УДК 531.4

О ЗАДАЧЕ И СПОСОБАХ РАСЧЕТА РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

Ю.Г. Прядко, Д.Б. Чернин

В статье из решения вариационной задачи на максимум момента распределенных элементарных сил трения доказывается существование одной точки пересечения всех перпендикуляров к этим силам. На основании чего определяется положение этой точки, анализируется зависимость от модуля и направления действующей на стержень произвольной силы.

Ключевые слова: сухое трение; равновесие стержня; вариационная задача.

Анализ равновесия и движения одного тела на плоскости имеет богатую историю. Достаточно широкий обзор этого вопроса приводится в работах [1, 2]. Известна задача Н.Е. Жуковского о равновесии скамьи на плоскости [3], где ставится та же задача, что и в этой статье, но скамья, моделью которой является однородный стержень, опиралась на плоскость двумя крайними точками. Как будет видно из нижеследующего, качественно полученные в нашей работе результаты совпадают с результатами работы [3]. Основная проблема, возникающая при рассмотрении равновесия тела на плоскости (поверхности) в том, что направление сил трения скольжения, приложенных к каждому элементарному участку опирающейся поверхности при равновесии неизвестно. Причиной этому является принимаемая классическая гипотеза о том, что направление силы трения зависит от скорости точки.

$$\vec{F}^{кр}_{тр} = -f\left|N\right|\frac{\vec{V}}{V}; \qquad F_{тр} \le f\left|N\right|.$$

Это приводит к неопределенности в определении условий равновесия тела на плоскости. Кроме этого, при анализе движения тела в одном из дифференциальных уравнений в знаменателе возникает угловая скорость, начальное значение которой равно нулю ([1, с. 86]). Без определения положения будущего мгновенного центра скоростей (МЦС) в плоском движении проинтегрировать уравнения движения не удается.

Проанализируем следующую задачу.

Пусть стержень длиной $2L$ находится в равновесии на шероховатой плоскости. Коэффициент трения скольжения между стержнем и плоскостью равен μ. Поскольку любая плоская система сил заменяется одной силой, то можно считать, что к стержню приложена равнодействующая сила $\vec{R}$. Угол между силой $\vec{R}$ и осью Ox равен β (рис. 1). Найдем условия равновесия стержня, направление сил трения в зависимости от угла β и точки приложения силы $\vec{R}$.

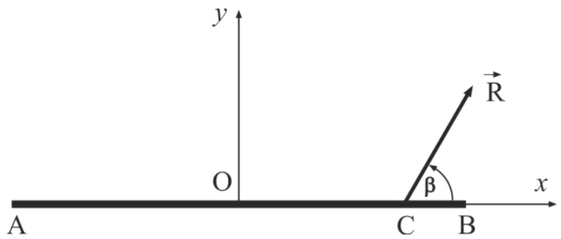

Рис. 1. Угол β

Необходимо отметить, что подобная задача, или близкая к поставленной задаче, исследуется многими авторами [4–6]. Во многих работах без доказательства считается, что в предельном равновесии существует точка, которая совпадает с МЦС в начале движения. В то же время координаты этой точки зачастую не определяются. Не исследуется зависимость параметров от силы $\vec{R}$.

Поставим задачу следующим образом: определим такую функцию $\alpha = \alpha(x)$, которая дает максимум сумме моментов элементарных сил трения относительно произвольной точки P с координатами x_P, y_P при известных проекциях равнодействующей $\vec{R}$ активных сил на оси Ox и Oy (рис. 2).

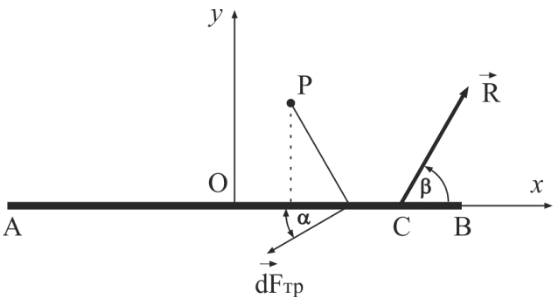

Рис. 2. Поставленная задача

Модуль элементарной силы трения равен $dF = \frac{\mu G}{2*L}dx = q\,dx$, а при неравномерной плотности материала $dF = q_x\,dx$. Здесь $q_x = q(x)$ – зависимость интенсивности давления на плоскость от координаты x.

Проекции этой силы $d\vec{F}$ на оси Оx и Оy определятся равенствами:

$$dF_x = \mu q\cos(\alpha(x))dx; \qquad dF_y = \mu q\sin(\alpha(x))dx \tag{1}$$

Здесь:

$$\cos\alpha = \frac{y_P}{\sqrt{\left(x - x_P\right)^2 + y_P{}^2}}, \ \sin\alpha = \frac{x - x_P}{\sqrt{\left(x - x_P\right)^2 + y_P{}^2}} \tag{2}$$

Момент элементарной силы трения относительно точки с координатами x, y $dM_{тр} = xq\sin(\alpha)dx + yq\cos(\alpha)dx$.

Суммарный момент сил трения относительно начала системы координат равен:

$$M_{тр_O} = \int_{-L}^{L}\mu qx\sin(\alpha)dx. \tag{3}$$

Необходимо заметить, что максимум (3) при наличии равенств (4, 5) необходимо приводит к максимуму суммарного момента сил трения относительно произвольного центра $M_{тр_P}$, так как они отличаются на постоянную величину:

$$M_{тр_P} = M_{тр_O} - R_x y_P + R_y x_P.$$

Поэтому найдем функцию $\alpha = \alpha(x)$, которая дает максимум сумме моментов элементарных сил трения относительно начала системы координат (3) при известных проекциях равнодействующей $\vec{R}$ активных сил на оси Ox и Oy.

Таким образом, поставлена изопериметрическая задача вариационного исчисления на максимум функционала (3) при следующих ограничениях:

$$\int_{-L}^{L} dF_x = \int_{-L}^{L} \mu \cos\alpha(x) q dx = R\cos\beta ; \qquad (4)$$

$$\int_{-L}^{L} dF_y = \int_{-L}^{L} \mu \sin\alpha(x) q dx = R\sin(\beta) . \qquad (5)$$

По методике Лагранжа это приводит к исследованию на экстремум функционала:

$$\Phi_{i(\alpha)} = \int_{-L}^{L} \left(x\sin(\alpha) + \lambda_1 \sin(\alpha) + \lambda_2 \cos(\alpha) \right) dx .$$

Уравнения Лагранжа, решающие поставленную задачу, будут такими:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi_{i(\alpha)}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \Phi_{i(\alpha)}}{\partial \alpha} = 0 \text{, или } \frac{\partial \Phi_{i(\alpha)}}{\partial \alpha} = 0 \text{, так как } \frac{\partial \Phi_{i(\alpha)}}{\partial \dot{\alpha}} = 0 .$$

Получим:

$$x\cos(\alpha^*) + \lambda_1 \cos(\alpha^*) - \lambda_2 \sin(\alpha^*) = 0 ,$$

или $$tg(\alpha^*) = \frac{x + \lambda_1}{\lambda_2} \qquad (6).$$

Равенство (6) говорит о том, что экстремальная функция $\alpha^* = \alpha^*(x)$ такова, что все перпендикуляры к элементарным силам трения пересекаются в одной точке. Множители Лагранжа λ_1 и λ_2 определяют координаты этой точки.

Итак, доказано, что в предельном равновесии существует некоторая точка P, для которой, все отрезки, соединяющие ее с точкой на стержне, перпендикулярны силам трения (рис. 3).

В (6) λ_1 равно $-x_P$, $\lambda_2 = y_P$.

Зная проекции силы $\vec{R}$ на оси координат, из двух уравнений проекций сил, действующих на стержень, можно найти координаты точки P.

Составим эти уравнения:

$$\int_{-L}^{L} \mu q \sin(\alpha^*) dx = R\sin(\beta) ; \qquad \int_{-L}^{L} \mu q \cos(\alpha^*) dx = R\cos(\beta) \qquad (7)$$

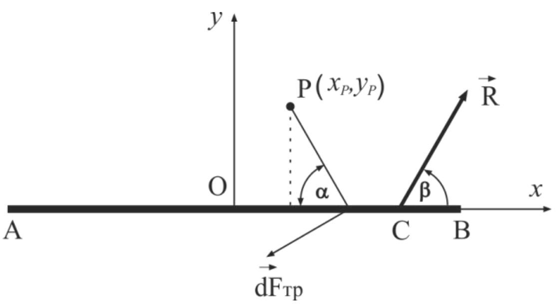

Рис. 3. Точка P

Или см. (2):

$$\int_{-L}^{L}\mu q\frac{x-x_P}{\sqrt{\left(x-x_P\right)^2+{y_P}^2}}dx=R\sin(\beta)\,;\int_{-L}^{L}\mu q\frac{y_P}{\sqrt{\left(x-x_P\right)^2+{y_P}^2}}dx=R\cos(\beta)\,;\ (8)$$

$$\int_{-L}^{L}\mu q\frac{x-x_P}{\sqrt{\left(x-x_P\right)^2+{y_P}^2}}dx=\mu q\left[\sqrt{\left(L-x_P\right)^2+{y_P}^2}-\sqrt{\left(L+-x_P\right)^2+{y_P}^2}\right];\ (9).$$

$$\int_{-L}^{L}\mu q\frac{y_P}{\sqrt{\left(x-x_P\right)^2+{y_P}^2}}dx=\mu q y_P\ln\left[\frac{L-x_P+\sqrt{\left(L-x_P\right)^2+{y_P}^2}}{-L-x_P+\sqrt{\left(L+x_P\right)^2+{y_P}^2}}\right].\qquad(10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), имеем систему уравнений:

$$\mu q\left[\sqrt{\left(L-x_P\right)^2+{y_P}^2}-\sqrt{\left(L+-x_P\right)^2+{y_P}^2}\right]=R\sin(\beta)\,;\qquad(11)$$

$$\mu q\,y_P\ln\left[\frac{L-x_P+\sqrt{\left(L-x_P\right)^2+{y_P}^2}}{-L-x_P+\sqrt{\left(L+x_P\right)^2+{y_P}^2}}\right]=R\cos(\beta)\,.\qquad(12)$$

Результаты решения системы трансцендентных уравнений (11, 12) относительно координат точки P показаны на рис. 4–5:

Зависимость ординаты точки P от ее абсциссы при всех углах β и разных значениях модуля силы $\vec{R}$. $\frac{R}{2Lq}=0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.$

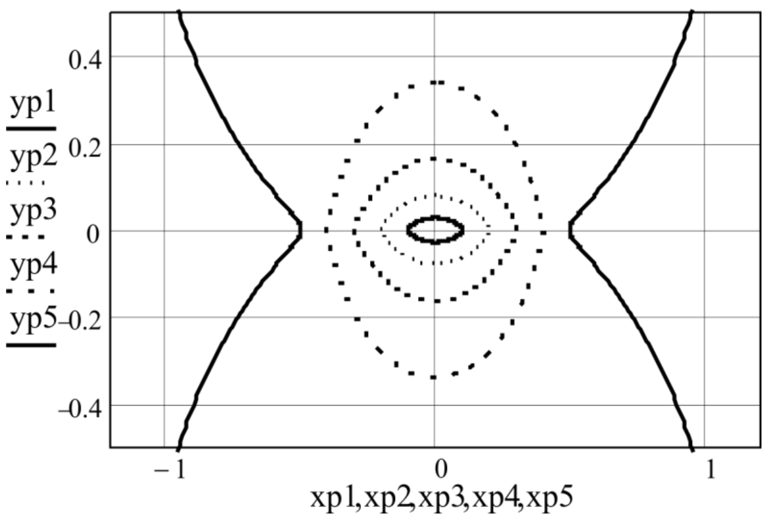

Рис. 4. Результаты решения системы трансцендентных уравнений относительно координат точки P

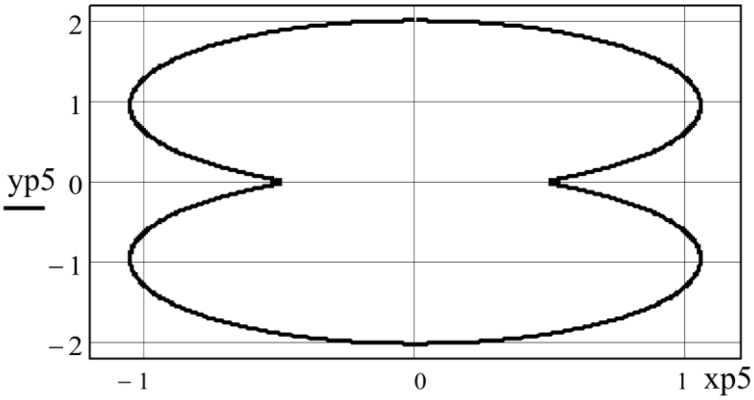

Рис. 5. Результаты решения системы трансцендентных уравнений относительно координат точки P

Выводы

1. Полученные результаты доказывают возможность использования понятия МЦС при оценке условий равновесия стержня на шероховатой плоскости. В то же время, необходимо доказать то же самое для любых одномерных и двумерных фигур.

2. Неоднородность стержня качественно не влияет на полученные результаты.

3. Поведение точки пересечения перпендикуляров к силам трения при изменении угла β, (рис. 5), качественно близко к решению задачи в [3].

Библиографический список

1. Розенблат, Г.М. Динамические системы с трением / Г.М. Розенблат. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 156 с.

2. Розенблат, Г.М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела: дис. … д-ра физ.-мат. наук / Г.М. Розенблат. – М., 2011. – 250 с.

3. Жуковский, Н.Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением / Н.Е. Жуковский // Собрание сочинений. Т. 1. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949. – С. 339–354.

К содержанию