УДК 519.216

О ВЛИЯНИИ СЛУЧАЙНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ НА ЕЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Е.А. Алешин

Рассматриваются вопросы оценки влияния случайного разброса параметров модели системы на ее вероятностные характеристики с помощью аналитических и численных методов.

Ключевые слова: случайный разброс параметров, вероятностные характеристики, оценка, модель системы.

Оценки влияния случайного разброса параметров модели системы на ее вероятностные характеристики обычно проводятся на всех этапах проектирования: сначала при выборе структуры и параметров системы, чтобы система была мало чувствительной к этим разбросам, а на конечном этапе – для получения вероятностных характеристик системы с учетом разброса параметров.

Согласно [1], под оценкой влияния случайного разброса параметров на вероятностную характеристику λ модели системы будем понимать определение зависимости изменения $\delta\lambda$ вероятностной характеристики от вероятностных характеристик случайного разброса параметров. Методы оценки влияния случайного разброса параметров на вероятностные характеристики модели системы основываются на использовании априорной информации о малости этого влияния, что позволяет применить аналитические методы, рассматривать упрощенную систему, а также ограничится оценкой сверху влияния разброса параметров [2].

Если в результате упрощения исходной системы оказывается, что для поучения вероятностной характеристики системы при конкретных значениях ее параметров применимы аналитические методы, то это означает, что для любого вектора случайного отклонения параметров системы $\Delta\alpha$ может быть получено условное значение $\mu(\Delta\alpha)$ вероятностной характеристики упрощенной системы. Тогда, используя $\mu(\Delta\alpha)$, по формуле:

$$\mu = \int \mu(\Delta\alpha) f(\Delta\alpha) d\Delta\alpha, \qquad (1)$$

можно найти значение μ вероятностной характеристики упрощенной системы. В соответствии с [1] изменение $\delta\lambda$ вероятностной характеристики исходной системы можно приближенно вычислить как изменение $\delta\mu$ соответствующей вероятностной характеристики упрощенной системы, т.е.:

$$\delta\lambda = \int \mu(\Delta\alpha) f(\Delta\alpha) d\Delta\alpha - \mu(0). \qquad (2)$$

При малом влиянии разброса параметров на вероятностные характеристики системы функция $\mu(\Delta\alpha)$ может быть разложена в ряд по степеням компонент вектора $\Delta\alpha$ и ограничиться членами минимального порядка. Так как $M[\Delta\alpha] = 0$, то минимальный порядок разложения равен двум и:

$$\delta\lambda = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \left. \frac{\partial^2 \mu(\Delta\alpha)}{\partial \Delta\alpha_p \partial \Delta\alpha_q} \right|_{\Delta\alpha = 0} K_{\alpha_p \alpha_q}, \qquad (3)$$

где $K_{\alpha_p \alpha_q}$ – корреляционный момент случайных величин $\Delta\alpha_p$ и $\Delta\alpha_q$.

Формула (3) определяет изменение $\delta\lambda$ вероятностной характеристики за счет случайного разброса параметров. Для вычисления $\delta\lambda$ необходимо знать корреляционные моменты $K_{\alpha_p \alpha_q}$ разбросов параметров и вычислять вторые производные $\frac{\partial^2 \mu(\Delta\alpha)}{\partial \Delta\alpha_p \partial \Delta\alpha_q}$. Возможны два варианта представления функции $\mu(\Delta\alpha)$. В первом варианте считаем, что функция $\mu(\Delta\alpha)$ представляется аналитически, тогда вторые производные в принципе могут быть вычислены, а значит, получена оценка влияния разброса параметров на вероятностные характеристики системы. Во втором варианте для нахождения $\delta\lambda$ можно применить численный метод определения коэффициентов разложения через значение $\mu(\Delta\alpha)$ при конкретных значениях вектора параметров $\Delta\alpha$.

Идея численного метода заключается в следующем. Предварительно вектор $\Delta\alpha$ коррелированных случайных величин путем линейного преобразования, характеризуемого матрицей B [2], приводится к вектору $\Delta\beta$ некоррелированных величин $\Delta\beta = B\Delta\alpha$. Базируясь на (3), получаем:

$$\delta\lambda = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{m} a_q \sigma_{\beta_q}^2, \qquad (4)$$

где a_q – вторые производные (коэффициенты); σ_{β_q} – средние квадратические отклонения случайной величины $\Delta\beta_q$. При этом величины $\sigma^2_{\beta_q}$ будут диагональными членами матрицы $K_{\beta\beta}$, определяемой как:

$$K_{\beta\beta} = BK_{\alpha\alpha}B^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

где $K_{\alpha\alpha}$ – корреляционная матрица вектора $\Delta\alpha$.

Для любых реально возможных значений вектора $\Delta\beta$ можно найти $\Delta\alpha$, а по нему $\mu(\Delta\alpha)$ и $\delta\mu(\Delta\alpha) = \mu(\Delta\alpha) - \mu(0)$.

Обозначим через $\delta\mu_q(\Delta\beta_q)$ значение $\delta\mu(\Delta\alpha)$ при $\Delta\beta_q \neq 0$ и $\Delta\beta_i = 0$ для $i \neq q$. Тогда, как показано в [2]:

$$a_q = \frac{1}{\left(\Delta\beta_{q0}\right)^2}\left[\delta\mu_q\left(\Delta\beta_{q0}\right) + \delta\mu_q\left(-\Delta\beta_{q0}\right)\right], \tag{6}$$

где $\Delta\beta_{q0}$ – конкретное значение $\Delta\beta_q$, лежащее в пределах реально возможных значений $\Delta\beta_q$ (например, $\Delta\beta_{q0} = \sigma_{\beta_q}$).

Подставляя коэффициенты a_q в (4) и используя (5), получим оценку влияния случайного разброса параметров на вероятностную характеристику системы:

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m} a_q BK_{\alpha\alpha}B^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

Пусть вероятностная характеристика представляет собой дисперсию установившегося случайного процесса в системе. Определим изменение дисперсии δD за счет случайно разброса параметров для передаточных функций:

$$K_1(p) = \frac{k(1+p\tau)}{p(1+pT)} \text{ и } K_2(p) = \frac{k(1+p\tau)}{p^2(1+pT)}. \tag{8}$$

Для нахождения дисперсий $D_1(\alpha)$ и $D_2(\alpha)$ при конкретном значении вектора α параметров k, τ и T воспользуемся таблицами [1]:

$$D_1(\alpha) = \pi Gk\frac{T + k\tau^2}{T(1+k\tau)},\ D_2(\alpha) = \pi G\frac{1+k\tau^2}{\tau - T}. \tag{9}$$

Путем непосредственного вычисления вторых производных получаем искомые изменения дисперсий:

$$\delta D_1(\alpha) = \pi G\left\{\frac{\tau_0(\tau_0 - T_0)}{T_0(1+k_0\tau_0)^3}\sigma_k^2 + \frac{k_0^2\tau_0^2}{T_0^3(1+k_0\tau_0)^2}\sigma_T^2 + \frac{k_0^2(1+k_0T_0)}{T_0(1+k_0\tau_0)^3}\sigma_\tau^2\right\}, \tag{10}$$

$$\delta D_2(\alpha) = \pi G \left\{ \frac{1 + k_0 \tau_0^2}{(\tau_0 - T_0)^3} \sigma_T^2 + \frac{1 + k_0 T_0^2}{(\tau_0 - T_0)^3} \sigma_\tau^2 \right\}. \qquad (11)$$

Предположим, что относительные средние квадратические отклонения случайного разброса всех параметров одинаковы и равны σ. Поэтому $\sigma_k = k_0 \sigma$, $\sigma_T = T_0 \sigma$, $\sigma_\tau = \tau_0 \sigma$. Для номинальных значений параметров $k_0 = 1\,\text{с}^{-1}$, $\tau_0 = 0{,}6\,\text{с}$, $T_0 = 1{,}3\,\text{с}$ из (10) получаем $\delta D_1 = 0{,}46 G \sigma^2$.

Библиографический список

1. Пугачев, В.Н. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик / В.Н. Пугачев. – М.: «Советское радио», 1973. – 256 с.
2. Лившиц, Н.А. Вероятностный анализ систем автоматического управления / Н.А. Лившиц, В.Н. Пугачев. – М.: «Советское радио», 1963. – Т. 1. – 634 с.