

КОЛЕБАНИЯ И «ПСЕВДО» РАВНОВЕСИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРОСАМИ

Ю.Г. Прядко, В.Г. Караваяев

В статье анализируются динамические свойства механических систем с телами, висющими на нитях. В некоторых пространствах трос имеет либо постоянный угол отклонения от вертикали, либо колеблется около этого положения. Показан способ простого определения таких положений без решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: динамика тела; тросовые системы; маятник Максвелла; равновесие.

В ряде задач динамики при наличии в системе тел, висящих на нерастяжимых и невесомых нитях (тросах), необходим учет дополнительных степеней свободы, связанных с возможным отклонением нити от вертикали и наличием неустойчивых связей. Часто в этих случаях считается, что при достаточной длине нить вертикальна [1]. Анализ динамики таких систем показывает, что тела, висящие на нитях, могут в некоторых про-

странства либо всегда находиться в положении, где нить имеет постоянный угол отклонения от вертикали, либо колебаться около этого положения. Такое поведение системы назовем «псевдо» равновесным, так как оно реализуется только для одной из обобщенных координат. Показаны способы простого определения этих положений разных систем без решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Многолетний опыт подготовки студентов к участию в олимпиадах по теоретической, прикладной механике [2] убедил, что при построении моделей, или постановке физических задач зачастую проводится неточный анализ, связанный с игнорированием некоторых возможных качественных состояний объекта. Эти качественные свойства не всегда очевидны, так как возникают только в определенных областях параметров системы. Кроме того, в ряде случаев не учитывается влияние начальных условий на последующее поведение системы.

В данной работе анализируется динамика систем с двумя, тремя степенями свободы при наличии тел, висящих на нитях (тросах). На наш взгляд, не все свойства таких систем изучены и систематизированы.

Простейшими моделями систем такого рода могут быть известный всем маятник Максвелла (рис. 1), или 2 точки, связанные нитью, одна из которых может двигаться по гладкой поверхности (рис. 2 и 3) (эллиптический маятник).

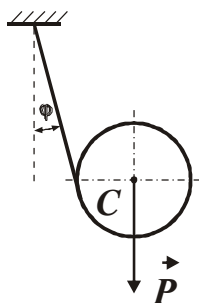


Рис. 1. Маятник Максвелла

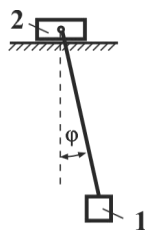


Рис. 2. Эллиптический маятник

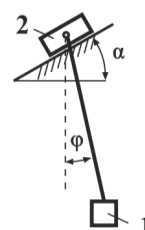


Рис. 3. Эллиптический маятник

Такого рода системы называют тросовыми. Одним из главных элементов всех тросовых систем чаще всего является, как бы, математический маятник (тяжелая материальная точка на нити или стержне, движущаяся в вертикальной плоскости). Правда, в математическом маятнике точка крепления нити (подвеса) неподвижна, а в тросовых системах – движется.

При описании динамики этих систем можно пользоваться известными методами общей или аналитической механики, применяемыми в теории колебаний [3, 4, 5]. Это требует от исследователя выполнять все преобразования, связанные с составлением и решением дифференциальных уравнений.

Такой анализ, обладая полнотой, часто не позволяет простым путем получить точные качественные и количественные характеристики системы, которые для понимания поведения могут быть определяющими. К этим характеристикам относятся, прежде всего, возможные положения равновесия, устойчивость положений равновесия, собственные частоты.

Предварительный анализ одной из простейших систем, проведенный в работе [1], показал возможность существования «псевдо» равновесного положения системы, которое определяется без решения систем дифференциальных уравнений, чаще всего оказывающимися нелинейными.

Продемонстрируем некоторые свойства ряда достаточно распространенных систем с маятниками.

Прежде всего, опишем представленные выше системы известными методами и выделим качественные свойства, объединяющие анализируемые системы.

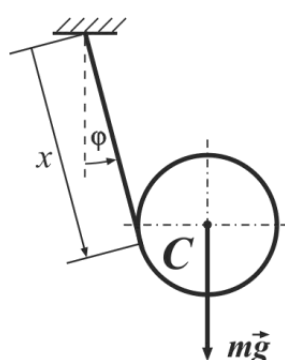


Рис. 4. Маятник Максвелла с двумя степенями свободы

Пример 1. «Маятник Максвелла» с двумя степенями свободы

Проанализируем динамику маятника, представленного на рис. 4. При $\varphi = 0$, этот маятник является маятником Максвелла. Считаем известными массу и радиус маятника (однородного цилиндра). За обобщенные координаты принимаем угол поворота нити φ и длину нити x .

Начальные значения координат и их первых производных известны. Выражение для кинетической энергии маятника будет следующим:

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{3}{2} \dot{x}^2 + \frac{3}{2} \dot{\varphi}^2 R^2 - 3\dot{x}\dot{\varphi}R + x^2 \dot{\varphi}^2 \right).$$

Обобщенные силы: $Q_x = mg \cos(\varphi)$; $Q_\varphi = -mg(x \sin(\varphi) + R \cos(\varphi))$.

Дифференциальные уравнения движения маятника в виде уравнений Лагранжа II рода можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{\varphi} &= b_1; \\ a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{\varphi} &= b_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_{11} = \frac{3}{2}m$; $a_{12} = a_{21} = -\frac{3}{2}mR$; $a_{22} = m \left(x^2 + \frac{3}{2}R^2 \right)$;

$$b_1 = m(g \cos(\varphi) + x\dot{\varphi}^2); \quad b_2 = -m(gx \sin(\varphi) + R \cos(\varphi) - 2x\dot{x}\dot{\varphi}).$$

Уравнения интегрируются, например, в пакете MathCAD численным методом с использованием функции **Odesolve**, для чего система (1) разрешается относительно старших производных.

Представим результаты решения на рисунках 5 – 8:

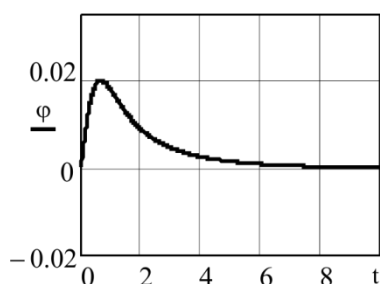


Рис. 5. Зависимость координаты φ от времени

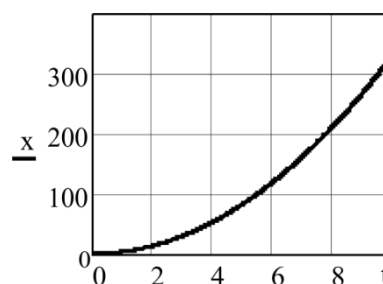


Рис. 6. Зависимость координаты x от времени

Такая задача была предъявлена студентам на компьютерном конкурсе Всероссийской олимпиады. В этом конкурсе студент ЮУрГУ занял III место.

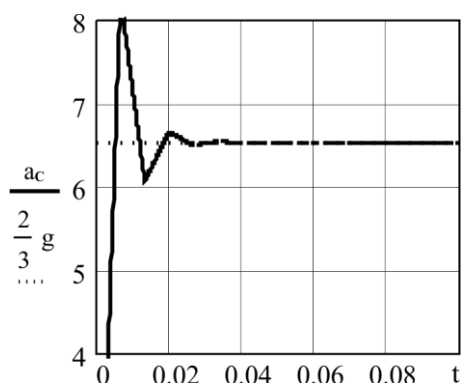


Рис. 7. Зависимость ускорения от времени

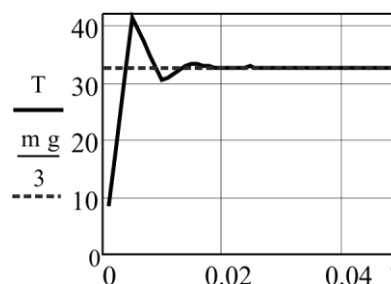


Рис. 8. Зависимость натяжения нити от времени

Как видно из рисунков 5–8, за короткое время длина нити становится достаточно большой, угол отклонения нити от вертикали – малым, а натяжение троса – близким значению для вертикальной нити.

Так, в примере 1 уже через несколько секунд с начала движения нить почти перестала отклоняться от вертикального положения, длина нити достигла нескольких сотен метров, натяжение троса и ускорение центра масс установились на известных для маятника Максвелла значениях: $mg/3$ и $2/3g$.

Такого рода результаты приводят к мысли, что при больших длинах – нить всегда вертикальна, а натяжение нити близко к натяжению нити маятника Максвелла.

Пример 2. Простой эллиптический маятник

Определить закон колебаний эллиптического маятника, состоящего из груза 1 (материальной точки) массы m_1 , невесомого стержня длиной ℓ и ползуна 2 массы m_2 ,двигающегося по горизонтальной прямой (рис. 9.)

К ползуну приложена сила $\bar{Q} = \bar{i} H \sin pt$, где $H, p - const$, t – время, на стержень действует изменяющаяся по линейному закону диссипативная пара сила $\tilde{M} = -\mu \dot{\varphi}$ с коэффициентом $\mu = const > 0$. Пусть, в начальный момент времени $t_0 = 0$ $\varphi = \varphi_0$ $\dot{\varphi} = 0$. Трением пренебрегаем.

Решение

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из материальной точки, ползуна и нити в пространстве Oxy основания (рис. 10). Положение системы, имеющей две степени свободы, будем определять обобщенными координатами: $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$ – углом отклонения нити от вертикали.

Составим уравнения Лагранжа второго рода.

Выражение для кинетической энергии системы:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 - m_1 \ell \cos \varphi \cdot \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{m_1 \ell^2 \dot{\varphi}^2}{2}. \quad (2)$$

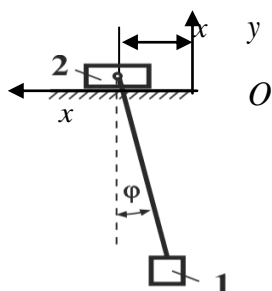


Рис. 9. Эллиптический маятник с ползунком,двигающимся по горизонтальной прямой

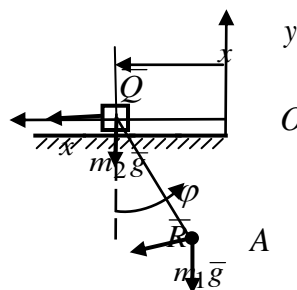


Рис. 10. Движение механической системы

Потенциальную энергию системы определим, принимая, что при $\varphi_0 = 0$ она равна нулю:

$$\Pi = m_1 g \ell (1 - \cos \varphi). \quad (3)$$

Диссипативная функция Релея запишется:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \dot{\varphi}^2. \quad (4)$$

Опуская преобразования, получим нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, описывающие движение простого эллиптического маятника в виде (1),

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 + m_2; a_{12} = a_{21} = -m_1 \ell \cos \varphi; a_{22} = m_1 \ell^2; \\ b_1 &= H \sin pt - m_1 \ell \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2; b_2 = -m_1 g \ell \sin \varphi - \mu \dot{\varphi} - m_1 \ell \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученные результаты сравнивались с известными аналитическими решениями, найденными после линеаризации дифференциальных уравнений.

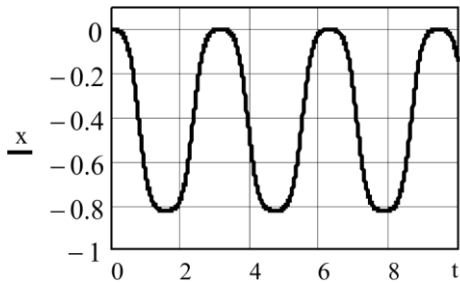


Рис. 11. Зависимость координаты φ

φ

от времени

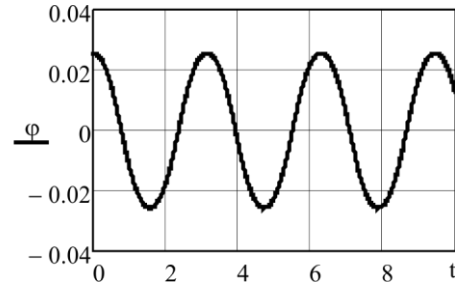


Рис. 12. Зависимость координаты

от времени

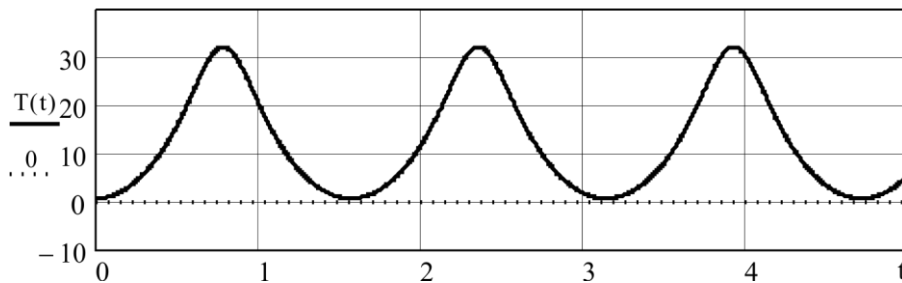


Рис. 13. Зависимость натяжения нити от времени

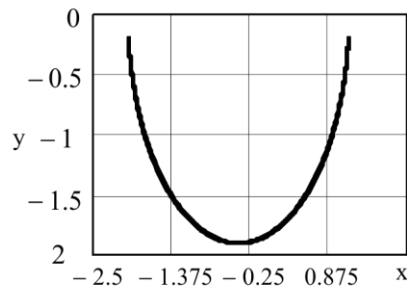


Рис. 14. Траектория точки

Дифференциальные уравнения, описывающие движение простого эллиптического маятника при отсутствии возмущающих и диссипативных сил, имеют вид (1):

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{\varphi} &= 0; \\ a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{\varphi} + c_{22}\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (6),$$

где $a_{11} = m_1 + m_2$; $a_{12} = a_{21} = -m_1\ell$;

$$a_{22} = m_1 \ell^2; c_{11} = c_{12} = c_{21} = 0; c_{22} = m_1 g \ell.$$

В этом случае получаем отдельное дифференциальное уравнение для координаты φ :

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \text{ где } k = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_2 \ell}} - \text{частота колебаний. (7)}$$

С учетом начальных условий движения решение уравнения (7) запишется:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt. \quad (8)$$

Таким образом, независимо от поведения координаты x , относительно вертикали угол φ будет меняться также, как у простого математического маятника.

Дифференциальное уравнение для координаты x :

$$\ddot{x} = \frac{a_{12}}{a_{11}} (\varphi_0 k^2 \cos kt + \dot{\varphi}_0 k \sin kt), \quad (9)$$

имеет решение:

$$x = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \left(\varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt \right) + \left(\dot{x}_0 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \dot{\varphi}_0 \right) t + x_0 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \varphi_0. \quad (10)$$

Численные эксперименты показали:

1. В случае свободных колебаний ($H = 0, \mu = 0$) независимо от движения ползуна точка А периодически колеблется около вертикального положения, описывая эллиптическую траекторию. Ползун периодически колеблется около своего начального положения, если его начальная скорость равна нулю.

2. В случае наличия сопротивления среды ($\mu \neq 0$) наблюдается гашение колебаний.

3. В случае вынужденных колебаний ($H \neq 0$) при приближении к резонансу движение точки А становится беспорядочным.

4. Увеличение длины нити приводит к уменьшению частоты колебаний. При малых амплитудах колебания, круговая частота рассчитывается по формуле (7). При увеличении амплитуды колебаний частота снижается.

Пример 3. Эллиптический маятник с ползуном, скользящим по линии, наклоненной к горизонту

Определить закон колебаний эллиптического маятника, состоящего из груза 1 (материальной точки) массы m_1 , невесомой нерастяжимой нити

длиной ℓ и ползуна 2 массы m_2 ,двигающегося по прямой, наклоненной к горизонту под углом α (рис. 15). Известно, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ $\varphi = \varphi_0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Трением и сопротивлением среды пренебречь.

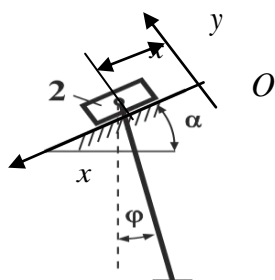


Рис. 15. Эллиптический маятник с ползуном,двигающимся по линии, наклоненной к горизонту

Решение

Положение системы, имеющей две степени свободы, будем определять обобщенными координатами: $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$ – углом отклонения нити от вертикали (рис. 15).

Выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 - m_1 \ell \cos(\varphi - \alpha) \cdot \dot{x} \dot{\varphi} + m_1 \ell^2 \dot{\varphi}^2. \quad (12)$$

Потенциальную энергию системы определим, принимая, что при $\varphi_0 = 0$, $x_0 = 0$ она равна нулю:

$$\Pi = -(m_1 + m_2)g \sin \alpha + m_1 g \ell (1 - \cos \varphi). \quad (13)$$

Опуская преобразования, получим нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, описывающие свободные колебания эллиптического маятника с ползуном, скользящим по линии, наклоненной к горизонту, в виде (6),

где $a_{11} = m_1 + m_2$; $a_{12} = a_{21} = -m_1 \ell \cos(\varphi - \alpha)$; $a_{22} = m_1 \ell^2$;

$$b_1 = -m_1 \ell \sin(\varphi - \alpha) \cdot \dot{\varphi}^2 + (m_1 + m_2)g \sin \alpha$$
; $b_2 = -m_1 g \ell \sin \varphi. \quad (14)$

Результаты интегрирования показаны на рис. 16–19.

Можно сделать следующие выводы:

1. Угол отклонения нити от вертикали φ колеблется около значения, равного углу наклона поверхности к горизонту α .
2. Координата x после некоторых колебаний изменяется по закону равнопеременного движения с ускорением, равным $g \sin(\alpha)$.
3. Натяжение нити после нескольких значительных колебаний устанавливается около некоторого стационарного значения.

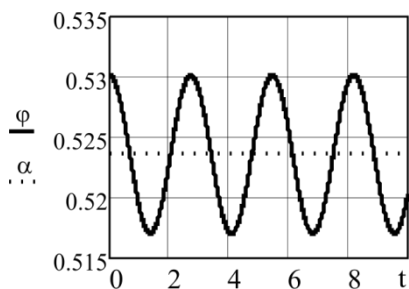


Рис. 16. Зависимость координаты φ

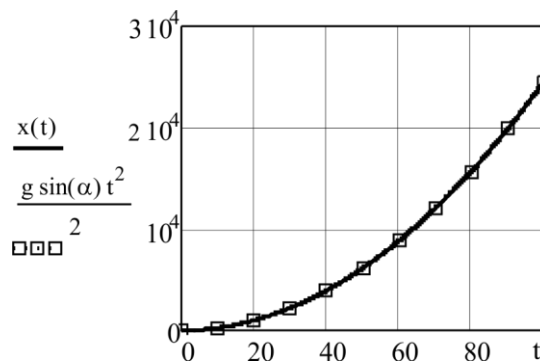


Рис. 17. Зависимость координаты x

4. В отличие от эллиптического маятника с ползуном на горизонтальной поверхности, в данном случае траектория точки разворачивается во времени, амплитуда колебаний постоянна, а период колебаний увеличивается.

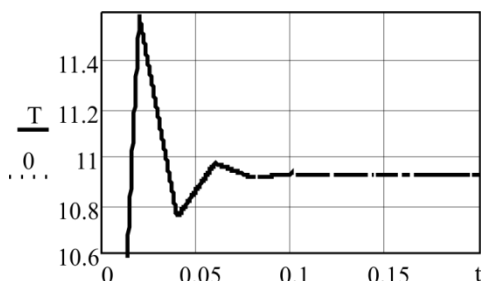


Рис. 18. Зависимость натяжения нити от времени

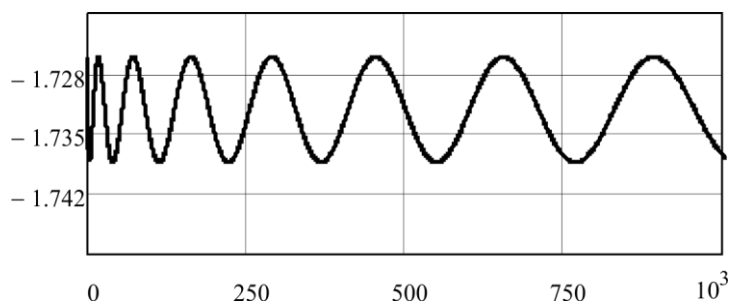


Рис. 19. Траектория точки

Выводы

Данные свойства эллиптического маятника, как, скорее всего, и других систем этого типа можно объяснить следующим образом:

1. Внешними силами для него являлись только силы тяжести, именно поэтому центр тяжести его либо неподвижен (на горизонтальной поверхности), либо движется равноускоренно (наклонная поверхность).
2. Вертикальное положение нити или угол наклона нити к вертикали не должны зависеть от ее длины из следующих соображений:

Если исследовать движение груза в неинерциальном пространстве Кенига, можно увидеть следующее (рис. 20):

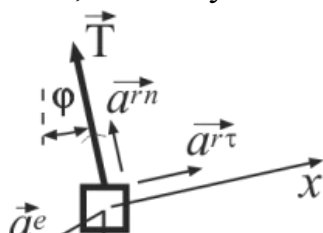


Рис. 20. Движение груза в неинерциальном пространстве Кенига

После проецирования уравнения относительного движения на ось, перпендикулярную нити, получим:

$$m_1 a^{r\tau} = m_1 (-g \sin \varphi + a^e \cos(\alpha - \varphi)). \quad (15)$$

Ускорение центра масс системы равно составляющей \vec{g} вдоль наклонной плоскости ($a^e = g \sin \alpha$). Подставив это значение для переносного ускорения a^e в (16), при относительном тангенциальном ускорении $a^{r\tau} = 0$ получим $tg \alpha = tg \varphi$.

Маятник на наклонной плоскости в пространстве Кенига ведет себя аналогично маятнику на горизонтальной плоскости, где нить в положении равновесия перпендикулярна плоскости (вертикальна).

Библиографический список

1. Прядко, Ю.Г. О возможных ошибках при неполных решениях ряда известных задач механики / Ю.Г. Прядко, В.Г. Караваев // Наука ЮУрГУ. Материалы 66-й научной конференции. Секции технических наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – С. 142–149.

2. Караваев, В.Г. Результаты работы СНО «Механик» на кафедре ТМ и ОПМ ЮУрГУ / В.Г. Караваев, Ю.Г. Прядко, С.В. Слепова // Наука ЮУрГУ. Материалы 67-й научной конференции. Секции технических наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015.

3. Суслов, Г.К. Теоретическая механика / Г.К. Суслов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 654 с.

4. Жуковский, Н.Е. Теоретическая механика / Н.Е. Жуковский. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 812 с.

5. Яблонский, А.А. Курс теории колебаний / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. – М.: Высшая школа, 1966. – 255 с.