На правах рукописи

СИДИКОВА Анна Ивановна

РАЗРАБОТКА И ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2010

√ и23

Работа выполнена в ГОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет"на кафедре вычислительной математики

Научный руководитель – доктор физико–математических наук, профессор ТАНАНА Виталий Павлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ДАНИЛИН Алексей Руфимович;

доктор физико-математических наук, профессор ЛЕОНОВ Александр Сергеевич.

Ведущая организация – Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН , г. Новосибирск

Защита диссертации состоится 9 декабря 2010 года, в 13 ч., на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Институте математики и механики УрО РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 8 ноября 2010 г.

44453

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Л.Д. Попов.

Общая характеристика работы

Объект исследования. Диссертация посвящена разработке, обоснованию и тестированию численных методов решения обратных граничных задач теплопередачи .

Актуальность темы. При математическом моделировании многих процессов и явлений, происходящих в природе и обществе, приходится сталкиваться с задачами, не удовлетворяющими условиям корректности Адамара . Основной трудностью решения таких задач является то, что их математическая модель и метод должны быть увязаны друг с другом. Поэтому, для их решения совершенно необходима разработка новых численных методов. Задачи, не удовлетворяющие условиям корректности, получили название некорректно поставленными и основы теории моделирования и решения таких задач были заложены в трудах академиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и член–корр. РАН В.К. Иванова.

Особенностью некорректно поставленных задач является низкая точность их решения, которая обусловлена не только математической моделью и методом, но и самим явлением.

Поэтому, главным критерием при разработке методов решения таких задач становится оценка их точности. Для этих целей в трудах известных математиков А.Л. Агеева, В.В. Арестова, А.Б. Бакушинского, Г.М. Вайникко, В.В. Васина, А.Р. Данилина, В.В. Иванова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева, А.С. Леонова, В.А. Морозова, В.Н. Страхова, В.П. Тананы, А.Н. Тихонова, А.М. Федотова, Г.В. Хромовой, А.Г. Яголы и др. разработана теория оценивания методов решения таких задач. Особое место среди методов некорректно поставленных задач занимают оптимальные, как самые точные, и близкие к ним оптимальные по порядку методы. Заметим, что при решении практических задач даже оптимальные методы не всегда выявляют особенности исследуемого явления. В таких случаях возникает необходимость в привлечении дополнительной априорной информации и в переопределении математической модели. Для работы с переопределенными системами необходима разработка новых численных методов.

Настоящая работа представляет собой продолжение исследований в этом направлении.

Цель работы.

Разработка методов регуляризации , исследование вопросов повышения их эффективности с помощью получения точных по порядку оценок погрешности этих методов и приложение их для решения обратных граничных задач теплообмена .

Численная реализация решения обратных граничных задач для уравнения теплопроводности.

Методы исследования. В работе используются методы математической физики и теории некорректных задач.

Научная новизна. Проведено аналитическое исследование для обоснования метода проекционной регуляризации применительно к решению обратных граничных задач для уравнения теплопроводности. Разработаны и обоснованы новые численные методы решения обратных граничных задач тепловой диагностики. На основе этих методов разработаны и реализованы на ЭВМ комплексы программ для решения обратных задач тепловой диагностики.

Теоретическая значимость. Разработана новая технология получения оценки погрешности при решении обратных граничных задач теплообмена. Получены точные оценки погрешности для методов проекционной регуляризации.

Практическая значимость. Основные результаты диссертационной работы имеют значение для строгого обоснования методов, используемых для решения обратных задач теплообмена.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на первой молодежной международной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач" (Новосибирск, 10–20 августа 2009 года), на второй молодежной международной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(Новосибирск, 21–29 сентября 2010 года), на восьмой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2009"(Казань, 1–6 ноября 2009 года), на "Первой конференции аспирантов ЮУрГУ"(апрель 2009 года), а также на научных семинарах кафедры вычислительной математики ЮУрГУ , научном семинаре кафедры вычислительной математики ЧелГУ, в Институте Математики и Механики УРО РАН на семинаре член-корр. РАН В.В. Васина.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–10], список которых приведен в конце автореферата. Статья [1] опубликована в научном журнале "Сибирский журнал индустриальной математики статья [2] опубликована в научном журнале "Труды Института Математики и Механики УрО РАН" , статья [3] опубликована в научном журнале "Системы управления и информационные технологии" , включенных ВАК в перечень журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, изложена на 146 страницах. Библиографический список содержит 157 наименований.

Содержание работы

Во введении приводится обоснование актуальности выбранной области исследования, сделан краткий обзор результатов, полученных другими авторами в области некорректных задач. Излагаются основные результаты диссертации.

В главе 1 рассмотрена задача вычисления значений неограниченного оператора T

$$Tf = u, \tag{1}$$

где $f \in \mathbb{F}$, $u \in \mathbb{U}$, $T : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{U}$, а $\mathbb{U}$ и $\mathbb{F}$ гильбертовы пространства.

Определение 1. Множество $M \subset \mathbb{U}$ будем называть классом корректности для задачи (1) , если сужение оператора T на множество $T^{-1}(M)$ равномерно непрерывно.

Предположим, что при $f = f_0$ элемент $u_0 = Tf_0$ принадлежит множеству M, но точное значение f_0 нам не известно, а вместо него даны элемент $f_\delta \in \mathbb{F}$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие,что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Требуется по исходным данным задачи M, f_δ и δ определить приближенное значение $u_\delta \in \mathbb{U}$ оператора T и оценить его уклонение $\|u_\delta - u_0\|$ на множестве M.

В дальнейшем предполагается, что $M = M_r$,

$$M_r = \{u : u \in R(T) \cap D(L), \|Lu\| \leqslant r\},$$

где $L-$ инъективный линейный неограниченный оператор, действующий из пространства $\mathbb{U}$ в гильбертово пространство $\mathbb{V}$, $D(L)-$ область определения оператора L, а $R(T)-$ множество значений оператора T, $r-$ известное число.

Определение 2. Семейство $\{ T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0 \}$ линейных ограниченных операторов T_δ, отображающих пространство $\mathbb{F}$ в $\mathbb{U}$, будем называть методом решения задачи (1), если

$$\Delta_\delta[T_\delta] \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

где $\Delta_\delta[T_\delta] = \sup\{\|T_\delta f_\delta - Tf_0\| : f_0 \in T^{-1}(M_r), \|f_\delta - f_0\| \le \delta\}$.

Один из способов задания метода заключается в использовании регуляризующего семейства $\{T_\alpha \ : \ \alpha > 0\}$.

Обозначим через $B[\mathbb{F}, \mathbb{U}]$ пространство линейных ограниченных операторов, отображающих $\mathbb{F}$ в $\mathbb{U}$, а через Δ_δ^{opt} величину

$$\Delta_\delta^{opt} = \inf\{\Delta_\delta[P] \ : \ P \in B[\mathbb{F}, \mathbb{U}]\},$$

где $\quad \Delta_\delta[P] = \sup\{\|Tf_0 - Pf_\delta\| \ : \ f_0 \in T^{-1}(M_r), \ \|f_\delta - f_0\| \le \delta\}$.

Определение 3. Метод $\{ \overline{T}_\delta : 0 < \delta \le \delta_0 \}$ будем называть оптимальным по порядку на классе M_r, если существует число c такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\Delta_\delta[\overline{T}_\delta] \le c\Delta_\delta^{opt}.$$

В параграфе 1.3 дано аналитическое исследование модели, описываемой уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ 0 < x < 1, \ t > 0, \tag{2}$$

решение $u(x,t)$ которого определено и непрерывно в замкнутой полосе $[0,1] \times [0,\infty)$ и удовлетворяет следующим начальному и граничным условиям

$$u(x,0) = 0; \qquad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$u(0,t) = h(t); \qquad t \ge 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \kappa u(1,t) = 0; \ \ \kappa > 0, \ t \ge 0, \tag{5}$$

где

$$h(t) \in C^2[0,\infty), \ \ h(0) = h'(0) = 0 \tag{6}$$

и существует число $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \ge t_0$:

$$h(t) = 0. \tag{7}$$

Решение задачи (2)–(5) существует, единственно и для него справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(t) \in C[0,\infty)$ и ограничена на этой полупрямой. Тогда справедливы соотношения*

$$\int_0^\infty u'_x(x,t)\Phi(t)dt = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty u(x,t)\Phi(t)dt\right]$$

и

$$\int_0^\infty u''_{xx}(x,t)\Phi(t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int_0^\infty u(x,t)\Phi(t)dt\right].$$

В параграфе 1.5 методом, предложенным в [1], дано решение задачи восстановления непрерывной функции, заданной со среднеквадратичной погрешностью.

Глава 2 посвящена решению обратных граничных задач для уравнения теплопроводности.

В параграфе 2.1 рассмотрена обратная граничная задача для уравнения теплопроводности (2)–(4), в которой функция $h(t)$ не известна и подлежит определению, а вместо нее в точке $x_1 \in (0,1)$ измеряется температура $f(t)$ стержня, соответствующая данному процессу.

$$u(x_1, t) = f_0(t); \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Пусть множество M_r определено формулой

$$M_r = \left\{ h(t) \ : \ h(t) \in L_2[0,\infty), \ \int_0^\infty |h(t)|^2 dt + \int_0^\infty |h'(t)|^2 dt \leq r^2 \right\}. \tag{9}$$

Тогда предположим , что при $f(t) = f_0(t)$, участвующем в условии (8), существует функция $h_0(t)$, принадлежащая множеству M_r, но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in L_2[0,\infty) \bigcap L_1[0,\infty)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\| \leq \delta. \tag{10}$$

Требуется, используя исходные данные задачи $f_\delta(t)$, δ и M_r, определить приближенное значение $h_\delta(t)$ задачи (2)–(5), (8) и оценить уклонение $\|h_\delta - h_0\|_{L_2[0,\infty)}$.

Пусть $\overline{H} = L_2[0,\infty) + iL_2[0,\infty)$, а F оператор, отображающий $L_2[0,\infty)$ в $\overline{H}$, и определяемый формулой

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty h(t) e^{-i\tau t} dt; \quad \tau \geq 0. \tag{11}$$

1. Васин В.В. Регуляризация задачи численного дифференцирования // Математические записки. 1969. Т.7. № 2. С. 29–33.

Из теоремы Planшереля следует изометричность оператора F, а из теоремы 1 применимость его к решению задачи (2)–(5), (8).

Таким образом, задачу (2)–(5), (8) сведем к задаче вычисления значений неограниченного оператора T

$$T\hat{f}(\tau) = \hat{h}(\tau), \quad \tau \geq 0. \tag{12}$$

где $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$, $\hat{h}(\tau) = F[h(t)]$, а

$$T\ \hat{f}(\tau) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa \operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + (\mu_0\sqrt{\tau})^{-1}\kappa \operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\hat{f}(\tau).$$

Из (10) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta(\tau) - \hat{f}_0(\tau)\| \ \leq \ \delta. \tag{13}$$

Из (9) следует, что при $\hat{f}(\tau) = \hat{f}_0(\tau)$ существует точное решение $\hat{h}_0(\tau)$ задачи (11), которое принадлежит множеству $\hat{M}_r$, определяемому формулой

$$\hat{M}_r = \{\hat{h}(\tau)\ :\ \hat{h}(\tau) \in \overline{H},\ \int_0^\infty (1+\tau^2)|\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \leq r^2\}. \tag{14}$$

Требуется, используя $\hat{f}_\delta(\tau)$, δ и $\hat{M}_r$, определить приближенное решение $\hat{h}_\delta(\tau)$ задачи (12), (13) и оценить уклонение $\|\hat{h}_\delta - \hat{h}_0\|$. Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha\}$, $\alpha > 0$

$$T_\alpha \hat{f}(\tau) = \begin{cases} T\hat{f}(\tau)\ ; & \tau \leq \alpha, \\ 0 \quad ; & \tau > \alpha. \end{cases} \tag{15}$$

В качестве приближенного решения задачи (12), (13) возьмем элемент $\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha \hat{f}_\delta(\tau)$, в котором параметр регуляризации $\alpha(\delta, r)$ определим из уравнения

$$\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2}} = e^{x_1\sqrt{\alpha/2}}\delta\ . \tag{16}$$

Заметим, что метод $\{T_{\alpha(\delta,r)}\ :\ 0 < \delta \leq \delta_0\}$, определяемый формулами (15) и (16), является методом проекционной регуляризации, предложенным в [2].

В главе 2 доказаны теоремы.

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ справедливы оценки*

$$\frac{\sqrt{2}(1-\varepsilon)r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta,r)}} \leq \Delta_\delta[T_{\alpha(\delta,r)}] \leq \frac{\sqrt{2}(1+\varepsilon)r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta,r)}},$$

где метод $\{T_{\alpha(\delta,r)}\ :\ 0 < \delta \leq \delta_\varepsilon\}$ определен формулой (15), (16).

Теорема 3. *Метод $\{T_{\alpha(\delta,r)}\ :\ 0 < \delta \leq \delta_\varepsilon\}$, решения задачи* (12), (13) *и, определяемый формулами* (15) , (16) *оптимален по порядку на классе $\hat{M}_r$ и для него справедлива оценка погрешности*

$$\Delta_\delta[T_{\alpha(\delta,r)}] \leq \sqrt{2}\ (1+\varepsilon)\ \Delta_\delta^{opt}.$$

Получены асимптотические оценки.

Теорема 4. *Для любого $r > 0$ существуют числа $c_1(r),\ c_2(r) > 0$ и $\delta_1 < 1$ такие, что для любого $\delta \in (0, \delta_1)$ справедливы оценки*

$$c_1(r)\ln^2\delta \leq \sqrt{1+\alpha^2(\delta,r)} \leq c_2(r)\ln^2\delta.$$

Рассмотрим пространство $\overline{H}_0 = F[L_2[0,\infty)]$, где F преобразование Фурье, определяемое формулой (11), и через $\overline{h}_\delta(\tau)$ обозначим элемент, определяемый формулой

$$\overline{h}_\delta(\tau) = pr[\hat{h}_\delta(\tau); \overline{H}_0].$$

2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения// М.: Наука, 1978. 208 с.

Окончательно, решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (2)–(5), (8) **определим** формулой

$$h_\delta(t) = \begin{cases} F^{-1}[\overline{h}_\delta(\tau)] \ ; & t \in [0, t_0], \\ 0 \quad ; & 0 < t, \ t > t_0. \end{cases}$$

При достаточно малом значении δ справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2} \le \sqrt{2}(1+\varepsilon)\frac{r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta, r)}}. \tag{17}$$

Используя метод, изложенный в параграфе 1.5, среднеквадратичное приближение $h_\delta(t)$ решения задачи (2)–(5), (8) преобразуем в равномерное $z_\delta(t)$ и получим равномерную оценку погрешности.

Для этого используем регуляризующее семейство операторов $\{P_\beta \ : \ \beta > 0\}$, определяемое формулой

$$P_\beta h(t) = \int_0^{t_0} h(t)\omega_\beta(t-\tau)d\tau, \quad h(t) \in L_2[0, t_0],$$

$$\omega_\beta(t) = \frac{1}{\beta}\omega\left(\frac{|t|}{\beta}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

а

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0 \quad , & |t| \ge 1, \end{cases}$$

где $\gamma = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}dt.$

Равномерное приближение $z_\delta(t)$ задачи (2)–(5), (8) определим **формулой**

$$z_\delta(t) = P_{\beta(\delta)}h_\delta(t); \quad t \in [0, t_0],$$

где

$$\beta(\delta) = \frac{\sqrt{2}\mu(\delta)}{e\gamma r}, \quad \text{а} \quad \mu(\delta) = \frac{2r}{\sqrt{1+\alpha^2(\delta, r)}}.$$

Справедлива равномерная оценка

$$\|z_\delta(t) - h_0(t)\|_{C[0,t_0]} \le \frac{2^{\frac{3}{4}}\, r}{\sqrt{e\gamma}[1+\alpha^2(\delta, r)]^{\frac{1}{4}}},$$

где $\alpha(\delta, r)$ является решением уравнения (16).

В параграфе 2.2 обобщенным методом проекционной регуляризации, разработанным и обоснованным в работе [3] решена переопределенная обратная граничная задача для уравнения теплопроводности.

Приведем постановку этой задачи.

Пусть тепловой процесс описывается соотношениями (2)–(5). Причем, в формуле (4) функция $h(t)$ не известна и подлежит определению, а в (5) число κ также не известно.

Рассмотрим множество $M_r \subset L_2[0,\infty)$ и определяемое формулой

$$M_r = \{h(t) \ : \ h(t) \in L_2[0,\infty); \ \int_0^\infty h^2(t)dt + \int_0^\infty [h'(t)]^2 dt \le r^2\}.$$

Будем предполагать, что искомая функция $h(t)$, используемая в (4) удовлетворяет условию

$$h(t) \in M_r. \tag{18}$$

Предположим, что при $f_0(t)$ и $g_0(t)$ существует функция $h_0(t)$, удовлетворяющая условиям (6), (7) и (18) и такая, что при $h(t) = h_0(t)$ существует решение $u(x,t)$ задачи (2)–(5), удовлетворяющее условиям

$$u(x_1,t) = f_0(t) \ \text{ и } \ u(x_2,t) = g_0(t); \ 0 < x_1 < x_2 < 1, \ t \ge 0, \tag{19}$$

но эти функции нам не известны, а вместо них даны некоторые функции $f_\delta(t)$, $g_\delta(t) \in L_2[0,\infty) \bigcap L_1[0,\infty)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\|^2_{L_2[0,\infty)} + \|g_\delta(t) - g_0(t)\|^2_{L_2[0,\infty)} \le \delta^2. \tag{20}$$

Требуется, используя исходные данные задачи x_1, x_2, δ, r, $f_\delta(t)$ и $g_\delta(t)$ определить приближенное значение $h_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,\infty)}$ от точного значения $h_0(t)$.

3. Танана В.П., Сидикова А. И. Об оптимальности по порядку одного метода вычисления значений неограниченного оператора и его приложения // Сиб. журн. индустр. матем. 2009. Т.12. № 3(39). С.125–135.

Применяя преобразование F, определяемое формулой (11), сведем задачу (2)–(5), (18)–(20) к задаче вычисления значений линейного неограниченного оператора T, действующего из пространства $\overline{H} \times \overline{H}$ в $\overline{H}$

$$\hat{h}(\tau) = T[\hat{f}(\tau), \hat{g}(\tau)] = \frac{\hat{f}(\tau)\,\mathrm{sh}\,\mu_0 x_2\sqrt{\tau} - \hat{g}(\tau)\,\mathrm{sh}\,\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}{\mathrm{sh}\,\mu_0(x_2 - x_1)\sqrt{\tau}}, \tag{21}$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$ и $\hat{g}(\tau) = F[g(t)]$.

Из (19) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta(\tau) - \hat{f}_0(\tau)\|^2 + \|\hat{g}_\delta(\tau) - \hat{g}_0(\tau)\|^2 \le \delta^2, \tag{22}$$

а из (18), что при $\hat{f}(\tau) = \hat{f}_0(\tau)$ и $\hat{g}(\tau) = \hat{g}_0(\tau)$ существует точное решение $\hat{h}_0(\tau)$ задачи (21), которое принадлежит множеству $\hat{M}_r$, определяемому (14).

Требуется, используя $\hat{f}_\delta(\tau)$, $\hat{g}_\delta(\tau)$, δ и $\hat{M}_r$ определить приближенное решение $\hat{h}_\delta(\tau)$ задачи (21), (22) и оценить уклонение $\|\hat{h}_\delta - \hat{h}_0\|$.

Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha \ : \alpha > 0\}$

$$T_\alpha[\hat{f}(\tau), \hat{g}(\tau)] = \begin{cases} T[\hat{f}(\tau), \hat{g}(\tau)]; & \tau \le \alpha, \\ 0 \quad , & \tau > \alpha. \end{cases} \tag{23}$$

В качестве приближенного решения (21), (22) возьмем элемент $\hat{h}^\alpha_\delta(\tau) = T_\alpha[\hat{f}_\delta(\tau), \hat{g}_\delta(\tau)]$, в котором параметр регуляризации $\overline{\alpha}(\delta, r)$ определим из уравнения

$$\sqrt{1+\alpha^2}\,e^{x_2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{r}{c\delta}, \tag{24}$$

где c— некоторая константа.

Заметим, что метод $\{T_{\overline{\alpha}(\delta,r)} \ : \ 0 < \delta \le \delta_0\}$ является обобщенным методом проекционной регуляризации, предложенным в [3].

Для этого метода справедлива оценка

$$\Delta_\delta[T_{\overline{\alpha}(\delta,r)}] \le c\ln^{-2}\delta.$$

Теперь обозначим через $\overline{h}_\delta(\tau)$ элемент, определяемый формулой

$$\overline{h}_\delta(\tau) = pr[\hat{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta,r)}(\tau); \overline{H}_0],$$

где $\overline{H}_0$ определено ранее.

Окончательное решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (2)–(5), (18)–(20) определим формулой

$$h_\delta(t) = \begin{cases} F^{-1}[\overline{h}_\delta(\tau)]; & t \in [0, t_0], \\ \quad 0 \quad ; & 0 < t, \quad t > t_0. \end{cases}$$

Для приближенного решения $h_\delta(t)$ справедлива оценка

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\| \leq c \ln^{-2} \delta.$$

Используя метод, изложенный в параграфе 1.5 среднеквадратичное приближение $h_\delta(t)$ решения задачи (2)–(5), (18)–(20) преобразуем в равномерное и получим равномерную оценку погрешности.

В **главе 3** приведено численное решение обратных граничных задач для уравнения теплопроводности в среде программирования Borland C++ (Builder 6), описанных во второй главе работы.

На основе метода проекционной регуляризации разработан алгоритм для решения обратной граничной задачи (2)–(4), (8)–(10)

Описание алгоритма

Исходные данные:

$$r, \quad x_1, \quad T, \quad \overline{t}_0, \quad \kappa \in (0, \frac{1}{2}], \quad 0 = t_0, t_1, t_2, ..., t_n = T, \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t,$$

$$\overline{f}_i = f_\delta(t_i), \quad \widetilde{\delta}\%, \quad x_1 \in (0,1), \quad \overline{t}_0 \in (0, T).$$

1. По $\widetilde{\delta}\%$ вычисляем среднеквадратичную погрешность δ, используя формулу

$$\delta^2 = \frac{\Delta t}{100^2} \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\delta}^2 \cdot \overline{f}_i^2.$$

2. Функцию $f_\delta(t)$ продолжаем на всю прямую $(-\infty,\infty)$, используя формулу

$$f_\delta(t)=\begin{cases}\overline{f}_i\ ; & t_{i-1}\le t\le t_i,\\ 0\ ; & t<0 \text{ и } t>T.\end{cases}$$

3. Применяя преобразование Фурье F, преобразуем $f_\delta(t)$ в

$$\hat{f}_\delta(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f_\delta(t)e^{-it\tau}dt\ ; & \tau\ge 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f_\delta(t)e^{-it|\tau|}dt\ ; & \tau<0.\end{cases}$$

4. Решая уравнение (16) определяем $\overline{\alpha}(\delta)$.

5. Определяем $\hat{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}$, используя формулу

$$\hat{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\tau)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\mu_0\sqrt{\tau}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\tau}+\kappa\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\tau}}{\mu_0\sqrt{\tau}\operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}+\kappa\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}}\hat{f}_\delta(\tau), & 0\le\tau\le\overline{\alpha}(\delta),\\ \dfrac{\overline{\mu}_0\sqrt{|\tau|}\operatorname{ch}\overline{\mu}_0\sqrt{|\tau|}+\kappa\operatorname{sh}\overline{\mu}_0\sqrt{|\tau|}}{\overline{\mu}_0\sqrt{|\tau|}\operatorname{ch}\overline{\mu}_0(1-x_1)\sqrt{|\tau|}+\kappa\operatorname{sh}\overline{\mu}_0(1-x_1)\sqrt{|\tau|}}\hat{f}_\delta(\tau), & -\overline{\alpha}(\delta)\le\tau<0,\\ 0\qquad , & |\tau|>\overline{\alpha}(\delta),\end{cases}$$

6. Применяем обратное преобразование Фурье F^{-1}, получаем

$$\overline{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(t)=F^{-1}[\hat{h}^{\overline{\alpha}(\delta)}(\tau)].$$

7. Получение приближенного решения $h_\delta(t)$ обратной граничной задачи (2)–(4), (8)–(10)

$$h_\delta(t)=\begin{cases}Re[\overline{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(t)]; & 0\le t\le\overline{t}_0,\\ 0\quad , & t<0,\ t>\overline{t}_0,\end{cases}$$

Контрольный пример

Для проверки алгоритма численного решения обратной граничной задачи, описанного выше, исследуем его на модельном примере

$$h_0(t)=\begin{cases}-20\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+5; & \text{при } t\in[0,1],\\ 0; & \text{при } t\in(1,\infty),\end{cases}\tag{25}$$

Решая прямую задачу (2) – (5) методом разделения переменных при $h(t) = h_0(t)$, $\kappa = 0.1$, $x_1 = 0.1$, $\bar{t}_0 = 1$, $T = 20$ и $r = 4$ получим, что

$$f_0(t) = u(x_1, t),$$

где

$$u(x,t) = v(x,t) + \left[1 - \frac{\kappa}{1+\kappa}x\right] h_0(t),$$

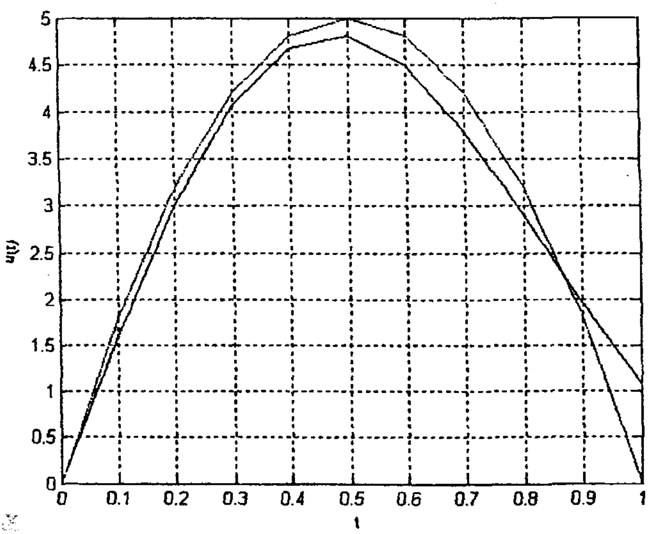
$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \cdot \sin \lambda_n x,$$

где λ_n – положительные решения уравнения $\operatorname{tg} \lambda = -\frac{\lambda}{\kappa}$, а

$$v_n(t) = -\frac{8}{2\lambda_n^3 - \lambda_n^2 \sin 2\lambda_n} \cdot \left[h_0'(t) - \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} h_0''(\tau) d\tau\right].$$

Полагая, что относительная погрешность $\tilde{\delta} = 1\%$, вносимая в исходные данные $f_0(t)$ с помощью генератора случайных чисел, определяем $f_\delta(t)$. Затем, используя алгоритм, описанный выше, находим $h_\delta(t)$.

На рисунке изображен график точного и приближенного решения задачи



$\widetilde{\delta} = 1\%$– погрешность исходных данных.

Аналогичным образом, на основе обобщенного метода проекционной регуляризации разработан алгоритм численного решения переопределенной обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности, который опробован на том же модельном примере.

Основные результаты диссертационной работы

На защиту выносятся следующие новые научные результаты

1. Разработан и обоснован метод проекционной регуляризации применительно к решению обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности. Получены точные оценки погрешности этого метода.

2. Разработан и обоснован обобщенный метод проекционной регуляризации применительно к решению переопределенной обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности.

3. Разработан метод перехода от среднеквадратичного приближения решения обратных граничных задач к равномерному приближению.

4. Проведено тестирование методов, разработанных в данной работе на модельных примерах обратных граничных задач тепловой диагностики с применением ЭВМ.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в научных журналах из списка ВАК

1. Танана В.П., Сидикова А.И. Об оптимальности по порядку одного метода вычисления значений неограниченного оператора и его приложения // Сиб. журн. индустр. матем. 2009. Т. 12. № 3(39). С. 125–135.

2. Танана В.П., Сидикова А.И. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 2. С. 1–15.

3. Сидикова А.И. О приближенном решении одной обратной задачи тепловой диагностики // Системы управления и информационные технологии. 2010. № 1.1(39). С. 187–190.

Другие публикации

4. Танана В.П., Сидикова А.И. О приближенном решении одной обратной задачи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2008. Вып. 1. № 15(115). С. 81–88.

5. Танана В.П., Сидикова А.И. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики в неоднородной среде // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2009. Вып. 1. № 17(150). С. 104–115.

6. Сидикова А.И. Об оценке точности приближенного решения одной обратной граничной задачи для параболического уравнения // Известия ЧНЦ УрО РАН. 2008. Вып. 3(41). URL: http://csc.ac.ru/ej/issue/ru.

7. Сидикова А.И. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратной задачи тепловой диагностики // Известия ЧНЦ УрО РАН. 2009. Вып. 4(46). URL: http://csc.ac.ru/ej/issue/ru.

8. Сидикова А.И. Об оценке погрешности приближенного решения одной переопределенной задачи тепловой диагностики // Известия ЧНЦ УрО РАН. 2010. Вып. 1. URL: http://csc.ac.ru/ej/issue/ru.

9. Танана В.П., Сидикова А.И. Об оценке точности решения задачи тепловой диагностики в неоднородной среде // Тез. Межд. школы-конф. "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". Новосибирск. 2009. С. 102.

10. Сидикова А.И. Об одном обобщении метода проекционной регуляризации // Тез. восьмой молодежной научной школы-конф. "Лобачевские чтения-2009". Казань. 2009. Т.39. С. 337.