

# ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ ОСКОЛКОВА

*Н.А. Манакова*

## ON A MODEL OF OPTIMAL CONTROL OF THE OSKOLKOV EQUATION

*N.A. Manakova*

Найдены достаточные и необходимые условия существования оптимального управления решениями задачи Шоултера - Сидорова уравнения, моделирующего эволюцию давления вязкоупругой жидкости. Абстрактные результаты подтверждены численными экспериментами.

*Ключевые слова:* уравнение Осколкова, уравнения Соболевского типа, задача оптимального управления

Sufficient and necessary conditions of the optimal control existence of solutions to the Showalter - Sidorov problem of the equation modeling evolution of the visco-elastic fluid pressure are found. Abstract results are confirmed by numerical experiments.

*Keywords:* the Oskolkov equation, Sobolev type equations, optimal control problem

### Введение

Неклассическое уравнение

$$(\lambda - \Delta)x_t = \alpha \Delta x - |x|^{p-2}x + f \quad (1)$$

моделирует эволюцию давления ( $x = x(s, t)$ ) вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде [1]. Параметры  $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}_+$  характеризуют упругость и вязкость жидкости, причем экспериментально было отмечено, что отрицательные значения параметра  $\lambda$  не противоречат физическому смыслу модели [2]. Свободный член  $f = f(s, t)$  соответствует внешней нагрузке. В целом уравнение показывает зависимость давления вязкоупругой несжимаемой жидкости (например, высокопарафинового сорта нефти), фильтрующейся в пористом пласте, от внешней нагрузки (например, давления воды, нагнетаемой по скважинам в пласт).

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega; \quad (2)$$

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (3)$$

для уравнения (1) в цилиндре  $\Omega \times (0, T)$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ . Нелокальные задачи для уравнения (1) изучались в [3] при  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . При  $\lambda \in \mathbb{R}$  задача (1) – (3) изучалась в [4], в которой показано, что при всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  фазовым пространством уравнения (1) является простое гладкое  $C^1$ -многообразие. Однако

эти результаты не очень удобны при численных расчетах, поэтому в данной статье мы воспользуемся иным подходом, основанным на методе Галеркина - Петрова - Фаэдо.

В подходящих функциональных пространствах  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  задача (2), (3) для уравнения (1) редуцируется к задаче Шоултера - Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{4}$$

для полулинейного операторного уравнения Соболевского типа

$$L \dot{x} + M(x) = u. \tag{5}$$

Нас интересует оптимальное управление

$$J(x, u) \rightarrow \min \tag{6}$$

решениями задачи (4) – (6). Здесь  $J(x, u)$  – некоторый, специальным образом построенный, функционал штрафа; управление  $u \in \mathfrak{U}_{ad}$ , где  $\mathfrak{U}_{ad}$  – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений  $\mathfrak{U}$ . Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (1) – (3) дает возможность минимизировать штрафные санкции при добыче нефти, выбрав внешнюю нагрузку таким образом, чтобы поддерживать необходимое давление жидкости в пласте. Линейная задача оптимального управления (т. е. оператор  $M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  линеен и непрерывен) рассматривалась в монографии [5, гл. 7]. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации (1) – (3), (6) впервые была рассмотрена в [6].

Статья организована следующим образом. В п. 1 доказано существование единственного решения задачи (4) для уравнения (5) методом Галеркина. С использованием идеологии [7], [8] находятся достаточные условия разрешимости задачи (4) – (6). Далее в п. 2 мы сводим задачу (2), (3) для уравнения (1) к задаче (4) для уравнения (5) и приводим необходимые условия экстремума для задачи (4) – (6) в терминах сопряженной задачи. В п. 3 представлены результаты работы программ, вычисляющих оптимальное управление для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации в случае  $n = 2, p = 2$  или  $p = 4$ .

## 1. Задача оптимального управления

Пусть  $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным;  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$  – дуальная (относительно двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) пара рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \tag{7}$$

плотны и непрерывны. Пусть  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$  – линейный, самосопряженный, неотрицательно определенный фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле  $\mathcal{H}$ ) набор собственных векторов  $\{\varphi_k\}$  образует базис в пространстве  $\mathfrak{B}$ . Пусть далее  $M \in C^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$  –  $s$ -монотонный (т. е.  $\langle M'_y(y)x, x \rangle > 0, \forall x, y \in \mathfrak{B} \setminus \{0\}$ ) и  $p$ -коэрцитивный (т. е.  $\langle M(x), x \rangle \geq C_M \|x\|^l$  и  $\|M(x)\|_* \leq C^M \|x\|^{p-1}$  при некоторых константах  $C_M, C^M \in \mathbb{R}_+$  и  $l, p \in [2, +\infty), r \in \mathbb{N}$  и любом  $x \in \mathfrak{B}, \|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|_*$  – нормы в пространстве  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{B}^*$  соответственно) оператор [9].

Прежде всего сделаем ряд замечаний относительно терминологии. Отметим, что для гладких операторов  $M : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}^*$  из сильной монотонности следует  $s$ -монотонность, а из  $s$ -монотонности – строгая монотонность. Далее оператор  $M : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}^*$  назовем *сильно коэрцитивным*, если

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{\langle M(u + v), v \rangle}{\|v\|} = +\infty \quad \forall u \in \mathfrak{B}.$$

Очевидно, что сильно коэрцитивный оператор коэрцитивен. Оказывается, что из  $p$ -коэрцитивности следует сильная коэрцитивность. Доказательства этих фактов можно найти в [9].

Рассмотрим задачу Шоуолтера - Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{8}$$

для полулинейного уравнения Соболевского типа

$$L \dot{x} + M(x) = f. \tag{9}$$

В виду самосопряженности и фредгольмовости оператора  $L$  отождествим  $\mathfrak{B} \supset \ker L \equiv \text{coker } L \subset \mathfrak{B}^*$ . Очевидно,  $\mathfrak{B}^* = \text{coker } L \oplus \text{im } L$ . Обозначим через  $Q$  проектор вдоль  $\text{coker } L$  на  $\text{im } L$  и сделаем допущение

$$(\mathbb{I} - Q)f \text{ не зависит от } t \in (0, T). \tag{10}$$

Тогда если  $x = x(t), t \in [0, T]$  – решение уравнения (9), то оно с необходимостью лежит во множестве

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{B} : (\mathbb{I} - Q)M(x) = (\mathbb{I} - Q)f\}, & \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{B}, & \text{если } \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Система  $\{\varphi_k\}$  собственных векторов оператора  $L$  тотальна в  $\mathfrak{B}$ , поэтому построим галеркинские приближения решения задачи (8), (9) в виде

$$x^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)\varphi_k, \quad m > \dim \ker L,$$

где коэффициенты  $a_k = a_k(t), k = 1, \dots, m$ , определяются решением следующей задачи:

$$\langle Lx_t^m, \varphi_k \rangle + \langle M(x^m), \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle, \tag{11}$$

$$\langle x^m(0) - x_0, \varphi_k \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{12}$$

Уравнения (11) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть  $\mathfrak{B}^m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}, T_m \in \mathbb{R}_+, T_m = T_m(x_0)$ .

**Лемма 1.** [9] *При любых  $x_0 \in \mathfrak{B}$  и  $m > \dim \ker L$  существует единственное решение  $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{B}^m)$  задачи (11), (12).*

**Теорема 1.** [9] *При любых  $x_0 \in \mathfrak{B}, T \in \mathbb{R}_+, f \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$  таких, что выполнено (10), существует единственное решение  $x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M})$  задачи (8), (9).*

Фиксируем  $T \in \mathbb{R}_+$ . Построим пространство  $\mathfrak{U} = \{u \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*) : (\mathbb{I} - Q)u(t) = 0, t \in (0, T)\}, p^{-1} + q^{-1} = 1$ , и определим в пространстве  $\mathfrak{U}$  замкнутое и выпуклое множество  $\mathfrak{U}_{ad}$ . Рассмотрим задачу оптимального управления (4) – (6), где функционал стоимости задается формулой

$$J(x, u) = \frac{1}{p} \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}}^p dt + \frac{N}{q} \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{B}^*}^q dt, \tag{13}$$

$z_d = z_d(t)$  – желаемое состояние.

**Определение 1.** Пару  $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M}) \times \mathfrak{U}_{ad}$  называют *решением задачи* (4) – (6), если  $J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(x, u)$ , и  $(\tilde{x}, \tilde{u})$  удовлетворяет уравнению  $L \dot{x} + M(x) = u$ ; вектор  $\tilde{u}$  называют *оптимальным управлением* в задаче (4) – (6).

**Теорема 2.** [6] *При любых  $x_0 \in \mathfrak{B}, T \in \mathbb{R}_+$  существует решение задачи (4), (5), (13).*

## 2. Уравнение Осколкова

Редуцируем задачу (1) – (3) к задаче (4), (5). Для этого положим  $\mathfrak{B} = \tilde{W}_2^{-1}$ ,  $\mathcal{H} = L_2$  (все функциональные пространства определены на области  $\Omega$ ). Заметим, что в силу теоремы вложения Соболева  $W_2^1 \hookrightarrow L_p$  непрерывно при  $n \geq 3$  и  $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$ . Положим пространство  $\mathfrak{B}^* = W_2^{-1}$ . Операторы  $L$  и  $M$  определим формулами:

$$\langle Lx, y \rangle = \int_{\Omega} (\lambda xy + \nabla x \nabla y) ds,$$

$$\langle Mx, y \rangle = \int_{\Omega} (\alpha \nabla x \nabla y + |x|^{p-2} xy) ds,$$

где  $x, y \in \mathfrak{B}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в  $L^2$ . (Заметим, что всюду выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам). Обозначим через  $\{\lambda_k\}$  последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа  $-\Delta$  в области  $\Omega$ , занумерованное по неубыванию с учетом их кратности.

**Лемма 2.** [6] (i) При всех  $\lambda \geq -\lambda_1$  оператор  $L$  самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство  $\{\varphi_k\}$  его функций тотально в пространстве  $\mathfrak{B}$ .

(ii) При всех  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \geq 3$ ,  $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$  оператор  $M \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$   $s$ -монотонен и  $p$ -коэрцитивен.

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \langle M(x), \varphi_1 \rangle = \langle y, \varphi_1 \rangle\}, \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

**Теорема 3.** [6] Пусть  $\lambda \geq -\lambda_1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  и  $n \geq 3$ ,  $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$ , тогда при любых  $x_0 \in \mathfrak{B}$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $f \in L_2(0, T; \mathfrak{B}^*)$  таких, что выполнено (10), существует единственное решение  $x \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{M})$  задачи (1) – (3).

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации. В цилиндре  $\mathbb{Q} = \Omega \times (0, T)$  зададим функционал качества

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|x - z_d\|_{W_2(\Omega)}^2 dt + \frac{N}{2} \int_0^T \|u\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 dt, \quad (14)$$

и выберем  $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_2(0, T; W_2^{-1})$  – замкнутое, выпуклое множество, для элементов которого выполнено  $(\mathbb{I} - Q)u(t) = 0$ . Из теоремы 2 и теоремы 3 непосредственно вытекает

**Теорема 4.** [6] Пусть  $\lambda \geq -\lambda_1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \geq 3$ ,  $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$  тогда существует оптимальное управление в задаче (1) – (3), (14).

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление  $u$  решениями задачи (1) – (3).

**Теорема 5.** [6] Пусть  $\lambda \geq -\lambda_1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \geq 3$ ,  $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$ , если  $u$  – оптимальное управление задачи (14), то существует вектор  $y \in L_{\infty}(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{B})$  такой,

что

$$\begin{aligned} &(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u, \\ &(-\lambda + \Delta)y_t - \alpha\Delta y + (p-1)|x|^{p-2}y = (-\Delta)(x(u) - z_d), (s, t) \in Q, \\ &x(s, t) = y(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ &(\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, (-\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, s \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\int_Q (y + N(-\Delta)^{-1}(u))(v - u) ds dt \geq 0 \forall v \in U_{ad}.$$

### 3. Приложение

Рассмотрим уравнение Осколкова нелинейной фильтрации при  $\eta = 2$

$$\begin{aligned} &(\lambda - \Delta)x_t(s_1, s_2, t) = \alpha\Delta x(s_1, s_2, t) - \\ &|x(s_1, s_2, t)|^{p-2}x(s_1, s_2, t) + u(s_1, s_2, t). \end{aligned} \tag{15}$$

Зададим область  $\Omega = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_1 \leq \pi, 0 \leq s_2 \leq \pi\}$ . Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s_1, s_2, 0) - x_0(s_1, s_2)) = 0, (s_1, s_2) \in \Omega; \tag{16}$$

$$x(s_1, s_2, t) = 0, (s_1, s_2, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \tag{17}$$

для уравнения (15). Решение начально-краевой задачи (15) - (17) будем искать в виде галеркинской суммы

$$x^m(s_1, s_2, t) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m x_{kl}(t)\varphi_{kl}, m > \dim \ker(\lambda - \Delta), \tag{18}$$

где  $\{\varphi_{kl}\}$  – множество всех решений краевой задачи на собственные значения

$$(\lambda - \Delta)x(s_1, s_2) = 0, (s_1, s_2) \in \Omega;$$

$$x(0, s_2) = x(\pi, s_2) = x(s_1, 0) = x(s_1, \pi) = 0.$$

Хорошо известно, что эта спектральная задача разрешима для счетного набора собственных чисел  $\lambda_{kl}$ , причем функции  $\{\varphi_{kl}\}$  образуют ортонормальную с весом  $4\pi^{-2}$  систему функций

$$4\pi^{-2} \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi_{kl}\varphi_{ij} ds_1 ds_2 = \langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = \begin{cases} 1, l = i, k = j; \\ 0, l \neq i, k \neq j. \end{cases}$$

Легко подсчитать, что  $\varphi_{kl} = \varphi_{kl}(s_1, s_2) = \sin(ks_1) \sin(ls_2)$ , а  $\lambda_{kl} = -k^2 - l^2$ . В силу теоремы 3 для того, чтобы существовало единственное решение задачи (15) - (17), необходимо, чтобы  $\lambda \geq -2$ .

Все вычисления производились в вычислительной среде Maple 9.0. Для того, чтобы были выполнены условия теоремы 4, возьмем, например,  $m = 2, p = 2, \lambda = -2, \alpha = 3$ , и  $u(s_1, s_2, t) = u(t) \sin(2s_1) \sin(2s_2)$ , чтобы  $(\mathbb{I} - Q)u(s_1, s_2, t) = 0, t \in (0, T)$ . Тогда,

умножив скалярно (15) на функции  $\varphi_{kl}$ ,  $l = k = 1..2$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_{11}(t) = 0, \\ 3 \dot{x}_{21}(t) + 10x_{21}(t) = 0, \\ 3 \dot{x}_{12}(t) - 8x_{12}(t) = 0, \\ 6 \dot{x}_{22}(t) + x_{22}(t) = u(t). \end{cases} \quad (19)$$

Построим функционал стоимости (14), для этого зададим, например,  $z_d(s_1, s_2) = \sin(s_1) + \sin(s_2)$  и получим

$$\begin{aligned} J(x, u) = & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi [((x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2))'_{s_1})^2 + \\ & ((x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2))'_{s_2})^2] ds_1 ds_2 dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi [u(s_1, s_2, t)(-\Delta)^{-1}u(s_1, s_2, t)] ds_1 ds_2 dt = \\ & \int_0^T [-4\pi x_{11}(t) + 2\pi^2 x_{22}^2(t) + \frac{5}{4}\pi^2(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \\ & \frac{1}{2}\pi^2 x_{11}^2(t) + \pi^2 + \frac{1}{32}\pi^2 u(t)^2] dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что  $(-\Delta)^{-1}(\sin(ks_1) \sin(ls_2)) = \frac{1}{k^2+l^2} \sin(ks_1) \sin(ls_2)$ .

Для нахождения оптимального управления задачи (19), (20) с условиями  $T = 1$ ,  $x_{11}(0) = 0$ ,  $x_{21}(0) = 2$ ,  $x_{12}(0) = 2$ ,  $x_{22}(0) = 2$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(T) = 1$  (для определенности) была разработана программа, которая, опираясь на метод Рунге, ищет оптимальное управление в виде

$$u(t, N) : (t, N) \mapsto u(0) + \frac{(u(T) - u(0))t}{T} + \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right).$$

Для задачи (15) – (17), (20) при  $N = 4$  получим

$$\begin{aligned} u(s_1, s_2, t) = & [t - 7, 695362486 \sin(\pi t) - 3, 674132956 \sin(2\pi t) - \\ & 2, 940115757 \sin(3\pi t) - 1, 904765651 \sin(4\pi t)] \sin(2s_1) \sin(2s_2). \end{aligned}$$

Приведем необходимое условие существования оптимального управления при  $m = 2$ ,  $p = 4$ ,  $\lambda = -2$ ,  $\alpha = 3$ , и  $u(s_1, s_2, t) = u(t) \sin(2s_1) \sin(2s_2)$ . Умножив скалярно (15) на функции  $\varphi_{kl}$ ,  $k = 1..2$ ,  $l = 1..2$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{9}{8}x_{11}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{21}(t)x_{12}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{11}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{11}(t)x_{22}^2(t) = 0, \\ 3 \dot{x}_{21}(t) + \frac{9}{8}x_{21}(t)(x_{22}^2(t) + x_{11}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{12}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{21}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{21}(t)x_{12}^2(t) + 9x_{21}(t) = 0, \\ 3 \dot{x}_{12}(t) + \frac{9}{8}x_{12}(t)(x_{22}^2(t) + x_{11}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{21}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{12}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{12}(t)x_{21}^2(t) - 9x_{12}(t) = 0, \\ 6 \dot{x}_{22}(t) + \frac{9}{8}x_{22}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{12}(t)x_{21}(t) + \frac{9}{16}x_{22}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{22}(t)x_{11}^2(t) = u(t). \end{cases} \quad (21)$$

Построим сопряженную задачу к задаче (15) - (17) при  $\rho = 4$  и получим

$$\begin{aligned} &(-\lambda + \Delta)y_t(s_1, s_2, t) - \alpha\Delta y(s_1, s_2, t) + 3x^2(s_1, s_2, t)y(s_1, s_2, t) \\ &= (-\Delta)(x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2)), (s_1, s_2, t) \in Q, \end{aligned} \quad (22)$$

$$y(s, t) = 0, (s_1, s_2, t) \in \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(\lambda - \Delta)y(s, T) = 0, (s_1, s_2) \in \Omega. \quad (23)$$

Умножив скалярно (22) на функции  $\varphi_{kl}, k = 1..2, l = 1..2$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} &6 \dot{y}_{11}(t) + \frac{9}{8}y_{11}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}(x_{12}(t)x_{22}(t)y_{21}(t) + \\ &x_{21}(t)x_{12}(t)y_{22}(t) + x_{21}(t)x_{22}(t)y_{12}(t) + x_{11}(t)x_{22}(t)y_{22}(t)) + \\ &\frac{9}{4}x_{11}(t)(x_{21}(t)y_{21}(t) + x_{12}(t)y_{12}(t)) + \\ &\frac{27}{16}x_{11}^2(t)y_{11}(t) + \frac{3}{4}y_{11}(t)x_{22}^2(t) = \frac{2(-4+x_{11}(t)\pi)}{\pi}, \\ &18 \dot{y}_{21}(t) + \frac{3}{4}x_{12}^2(t)y_{21}(t) + \frac{9}{8}y_{21}(t)(x_{11}^2(t) + x_{22}^2(t)) + \\ &\frac{3}{2}(x_{12}(t)x_{11}(t)y_{22}(t) + x_{12}(t)x_{22}(t)y_{11}(t) + \\ &x_{11}(t)x_{22}(t)y_{12}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{12}(t)) + \\ &\frac{9}{4}x_{21}(t)(x_{11}(t)y_{11}(t) + x_{22}(t)y_{22}(t)) + \frac{27}{16}y_{21}(t)x_{21}^2(t) = 5x_{21}(t), \\ &18 \dot{y}_{12}(t) + \frac{3}{4}x_{21}^2(t)y_{12}(t) + \frac{9}{8}y_{12}(t)(x_{11}^2(t) + x_{22}^2(t)) + \\ &\frac{3}{2}(x_{21}(t)x_{11}(t)y_{22}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{21}(t) + \\ &x_{11}(t)x_{22}(t)y_{21}(t) + x_{21}(t)x_{22}(t)y_{11}(t)) + \\ &\frac{9}{4}x_{12}(t)(x_{11}(t)y_{11}(t) + x_{22}(t)y_{22}(t)) + \frac{27}{16}y_{12}(t)x_{12}^2(t) = 5x_{12}(t), \\ &30 \dot{y}_{22}(t) + \frac{3}{4}x_{11}^2(t)y_{22}(t) + \frac{9}{8}y_{22}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \\ &\frac{3}{2}(x_{11}(t)x_{21}(t)y_{12}(t) + x_{11}(t)x_{22}(t)y_{11}(t) + \\ &x_{11}(t)x_{12}(t)y_{21}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{11}(t)) + \\ &\frac{9}{4}x_{22}(t)(x_{12}(t)y_{12}(t) + x_{21}(t)y_{21}(t)) + \frac{27}{16}y_{22}(t)x_{22}^2(t) = 8x_{22}(t). \end{aligned} \right. \quad (24)$$

По теореме 5, если  $u(s_1, s_2, t) = u(t) \sin(2s_1) \sin(2s_2)$  - оптимальное управление, то решения систем (21), (24) должны удовлетворять следующему условию

$$\int_0^T \left[ \frac{1}{32}\pi^2(u^2(t) - u(t)v(t)) + \frac{1}{4}\pi^2 y_{22}(t)(v(t) - u(t)) \right] dt \geq 0$$

$$\forall v(s_1, s_2, t) = v(t) \sin(2s_1) \sin(2s_2) \in \mathcal{U}_{ad}.$$

**Замечание 1.** При помощи пакета Maple системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21), (24) при условии  $x_{11}(0) = x_{11}^0, x_{21}(0) = x_{21}^0, x_{12}(0) = x_{12}^0, x_{22}(0) = x_{22}^0, y_{11}(T) = 0, y_{22}(T) = 0, y_{12}(T) = 0, y_{21}(T) = 0$  разрешимы численно.

*Автор выражает большую благодарность своему научному руководителю, проф. Г.А. Свиридюку за плодотворные дискуссии.*

## Литература

1. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. - 1991.- Т. 198.- С. 31 - 48.
2. Амфилохийев, В.Б. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохийев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева // Тр. Лен. кораблестр. ин-та. - 1975. - Т. 96. - С. 3 - 9.

3. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для уравнений фильтрации неньютоновых жидкостей в пористых средах / А.П. Осколков, М.М. Ахматов, Р.Д. Шадиёв // Зап. научн. сем. ЛОМИ. - 1991. - Т. 189. - С. 82 - 100.
4. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Изв. вузов. Математика. - 2003. - № 9. - С. 36 - 41.
5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov - Utrecht; Boston: VSP, 2003.
6. Манакова, Н. А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 438, № 9. - С. 1185 - 1192.
7. Лионе, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионе. - М.: Наука, 1987.
8. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. - Новосибирск: Научная книга, 1999.
9. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. - 1990. - № 2. - С. 55 - 61.
10. Лионе, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионе. - М.: Мир, 1972.

Кафедра уравнений математической физики,  
Южно-Уральский государственный университет  
[mymmi@ems.ru](mailto:mymmi@ems.ru)

*Поступила в редакцию 22 сентября 2008 г.*