} - qh/6\boldsymbol{l} + 4qy^2/3h\boldsymbol{l}\,,\ \sigma_y = -\,qy^2/h\boldsymbol{l},\quad \tau_{XY} = -\,2qxy/h\boldsymbol{l}. \qquad (12)$$

Эпюра нагрузки p_X на левом торце балки показана на рис. 1в.

Эпюра касательного напряжения в произвольном сечении на рис.1, b.

7. В сечении с координатой x, спроецировав все силы на горизонтальную ось, получаем зависимость, известную в сопротивлении материалов:

$$N_X = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x dy = -\,1/2\cdot 2\cdot qx/\boldsymbol{l}\cdot x = -\,qx^2/\boldsymbol{l}. \qquad (13)$$

Отсюда следует, что в произвольном сечении на достаточном удалении от торца напряжения σ_x от координаты y не зависят, они по высоте постоянные. Тогда:

$$N_X = \sigma_x\cdot h = -\,qx^2/\boldsymbol{l}. \qquad (14)$$

Откуда следует

$$\sigma_x = -\,qx^2/h\boldsymbol{l}. \qquad (15)$$

Такому решению соответствует задача из курса сопротивления материалов. Как видим, оно не соответствует действительности.

8. Из формулы (12) следует: вертикальные напряжения при **y** = h/2 $\sigma_y = -\,qh/4\boldsymbol{l}$, что противоречит условию задачи. Чтобы его исключить, введем в формулу слагаемое, которое бы уничтожало эти напряжения.

В качестве такового примем решение, которое соответствует растяжению в вертикальном направлении. Оно выглядит следующим образом:

$$\sigma_y = qh^2/4h\boldsymbol{l}. \qquad (16)$$

Подставив это выражение в формулу напряжений σ_y, после элементарных преобразований, получаем окончательно:

$$\sigma_y = q/h\boldsymbol{l}\,(h^2/4 - y^2). \qquad (17)$$

Это означает, что волокна полосы испытывают растяжение в вертикальном направлении, которые, например, в сечении y = 0 равны $\sigma_y = qh/4\boldsymbol{l}$.

Проведем некоторые исследования. Во-первых, опасное сечение находится в сечении, расположенном около заделки. Во-вторых, полученные зависимости (12) и (17) указывают на, что напряжения существенно зависят от размеров полосы h, $\boldsymbol{l}$ и их отношения. В-третьих, очевидно, что наиболее опасными будут точки с координатами $x = \boldsymbol{l}$, $y = \pm\, h/2$ и $y = 0$.

Какая из этих точек будет опасной, ответить сразу нельзя. Нужно провести исследования.

Пусть $\boldsymbol{l} = 5h$. Тогда в точках при $y = \pm h/2$:

$$\sigma_X = -q\boldsymbol{l}/h - qh/6\boldsymbol{l} + 4\cdot qh^2/4\cdot 3h\boldsymbol{l} = -5q + q/30 = -149q/30.\ \tau_{XY} = q,\ \sigma_Y = 0.$$

Эквивалентные напряжения по 3-й теории прочности:

$\sigma_{ЭКВ} = \sqrt{(149/30)^2 + 4\cdot 1^2}\,q = 5{,}354q$; это на 7,08 % больше, чем напряжения, вычисляемые по формулам сопротивления материалов.

В точках при $y = 0$:

$$\sigma_X = -q\boldsymbol{l}/h - qh/6\boldsymbol{l} = -5q - q/30 = -151q/30.\ \tau_{XY} = 0,\ \sigma_Y = qh/4\cdot 5h = q/20.$$

Тогда $\sigma_{ЭКВ} = q/20 - (-151/30)\,q = 5{,}083q$.

Т.е. первая точка опасней.

Если $\boldsymbol{l} = h$, то в точках при $y = \pm h/2$:

$$\sigma_X = -q\boldsymbol{l}/h - qh/6\boldsymbol{l} + 4\cdot qh^2/4\cdot 3h\boldsymbol{l} = -q + q/6 = -5q/6.\ \tau_{XY} = q,\ \sigma_Y = 0.$$

$\sigma_{ЭКВ} = \sqrt{(5/6)^2 + 4\cdot 1^2}\,q = 2{,}167q$; это расхождение более, чем в 2 раза.

В точках при $y = 0$:

$$\sigma_X = -q\boldsymbol{l}/h - qh/6\boldsymbol{l} = -q - q/6 = -7q/6.\ \tau_{XY} = 0,\ \sigma_Y = qh/4\cdot h = q/4.$$

Тогда $\sigma_{ЭКВ} = q/4 - (-7/6)\,q = 1{,}417q$; тоже больше (около 42 %).

Снова первая точка опаснее.

Итак, приведенное исследование показало, что в опасном сечении опасной будет точка с координатой $y = \pm h/2$.

Библиографический список

1. Жемочкин, Б.Н. Теория упругости: учебное пособие для строительных вузов и факультетов / Б.Н. Жемочкин. – М.: Госстройиздат, 1957. – 256 с.

2. Киселев, В.А. Плоская задача теории упругости: учебное пособие для вузов / В.А. Киселев. – М.: Высшая школа, 1976. – 152 с.

К содержанию