На правах рукописи

Гильмутдинова Альбина Фаритовна

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ФЕНОМЕНОМ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2009

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Свиридюк Георгий Анатольевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Кадченко Сергей Иванович

доктор физико-математических наук,
доцент Сукачева Тамара Геннадьевна

Ведущая организация:

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 11 февраля 2009 года в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан 31 декабря 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Л. Б. Соколинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цели и задачи работы. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В области $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \nabla^2)(u(x,0) - u_0(x)) = 0,\ x \in \Omega; \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}; \tag{2}$$

для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова (КПС)

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \alpha\nabla^2 u + \beta(\nabla, u\nabla u). \tag{3}$$

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(x,0) = v_0(x),\ x \in \Omega; \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \lambda v\right)(x,t) = \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \lambda w\right)(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+; \tag{5}$$

для системы уравнений Плотникова

$$v_t = \Delta v - \Delta w,\ 0 = v + \Delta w + \delta w - \beta w^3. \tag{6}$$

Уравнение (3) моделирует метастабильные процессы в жидком двухкомпонентном полупроводнике. Параметры $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства полупроводника, причем квазистационарные процессы в полупроводниках возможны только при условии отрицательности коэффициента λ. Именно в данном случае возможен пробой полупроводника, наблюдаемый экспериментально. Впервые уравнение (3) было получено в работе М.О. Корпусова, Ю.Д. Плетнера, А.Г. Свешникова[1]. Здесь же была установлена однозначная разрешимость задачи (1)-(3) только в случае положительности параметра

[1] *Корпусов, М. О.* О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии /Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.// ЖВМиМФ.– 2000.– Т. 4, v8.– С. 1237-1249.

λ, что влечет обратимость дифференциального оператора при производной по времени в уравнении КПС. Нашей **целью** является качественное и численное исследование данной начально-краевой задачи при любых (в том числе и отрицательных) значениях параметра λ.

Система уравнений (6) представляет один из вариантов модели фазового поля в рамках мезоскопической теории в предположении, что время релаксации равно нулю. Параметры β и δ характеризуют фазовый переход. Содержание и знак параметра $\beta \in \mathbb{R}$ в дальнейшем несущественны, главное, что $\beta \neq 0$. Систему уравнений (6) впервые построил, глубоко и обстоятельно изучал П.И. Плотников с учениками[2]. В цитированных работах установлено существование решения задачи (4)-(6), и поставлен вопрос о его единственности. Нашей **целью** является качественное и численное исследование разрешимости задачи (4)-(6) и единственности ее решения при различных значениях параметра δ. Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**. Первая – исследовать морфологию фазовых пространств задач (1)-(3), (4)-(6). Вторая – получить условия неединственности решений поставленных задач. Третья – провести численные эксперименты, иллюстрирующие феномен неединственности решений данных задач.

Качественное исследование задач (1)-(3) и (4)-(6) облегчается тем обстоятельством, что они обе в подходящим образом подобранных банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ редуцируются к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$L(u(0) - u_0) = 0, \tag{7}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{8}$$

[2] *Плотников П. И.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П. И. Плотников , В. Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения.– 1993.– Т. 29, № 3.– С. 461-471.

Плотников П. И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П. И. Плотников , А. В. Клепачева // Сиб. матем. журн.– 2001.– Т. 42, № 3.– С. 651-669.

Актуальность темы. Впервые уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, появились в работе А. Пуанкаре в 1885 году. Первым, кто начал систематическое изучение начально-краевых задач для линейных уравнений вида (8), где L и M (возможно, матричные) дифференциальные операторы в частных производных по "пространственным" переменным, а оператор $N = \mathbb{O}$, был С. Л. Соболев в 40-х годах прошлого столетия. С тех пор возникла традиция уравнения вида (8) и конкретные их интерпретации вида (3), (6) называть *уравнениями соболевского типа.* В настоящее время теория уравнений соболевского типа переживает пору бурного расцвета. В этой области активно работают Р.Е. Шоуолтер, Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, Н.В. Сидоров, Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков, И.В. Мельникова, Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров и многие другие. Данная диссертационная работа выполнена в рамках направления, возглавляемого Г.А. Свиридюком.

Методы исследования. Основным методом исследования полулинейных уравнений соболевского типа в данной диссертации служит метод фазового пространства, предложенный Г. А. Свиридюком и Т. Г. Сукачевой. Вкратце суть этого метода заключается в редукции уравнения (8), где, возможно, $\ker L \neq \{0\}$, к регулярному уравнению

$$\dot{u} = Su + F(u), \tag{9}$$

определенному, однако, не на всем пространстве $\mathfrak{U}$, а только на некотором его подмножестве, понимаемом как *фазовое пространство уравнения* (8). Применив описанный выше метод *фазового пространства* к моделям (3) и (6), нам удалось установить неединственность решения задачи (7), (8). Кроме метода фазового пространства мы широко используем теорию линейных уравнений соболевского типа и порождаемых ими вырожденных групп и полугрупп операторов; теорему о неявной функции и теорему Вишика – Минти – Браудера; теорему Коши как для случая векторных полей на банаховых многообразиях, так и для случая полулинейных эволюционных уравнений в банаховых пространствах. И, наконец, красной нитью через всю диссертацию проходит идеология теории особенностей Уитни. Поскольку диссертация кроме качественных исследований содержит еще и результаты численных экспериментов, подтверждающих феномен неединственности решения моделей (3) и (6), необходимо отметить метод Галеркина, лежащий в основе наших экспериментов.

Научная новизна. Все результаты, выносимую на защиту, являются новыми и получены автором лично. Достоверность полученных результатов обеспечена полными доказательствами всех утверждений, причем математическая строгость доказательств соответствует современному уровню. Обоснованность научных положений и выводов, сформулированных в диссертации, подкрепляется разработкой программ, основанных на подходе, предлагаемом автором.

Теоретическая значимость. Основное содержание диссертации – качественное исследование морфологии фазовых пространств уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова и системы уравнений Плотникова. Впервые обнаружено, что фазовые пространства (при некоторых критических значениях параметров) расположены на многообразиях, имеющих особенности – складку и сборку Уитни соответственно. Установлена связь между наличием особенностей и единственностью решений физически осмысленной задачи Шоуолтера – Сидорова, т.е. отмечены области начальных данных, при которых задача имеет одно, два или три решения.

Практическая значимость. Практическая же значимость заключается в том, что данные результаты учитываются при проведении численных экспериментов. Впервые разработаны алгоритмы численного решения задач (1)-(3), (4)-(6), получены графические изображения этих решений. Построенные алгоритмы реализованы в вичислительной среде Maple 12.0. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых по данной тематике.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации были представлены на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы"(Воронеж, 2005), студенческой конференции ЧелГУ в 2005 году (г. Челябинск), Всероссийской научной конференции "Математика. Механика. Информатика посвященной тридцатилетию ЧелГУ (г. Челябинск, 2006), Всероссийской научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"(г. Самара, 2007), Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения И.Н. Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения"(г. Новосибирск, 2007), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"(г. Стерлитамак, 2008), Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений"(г. Новосибирск, 2008). Также результаты докладывались на семинаре по уравнениям соболевского типа профессора Г. А. Свиридюка в ЮУрГУ (г. Челябинск) и на семинаре чл.-корр. РАН И.А. Шишмарева в МГУ им. М.В. Ломоносова.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, причем статья [1] – в издании, включенном в перечень ВАК. В работах [1], [10], выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит только постановка задачи. Все доказательства выполнены автором диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 123 страницы. Библиография содержит 101 наименование.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определяется цель работы, дается обзор литературы по исследуемой проблематике.

Первая глава состоит из семи параграфов и содержит формулировки теорем и определения, которые используются для получения основных результатов диссертации. Первый параграф содержит определения и теоремы об относительно p - ограниченных операторах. Во втором параграфе вводятся определения решения, фазового пространства, аналитических разрешающих полугрупп и групп операторов, теоремы о существовании аналитических разрешающих полугрупп и групп операторов для линейных уравнений вида (8), а также определения и теоремы об относительно p - секториальных операторах. В третьем параграфе содержатся определение решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения (8) и теорема существования и единственности решения обобщенной задачи Шоуолтера-Сидорова для уравнения (8). В четвертом параграфе рассматриваются определения карты, атласа, банахова C^k - многообразия, касательного расслоения C^k - многообразия, векторного поля и теорема Коши. В пятом параграфе определяются пространства Соболева, пространства с негативной и позитивной нормами и приводятся теоремы вложения Соболева и Кондрашова – Реллиха. В шестом параграфе приводятся две теоремы вложения, вводятся определение решения задачи Коши для полулинейного эволюционного уравнения и теорема существования и единственности этого решения. Седьмой параграф содержит определения радиально непрерывного, монотонного, коэрцитивного оператора, теорему Вишика – Минти – Браудера, определение и свойства производной Фреше, теорему о неявной функции, а также определение k - сборки Уитни.

Вторая глава состоит из шести параграфов и посвящена вопросам несуществования и неединственности решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова. В **п. 2.1** вводятся понятия решения задачи Коши для уравнения соболевского типа (8), фазового пространства, квазистационарной траектории уравнения (8), проходящей через точку u_0 и доказывается теорема существования и единственности квазистационарной траектории уравнения (8), проходящей через точку u_0. В **п. 2.2** содержится определение решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения (8), доказаны теоремы существования и единственности задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения (8) в случае тривиального и нетривиального ядер оператора L, но простого фазового пространства, а также разобран пример в случае непростого фазового пространства. В **п. 2.3** рассмотрена краевая задача

$$u(a,t) = u(b,t) = 0,\ t \in \mathbb{R} \tag{10}$$

для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова

$$\lambda u_t - u_{txx} = \alpha u_{xx} + \beta(uu_x)_x. \tag{11}$$

Чтобы редуцировать задачу (10), (11) к уравнению (8) возьмем пространства $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{W}{}^1_2$, $\mathfrak{F} = W_2^{-1}$. Пространство $\mathfrak{F}$ сопряжено к $\mathfrak{U}$ относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ из L_2. Операторы L и M определим формулами

$$< Lu, v >= \int_a^b (\lambda uv + u_x v_x) dx, \; < Mu, v >= -\int_a^b \alpha u_x v_x dx,$$

где $u, v \in \mathfrak{U}$. По построению операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и фредгольмовы.

Теорема 1 *Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ занумерованные по невозрастанию множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на (a, b), а через $\{\varphi_k\}$–ортонормированное в смысле L_2 множество соответствующих собственных функций. Определим оператор N формулой

$$< N(u), v >= -\int_a^b \beta u u_x v_x dx, \; u, v \in \mathfrak{U}.$$

Теорема 2 *При любых $\beta \in \mathbb{R}$ оператор N принадлежит пространству $C^\infty(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.*

В **п. 2.4** исследуется морфология фазового пространства уравнения КПС. Построим L - спектр оператора M

$$\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : \; k \in \mathbb{N} \backslash \{l : \; \lambda = \lambda_l\} \right\}.$$

Проекторы имеют вид

$$P = \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l, \quad Q = \dot{\mathbb{I}} - \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l.$$

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle (Mu + N(u)), \varphi_l \rangle = 0, \ \lambda = \lambda_l\}$$

и пространства

$$\mathfrak{U}^0 = \ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l : \ \lambda = \lambda_l\}, \ \mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l \rangle = 0, \ \lambda = \lambda_l\}.$$

Возьмем произвольную точку $u \in \mathfrak{U}$, тогда $u = a\varphi_l + v$, где $v = Pu \in \mathfrak{U}^1$, $a \in \mathbb{R}$. Точка $u \in \mathfrak{M}$ точно тогда, когда выполнено

$$\frac{a^2}{2}\|\varphi_l\|^3_{L_3} + a\left(\int\limits_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_a^b v^2\varphi_l dx = 0. \tag{12}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Delta(v) = (\int\limits_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta})^2 - \|\varphi_l\|^3_{L_3}\int\limits_a^b v^2\varphi_l dx,$$

$\Delta : \mathfrak{U}^1 \to \mathbb{R}$, и построим множества

$$\mathfrak{U}^1_+ = \{v \in \mathfrak{U}^1 : \Delta(v) > 0\}, \ \mathfrak{U}^1_- = \{v \in \mathfrak{U}^1 : \Delta(v) < 0\}.$$

Возьмем точку $v \in \mathfrak{U}^1_+$, тогда уравнение (12) имеет два решения

$$\begin{aligned} a_- &= \|\varphi_l\|^{-3}_{L_3}\left(-\tfrac{\alpha}{\beta} - \int\limits_a^b v\varphi_l^2 dx - \sqrt{\Delta(v)}\right), \\ a_+ &= \|\varphi_l\|^{-3}_{L_3}\left(-\tfrac{\alpha}{\beta} - \int\limits_a^b v\varphi_l^2 dx + \sqrt{\Delta(v)}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Построим множества

$$\mathfrak{M}_{+(-)} = \{u \in \mathfrak{U} : \ u = a_{+(-)}(v)\varphi_l + v, \ v \in \mathfrak{U}^1_+\}.$$

Теорема 3 *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *и*

(i) $\lambda \notin \{\lambda_k\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения* (8) *является все пространство* $\mathfrak{U}$.

(ii) $\lambda \in \{\lambda_k\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения* (8) *является множество* $\mathfrak{M}_+ \cup \mathfrak{M}_-$, *каждая компонента которого* $\mathfrak{M}_+$ *и* $\mathfrak{M}_-$ *биективно проектируется на множество* $\mathfrak{U}^1_+$.

В **п. 2.5** рассматривается задача Шоуолтера – **Сидорова** (7) для уравнения (8) и формулируется следующая

Теорема 4 *При любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *и*

(i) $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\lambda_k\}$ *существует ровно одно решение задачи* (7), (8) *при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$.

(ii) $\lambda \in \{\lambda_k\}$ *существует два различных решения задачи* (7), (8) *при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *таких, что* $Pu_0 \in \mathfrak{U}^1_+$.

(iii) $\lambda \in \{\lambda_k\}$ *не существует ни одного решения задачи* (7), (8) *при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *таких, что* $Pu_0 \in \mathfrak{U}^1_-$.

Пункт 2.6 содержит описание программы, разработанной в вычислительной среде Maple 12.0., которая, опираясь на метод Галеркина, позволяет находить приближенное численное решение задачи (1)-(3) и строит графическое изображение этого решения при различных значениях параметров, показывая нетривиальность фазового пространства.

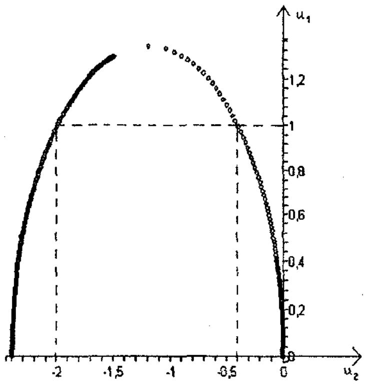

Рис.1 Фазовое пространство задачи (1)-(3) при $\alpha = 20$, $\beta = 25$, $\lambda = -1$, если $u(t,x) = u_1(t)\sqrt{2/\pi}\sin x + u_2(t)\sqrt{2/\pi}\sin 2x$

Третья глава состоит из пяти параграфов и посвящена вопросу неединственности решения задачи Шоуолтера-Сидорова для системы уравнений Плотникова. В **п.3.1** строятся интерполяционные пространства, вводятся определения квазистационарной полутраектории уравнения (8), проходящей через точку u_0, решения задачи Шоуолтера-Сидорова для уравнения (8), доказывается теорема существования и единственности квазистационарной полутраектории уравнения (8), проходящей через точку u_0 и теорема существования и единственности решения задачи Шоуолтера-Сидорова для уравнения (8). Также здесь построены два примера, один в случае простого фазового пространства, в другом – фазовое пространство представляет собой сборку Уитни. В **п.3.2** рассмотрена система уравнений Плотникова

$$v_t = v_{xx} - w_{xx},\ 0 = v + w_{xx} + \delta w - \beta w^3 \tag{14}$$

с краевыми условиями вида

$$(u_x - \lambda u)(a,t) = (u_x + \lambda u)(b,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{15}$$

где $u = col(v,w)$, $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $(x,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}_+$, параметры $\lambda, \delta \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}$. Чтобы редуцировать задачу (14), (15) к уравнению (8) положим $\mathfrak{U} = (L_2)^2$. Пространство $\mathfrak{U}$ – гильбертово со скалярным произведением $[u,\zeta] = \int\limits_a^b v\xi dx + \int\limits_a^b w\eta dx = (v,\xi) + (w,\eta)$, где $\zeta = col(\xi,\eta)$, а через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в L_2. Пусть $\mathfrak{F}$ пространство сопряженное к $\mathfrak{U}$ относительности двойственности $[\cdot,\cdot]$. Операторы L и M зададим формулами

$$[Lu,\zeta] = \int\limits_a^b v\xi dx,\ u,\zeta \in \mathfrak{U};$$

$$[Mu,\zeta] = -\int\limits_a^b v_x\xi_x dx - \lambda\left(v(a)\xi(a) + v(b)\xi(b)\right) + \int\limits_a^b w_x\xi_x dx +$$

$$\lambda\left(w(a)\xi(a) + w(b)\xi(b)\right) - \int\limits_a^b w_x\eta_x dx - \lambda\left(w(a)\eta(a) + w(b)\eta(b)\right),$$

$u,\zeta \in \mathfrak{U}_M$, $\mathrm{dom}\, M = \mathfrak{U}_M = (W_2^1)^2$.

Теорема 5 *Оператор M сильно $(L,0)$ - секториален.*

Построим оператор

$$[N(u),\zeta] = \int\limits_a^b (v+\delta w-\beta w^3)\eta dx$$

и положим $\operatorname{dom} N = (L_4)^2 = \mathfrak{U}_N$. В силу теорем вложения Соболева справедлива следующая

Теорема 6 *При любых $\beta,\delta\in\mathbb{R}$ оператор $N\in C^\infty(\mathfrak{U}_N;\mathfrak{F})$.*

Построим пространства $\mathfrak{U}^\alpha$.Получим, что при $\alpha\in(1/2,1]$ пространства $\mathfrak{U}^\alpha \hookrightarrow L_\infty$. Положим $\mathfrak{U}_1^0 = \mathfrak{U}^0\cap\mathfrak{U}_M = \{0\}\times W_2^1$ и возьмем $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}_1^0\oplus\mathfrak{U}_\alpha^1$, где $\mathfrak{U}_\alpha^1 = \mathfrak{U}^\alpha\times\{0\}$.

Следствие 1 *При любых $\beta,\delta\in\mathbb{R}$ оператор $N\in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$.*

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \{u\in\mathfrak{U}_\alpha : \int\limits_a^b v\eta dx = \int\limits_a^b (w_x\eta_x - \delta w\eta + \beta w^3\eta)dx +$$

$$+\lambda(w(a)\eta(a) + w(b)\eta(b))\}.$$

Введем в рассмотрение пространства $\mathfrak{V}_M = \mathfrak{W}_M = W_2^1$, так что теперь $\mathfrak{U}_M = \mathfrak{V}_M\times\mathfrak{W}_M$. Обозначим через $\{\nu_k\}$ занумерованные по неубыванию с учетом кратности собственные значения следующей спектральной задачи:

$$\begin{gathered} -\varphi_{xx} = \nu\varphi,\ x\in(a,b), \\ \varphi_x(a) = \lambda\varphi(a),\ \varphi_x(b) = -\lambda\varphi(b). \end{gathered} \tag{16}$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ соответствующие собственные функции, ортонормированные в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ из L_2.

Теорема 7 *Пусть $\beta, \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\delta \in (0, \nu_1)$, где ν_1 – первое собственное значение спектральной задачи* (16), $\alpha \in (1/2, 1)$. *Тогда фазовым пространством уравнения* (7) *служит простое банахово C^∞ - многообразие $\mathfrak{M}$.*

Теорема 8 *Пусть выполнены условия теоремы* 7. *Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}_\alpha$ существует единственное решение задачи* (4)-(6).

Теперь рассмотрим случай, когда $\delta = \nu_1$. В данном случае множество $\mathfrak{M}$ определяется системой из двух уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_a^b v^\perp \eta^\perp dx = \int\limits_a^b (w_x^\perp \eta_x^\perp - \nu_1 w^\perp \eta^\perp + \beta(w^\perp + s\varphi)^3 \eta^\perp) dx + \\ +\lambda(w^\perp(a)\eta^\perp(a) + w^\perp(b)\eta^\perp(b)), & (17) \\ \\ \beta^{-1} r = \int\limits_a^b (w^\perp + s\varphi)^3 \varphi dx. & (18) \end{cases}$$

Здесь числа $s, r \in \mathbb{R}$, а φ – собственная функция задачи (16), отвечающая собственному значению ν_1 и нормированная в смысле L_2; векторы $v^\perp \in \mathfrak{U}^{\alpha\perp}$, $w^\perp, \eta^\perp \in \mathfrak{W}_M^\perp$, где $\mathfrak{U}^{\alpha\perp} = \{v \in \mathfrak{U}^\alpha : (v, \varphi) = 0\}$, $\mathfrak{W}_M^\perp = \{w \in \mathfrak{W}_M : (w, \varphi) = 0\}$.

Лемма 1 *При любых $\beta, \lambda \in \mathbb{R}_+, s \in \mathbb{R}$ и $v^\perp \in \mathfrak{U}^{\alpha\perp}$ существует единственное решение $w \in \mathfrak{W}_M^\perp$ уравнения* (17).

Теперь перейдем к уравнению (18). Как хорошо известно из формул Кардано, уравнение (18) имеет от одного до трех действительных корней, причем оно имеет ровно два действительных корня, если вдобавок к нему выполняется уравнение

$$R(s, w^\perp) = s^2 ||\varphi||_{L_4}^4 + 2s \int\limits_a^b \varphi^3 w^\perp dx + s \int\limits_a^b \varphi^2 (w^\perp)^2 = 0.$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\mathfrak{W}_M^\circ = \{w \in \mathfrak{W}_M : R(s, w^\perp) = 0\},$$

$$\mathfrak{W}_M^+ = \{w \in \mathfrak{W}_M : R(s, w^\perp) > 0\}, \mathfrak{W}_M^- = \{w \in \mathfrak{W}_M : R(s, w^\perp) < 0\}.$$

Лемма 2 *При любых* $\beta, \lambda \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}$ *и* $v^\perp \in \mathfrak{U}^{\alpha\perp}$ *существует решение* $(w^\perp, s) \in \mathfrak{W}_M^\perp \times \mathbb{R}$ *системы уравнений* (17), (18).

Введем в рассмотрение вспомогательный оператор

$$(B(w^\perp + s\varphi), \eta^\perp + t\varphi) = \int_a^b (w_x^\perp \eta_x^\perp - \nu_1 w^\perp \eta^\perp + \beta(w^\perp + s\varphi)^3 \eta^\perp)dx +$$

$$+\lambda(w^\perp(a)\eta^\perp(a) + +w^\perp(b)\eta^\perp(b)) + t\int_a^b (w^\perp + s\varphi)^3 \varphi dx.$$

Оператор $B : \mathfrak{W}_M \to \mathfrak{H}$ коэрцитивен, монотонен, радиально непрерывен. $\mathfrak{H}$ – пространство, сопряженное к $\mathfrak{W}_M$ относительно двойственности $(\cdot,\cdot)$. Обозначим $\mathfrak{H}^- = B[\mathfrak{W}_M^-]$, $\mathfrak{H}^\circ = B[\mathfrak{W}_M^\circ]$, $\mathfrak{H}^+ = B[\mathfrak{W}_M^+]$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{P} = \{u \in \mathfrak{M} : R(s, w^\perp) \neq 0\}$.

Теорема 9 *При любых* $\beta, \lambda \in \mathbb{R}_+$ *множество* $\mathfrak{P}$ *является фазовым пространством задачи* (17), (18).

Теорема 10 *При любых* $\beta, \lambda \in \mathbb{R}_+$ *и* $u_0 \in \mathfrak{U}^\alpha$ *такого, что*

(i) $v_0 \in \mathfrak{U}^\alpha \cap \mathfrak{H}^-$ *существует точно одно решение задачи* (4)-(6);

(ii) $v_0 \in \mathfrak{U}^\alpha \cap \mathfrak{H}^+$ *существует точно три решения задачи* (4)-(6).

П.3.5 содержит описание программы, разработанной в вычислительной среде Maple 12.0., которая, опираясь на метод Галеркина, позволяет находить приближенное численное решение задачи (4)-(6) и строит графическое изображение этого решения при различных значениях параметров, показывая нетривиальность фазового пространства.

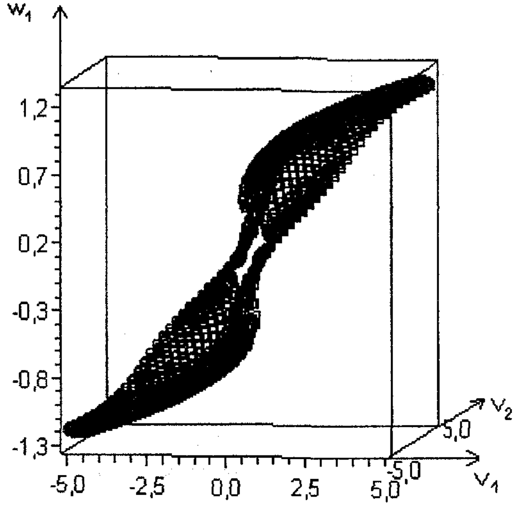

Рис.2 Проекция фазового пространства задачи (4)-(5) при $\lambda = 1$, $\delta = 1$, $\beta = 1$, если

$$v(t,x) = v_1(t)\sqrt{\tfrac{2}{\pi(\lambda^2+1)}}(\lambda\sin(x)+\cos(x)) + v_2(t)\sqrt{\tfrac{8}{\pi(\lambda^2+4)}}(\tfrac{\lambda}{2}\sin(x)+\cos(x)),$$

$$w(t,x) = w_1(t)\sqrt{\tfrac{2}{\pi(\lambda^2+1)}}(\lambda\sin(x)+\cos(x)) + w_2(t)\sqrt{\tfrac{8}{\pi(\lambda^2+4)}}(\tfrac{\lambda}{2}\sin(x)+\cos(x)).$$

Результаты, выносимые на защиту:

1. Исследована морфология фазового пространства уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова.

2. Найдены достаточные условия, когда задача Шоуолтера – Сидорова для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова имеет ровно одно, ровно два различных и не имеет решений.

3. Построен алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова при различных значениях параметров и получено графическое изображение этого решения.

4. Исследована морфология фазового пространства системы уравнений Плотникова.

5. Найдены достаточные условия, когда задача Шоуолтера – Сидорова для системы уравнений Плотникова имеет ровно одно и ровно три различных решения.

6. Построен алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для системы уравнений Плотникова при различных значениях параметров и получено графическое изображение этого решения.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Карамова, А. Ф. (Гильмутдинова А. Ф.)* О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г. А. Свиридюк, А. Ф. Карамова (А. Ф. Гильмутдинова) // Дифференц. уравнения.– 2005.– Т. 41, № 10.– С. 1400-1405.

Другие научные публикации:

2. *Карамова, А. Ф. (Гильмутдинова А. Ф.)* Складка фазового пространства уравнения двухкомпонентной полупроводниковой плазмы / А. Ф. Карамова // Современные методы теории функций и смежные проблемы: тез. докл. науч. конф. – Воронеж: ВГУ, 2005.– С. 110.

3. *Карамова, А. Ф. (Гильмутдинова А. Ф.)* О складке фазового пространства уравнения Корпусова-Плетнера-Свешникова / А. Ф. Карамова // Студент и научно-техн. прогресс: тез. докл. науч. студ. конф. – Челябинск: ЧелГУ, 2005.– С. 6.

4. *Гильмутдинова А. Ф.* О простоте фазового пространства системы уравнений Кагиналпа / А. Ф. Гильмутдинова // Вестн. МаГУ. Математика. – Магнитогорск: МаГУ, 2006.– С. 5-16.

5. *Гильмутдинова А. Ф.* Фазовое пространство системы уравнений Кагиналпа / А. Ф. Гильмутдинова // Дифференциальные уравнения и их приложения: тез. докл. науч. конф.– Самара: "Универс групп 2007.– С. 39.

6. *Гильмутдинова А. Ф.* Об особенностях фазового пространства системы уравнений Кана-Хилларда / А. Ф. Гильмутдинова // Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения: тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 28 мая-2 июня 2007 г.– Новосибирск: НГУ, 2007.– С. 111.

7. *Гильмутдинова А. Ф.* О неединственности решений задачи Шоуолтера-Сидорова для одной модели Плотникова / А. Ф. Гильмутдинова // Вестн. СамГУ. – 2007.–№ 9/1.– С. 85-90.

8. *Гильмутдинова А. Ф.* О феномене неединственности задачи Шоуолтера-Сидорова для полулинейных уравнений соболевского типа / А. Ф. Гильмутдинова // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: тр. междунар. конф., Стерлитамак, 24-28 июня 2008 г.– Уфа: Гилем, 2008.–Т.1.– С. 61-64.

9. *Гильмутдинова А. Ф.* О неединственности задачи Шоуолтера-Сидорова для полулинейных уравнений соболевского типа / А. Ф. Гильмутдинова // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 5-12 октября 2008 г.– Новосибирск: НГУ, 2008.–С. 122.

10. *Гильмутдинова А. Ф.* Неединственность решений системы уравнений Кагиналпа. / Г. А. Свиридюк, А. Ф. Гильмутдинова // Математика. Механика. Информатика: тез. докл. Всерос. научной конф., Челябинск, 19-22 сентября 2006 г.– Челябинск: ЧелГУ, 2006.– С. 28.