УДК 517.948 DOI: 10.14529/ctcr150207

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВАХ L_2, ОСНОВАННОМ НА ОБОБЩЕННОМ ПРИНЦИПЕ НЕВЯЗКИ

А.И. Сидикова, А.А. Ершова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Рассматривается одномерное интегральное уравнение Фредгольма I рода с замкнутым ядром, имеющим решение в классе $W_2^1[a,b]$ с однородным граничным условием первого рода в точке a. Задача сводится к новому интегральному уравнению относительно производной искомого решения. Полученное интегрального уравнения подвергается конечномерной аппроксимации специального вида, которая позволяет при использовании вариационного метода регуляризации А.Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки свести задачу к специальной системе линейных алгебраических уравнений. Проводится также априорная оценка точности полученного устойчивого конечномерного приближенного решения, учитывающая точность конечномерной аппроксимации задачи. Использование данного подхода приводится на примере задачи определения фононного спектра по его теплоемкости, зависящей от температуры, которая, как известно, сводится к интегральному уравнению первого рода.

Ключевые слова: регуляризация, интегральное уравнение, оценка погрешности, некорректная задача.

Введение

Многочисленные практически важные задачи приводят к некорректно поставленным задачам, как, например, уравнениям Фредгольма первого рода. При численном решении некорректных задач возникает проблема дискретизации исходной задачи, то есть замены непрерывной математической модели некоторым ее конечномерным аналогом. Наиболее употребительными способами дискретизации является конечноразностный, при котором нахождение приближенного решения обычно сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

К настоящему моменту получено большое число результатов, посвященных доказательству сходимости конечномерных аппроксимаций к регуляризованному решению [1–5], а также исследованы обобщенный метод и принцип невязки применительно к решению нелинейных задач [6].

Наряду с решением вопроса о сходимости конечномерных аппроксимаций, важную роль играет получение оценки погрешности. Впервые, такая оценка при достаточно больших значениях размерности аппроксимации была получена в работе [7].

В данной статье рассмотрен численный алгоритм решения интегральных уравнений первого рода в пространстве L_2. Этот алгоритм использует метод регуляризации А.Н. Тихонова с параметром, выбранным из принципа невязки. Один из таких подходов к получению оценок может быть основан на использовании эквивалентности обобщенного принципа и обобщенного метода невязки [8].

Использование данного подхода проиллюстрировано на примере задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости. Исследование возможности выявления тонкой структуры, в первую очередь, количества, положения и величины пиков функции $n(s)$ и разработка для этого эффективных, т. е. требующих минимальной априорной информации и оптимальных по точности методов решения некорректно поставленных задач имеют важное теоретическое и практическое значение, не ограничивающееся рамками рассматриваемой обратной задачи.

Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s)=\int_a^b P(s,t)u(s)ds=f(t),\ c\le t<\infty, \tag{1}$$

где $P(s,t)\in C([a,b]\times[c,\infty))$, $u(s)\in L_2[a,b], f(t)\in L_2[c,\infty)$ и ядро $P(s,t)$ замкнуто.

Предложим, что при $f(t)=f_0(t)$ существует точное решение уравнения (1) $u_0(s)$, которое принадлежит множеству M_r, где

$$M_r=\left\{u(s)\ :\ u(s),\ u'(s)\in L_2[a,b],\ u(a)=0\right\}, \tag{2}$$

где $u'(s)$ – производная $u(s)$ по s. Из замкнутости ядра $P(s,t)$ будет следовать единственность решения $u_0(s)$ уравнения (1).

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны $f_\delta(t)\in L_2[c,\infty)$ и $\delta>0$ такие, что $\|f_\delta(t)-f_0(t)\|_{L_2}<\delta.$

Требуется по $f_\delta(t)$, δ и M определить приближенное решение $u_\delta(t)$ и оценить его уклонение от точного решения $u_0(t)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, формулой

$$u(s)=Bv(s)=\int_a^s v(\xi)d\xi;\ v(s),\ \ Bv(s)\in L_2[a,b] \tag{3}$$

и оператор C:

$$Cv(s)=ABv(s);\ \ v(s)\in L_2[a,b],\ \ Cv(s)\in L_2[c,\infty). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$Cv(s)=\int_a^b K(s,t)v(s)ds, \tag{5}$$

где

$$K(s,t)=\int_b^s P(\xi,t)d\xi. \tag{6}$$

Для численного решения уравнения (1) оператор C заменим конечномерным оператором C_n, для которого h_n может быть определена из соотношения $\|C_n-C\|\le h_n$.

Для определения величины h_n введем функцию $N(t)$,

$$N(t)=\max_{a\le s\le b}|P(s,t)|;\ t\in[c,\infty). \tag{7}$$

Так как $P(s,t)\in C\big([a,b]\times[c,\infty)\big)$, то из (7) следует, что $N(t)\in C[c,\infty)$.

Для определения оператора C_n разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей и введем функции $\bar{K}_i(t)$ и $K_n(s,t)$ формулами:

$$\bar{K}_i(t)=K(\bar{s}_i,t), \tag{8}$$

где

$$\bar{s}_i=\frac{s_i+s_{i+1}}{2},\ s_{i+1}=a+\frac{(i+1)(b-a)}{n},\ s_i=a+\frac{i(b-a)}{n},\ i=0,1,\ldots,n-1,$$

а

$$K_n(s,t)=\bar{K}_i(t);\ s_i\le s<s_{i+1},\ t\in[c,\infty),\ i=0,1,\ldots,n-1. \tag{9}$$

Используя (9), определим конечномерный оператор C_n формулой

$$C_n v(s) = \int_a^b K_n(s,t) v(s) ds; t \in [c,\infty), \tag{10}$$

где C_n отображает пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[c,\infty)$.

Из (5)–(10) следует, что

$$\|C_n - C\| \le \|N(t)\|_{L_2} \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{n} = h_n. \tag{11}$$

Регуляризующий алгоритм решения уравнения (1)

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом регуляризации А.Н. Тихонова первого порядка [9]

$$\inf\left\{\|C_n v(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha\int_a^b [v(s)]^2 ds: \ v(s) \in L_2[a,b]\right\}, \alpha > 0. \tag{12}$$

Из [9] следует существование и единственность решения $v_{\delta h_n}^{\alpha}(s)$ вариационной задачи (12).

Для определения параметра $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(C_n, f_\delta, h_n, \delta)$ введем функцию $\overline{f}_{\delta,n}(t) \in L_2[c,\infty)$, определяемую формулой

$$\overline{f}_{\delta,n}(t) = pr\left[f_\delta(t); \ R(C_n)\right], \tag{13}$$

то есть являющейся метрической проекцией в пространстве $L_2[c,\infty)$ функции $f_\delta(t)$ на множестве значений $R(C_n)$ оператора C_n.

Значение параметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(C_n, f_\delta, \delta)$ в задаче (12) выберем из обобщенного принципа невязки [10]:

$$\left\|C_n v_{\delta h_n}^{\alpha}(s) - \overline{f}_{\delta,n}(t)\right\| = \left\|v_{\delta h_n}^{\alpha}(s)\right\| h_n + \delta. \tag{14}$$

Известно, что при условии $\left\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\right\| > \delta + \left\|u_0'(s)\right\| h_n$ существует единственное решение $\overline{\alpha}(C_n, f_\delta, h_n, \delta)$ уравнения (14).

Приближенное решение $u_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) определим формулой

$$u_{\delta h_n}(s) = B v_{\delta h_n}^{\overline{\alpha}(C_n, f_\delta, h_n, \delta)}(s). \tag{15}$$

Оценка погрешности приближенного решения $u_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1)

Введем функцию

$$\omega(\sigma,) = \sup_u\left\{\|u(s)\|_{L_2} : \ u(s) \in M_r, \ \|Au(s)\| \le \sigma\right\}.$$

Теорема 1. Пусть $u_0(s) \in M$, а $u_{\delta h_n}(s)$ определена формулой (15) и $\left\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\right\| > \delta + \left\|u_0'(s)\right\| h_n$. Тогда существует число $r > 0$ такое, что

$$\left\|u_{\delta h_n}(s) - u_0(s)\right\|_{L_2} \le 2\omega(\delta + 2rh_n, r).$$

Доказательство. Так как $u_0(s) \in M$, то из (2) следует существование числа $r > 0$ такое, что

$$u_0(s) \in B\overline{S}_r, \tag{16}$$

а приближенное решение

$$u_{\delta h_n}(s) = B v_{\delta h_n}(s), \tag{17}$$

в котором $v_{\delta h_n}(s)$ является решением вариационной задачи

$$\left\|v_{\delta h_n}\right\|^2 = \inf\left\{\left\|v(s)\right\|^2 : \ v(s)\in L_2[a,b], \ \left\|C_n v_0 - \overline{f}_{\delta,h_n}(t)\right\| \le \delta + \left\|v\right\| h_n\right\}. \tag{18}$$

Поскольку $u_0 \in BS_r$, то

$$\left\|C_n v_0 - f_\delta\right\| \le \left\|C_n v_0 - C v_0 + C v_0 - f_\delta\right\| \le \left\|C_n v_0 - C v_0\right\| + \left\|C v_0 - f_\delta\right\|, \tag{19}$$

где $v_0 = B^{-1}u_0$, и $Cv_0 = ABv_0$. Поэтому

$$\left\|C_n v_0 - f_\delta\right\| \le \delta + \left\|v_0\right\| h_n, \tag{20}$$

и

$$\left\|C_n v_0 - \overline{f}_\delta\right\| \le \delta + \left\|v_0\right\| h_n. \tag{21}$$

Из (18) и (21) получим

$$\left\|v_{\delta,h_n}\right\| \le \left\|v_0\right\|. \tag{22}$$

Из (16), (17) и (22) следует, что

$$u_{\delta h_n}(s) \in BS_r = M_r. \tag{23}$$

Теперь оценим величину $\left\|Au_{\delta h_n} - Au_0\right\|$.

$$\left\|Au_{\delta h_n} - Au_0\right\| \le \left\|Au_{\delta h_n} - \overline{f}_{\delta,n}\right\| + \left\|Au_0 - \overline{f}_{\delta,n}\right\|.$$

Так как

$$\left\|Au_0 - \overline{f}_{\delta,n}\right\| = \left\|Cv_0 - C_n v_0\right\| + \left\|Cv_0 - \overline{f}_{\delta,n}\right\|,$$

то из (21) следует, что

$$\left\|Au_0 - \overline{f}_{\delta,n}\right\| \le \delta + 2\left\|v_0\right\| h_n$$

или с учетом (16)

$$\left\|Au_0 - \overline{f}_{\delta,n}\right\| \le \delta + 2rh_n. \tag{24}$$

Из (13), (18) и (22) ясно, что

$$\left\|C_n v_{\delta h_n} - \overline{f}_{\delta,n}\right\| \le \delta + rh_n, \tag{25}$$

а из (22) и (11), что

$$\left\|Cv_{\delta h_n} - C_n v_{\delta h_n}\right\| \le rh_n. \tag{26}$$

Таким образом, (25) и (26) дают

$$\left\|Au_{\delta h_n} - \overline{f}_{\delta,n}\right\| \le \delta + 2rh_n. \tag{27}$$

Из (24) и (27) следует, что

$$\left\|Au_{\delta h_n} - Au_0\right\| \le 2\delta + 4rh_n. \tag{28}$$

Из (16), (23) и (28) имеем неравенство

$$\left\|u_{\delta h_n} - u_0\right\| \le \omega\left(2\left[\delta + 2rh_n\right], 2r\right).$$

Используя известное свойство функции $\omega(\sigma, r)$, приведенное в [11, с. 12], окончательно получим, что

$$\left\|u_{\delta h_n} - u_0\right\| \le 2\omega\left(\delta + 2rh_n, r\right).$$

Тем самым теорема доказана.

Сведение вариационной задачи (12) к системе линейных алгебраических уравнений

Известно, что вариационная задача (12) эквивалентна уравнению

$$C_n^* C_n v(s) + \alpha v(s) = C_n^* f_\delta(t), \tag{29}$$

где C_n^* – оператор, сопряженный оператору C_n.

Из (8) и (10) следует, что

$$C_n v(s) = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t) v_i, \qquad (30)$$

где $v_i = \sqrt{\frac{n}{b-a}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} v(s)ds.$

Из (29) и (30) следует, что вариационная задача (12) эквивалентна системе алгебраических уравнений

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ij} v_i + \alpha v_j = g_j; \quad j = 0,1,2,...,n-1, \qquad (31)$$

где $b_{ij} = \int_c^\infty \bar{K}_i(t) \bar{K}_j(t) dt$, а $g_j = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \int_c^\infty \bar{K}_j(t) f_\delta(t) dt.$

Система (31) при любых значениях $\alpha > 0$ и (g_j) имеет единственное решение, которое мы обозначим через $(\bar{v}_i^\alpha)$.

Используя обобщенный принцип невязки (14), параметр регуляризации $\bar{\alpha}\left(C_n, f_\delta, h_n, \delta\right)$ в системе (31) определим из уравнения

$$\left\{ \int_c^\infty \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t) \bar{v}_i^\alpha - \bar{f}_{\delta,n}(t) \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\bar{v}_i^\alpha \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} h_n + \delta. \qquad (32)$$

При условии $\left\| \bar{f}_{\delta,n} \right\| > \delta + \left\| u_0'(s) \right\| h_n$ существует единственное решение $\bar{\alpha}\left(C_n, f_\delta, h_n, \delta\right)$ уравнения (32).

Окончательно решение $v_{\delta h_n}(s)$ задачи (31), (32) обозначим через

$$v_{\delta h_n}(s) = \left\{ \bar{v}_i^{\bar{\alpha}} : \; s_{i-1} \le s < s_i \right\}; \; i = 1,2,...,n.$$

Приближенное решение $u_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) будет непрерывной, кусочно-линейной функцией, определяемой формулой

$$u_{\delta h_n}(s) = \int_a^s v_{\delta h_n}(\xi) d\xi.$$

Приложение общей схемы к задаче определения фононного спектра по его теплоемкости

Связь энергетического спектра бозе-системы с ее теплоемкостью, зависящей от температуры, описывается интегральным уравнением первого рода

$$Sn(s) = \int_a^b K(s,t) n(s) ds = \frac{f(t)}{t}; \quad 0 < t \le \infty, \qquad (33)$$

где $K(s,t) = \dfrac{s^2}{2t^3 sh^2\left(\dfrac{s}{2t}\right)}$, $n(s) \in L_2[a,b]$, $\dfrac{f(t)}{t} \in L_2(0,\infty)$, $n(s)$ – спектральная плотность кристалла, а $f(t)$ – его теплоемкость, зависящая от температуры.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $n_0(s)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству M, где

$$M = \left\{ n(s) : n(s), \; n'(s) \in L_2[a,b], \; n(a) = 0 \right\},$$

а $n'(s)$ – производная по s.

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны $f_\delta(t)\in L_2(0,\infty),\ \ \delta>0$ такие, что $\left\|\frac{f_\delta(t)}{t}-\frac{f_0(t)}{t}\right\|_{L_2}<\delta.$

Требуется по $f_\delta(t),\delta$ и M определить приближенное решение $n_\delta(t)$ и оценить его уклонение от точного решения $n_0(t)$ в метрике пространства $L_2[a,b].$ Заметим, что единственность решения уравнения (33) доказана в [12].

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$ формулой

$$n(s)=Bu(s)=\int_a^s u(\xi)d\xi;\ \ u(s)\in L_2[a,b],\ \ Bu(s)\in L_2[a,b]$$

и оператор C, для которого

$$Cu(s)=ABu(s);\ \ u(s)\in L_2[a,b],\ \ Cu(s)\in L_2(0,\infty).$$

Из (3)–(6) следует, что $Cu(s)=\int_a^b P(s,t)u(s)ds$, где $P(s,t)=\int_b^s K\left(\xi,t\right)d\xi.$

Определим функцию $N\left(t\right)$ формулой

$$N(t)=\max_{a\le s\le b}\left|\frac{s^2}{2t^3sh^2\left(\frac{s}{2t}\right)}\right|\le\frac{b^2}{2t^3sh^2\left(\frac{a}{2t}\right)}.$$

Из непрерывности $K(s,t)$ следует непрерывность $N(t).$ Кроме того $\|N(t)\|^2_{L_2(0,\infty)}=\frac{b^4}{4}\int_0^\infty\frac{1}{t^6sh^4\left(\frac{a}{2t}\right)}dt.$

При $t\to\infty,\ N^2(t)\sim\left(\frac{\sqrt{2}b}{a}\right)^4\frac{1}{t^2}$, а при $t\to 0,\ \ N(t)\to 0$. Таким образом $N(t)\in L_2(0,\infty)$.

Следуя (9)–(12), для решения (33) воспользуемся методом регуляризации А.Н. Тихонова первого порядка

$$\inf\left\{\left\|C_nu(s)-\frac{f_\delta(t)}{t}\right\|^2+\alpha\int_a^b\left[u(s)\right]^2ds:\ \ u(s)\in L_2[a,b]\right\},\alpha>0. \tag{34}$$

Обозначим через $\bar f_{\delta,n}(t)$ функцию, принадлежащую пространства $L_2(0,\infty)$, определяемую формулой

$$\bar f_{\delta,n}(t)=pr\left[\frac{f_\delta(t)}{t};\ \ R(C_n)\right],$$

то есть является метрической проекцией в пространстве $L_2(0,\infty)$ функции $\frac{f_\delta(t)}{t}$ на множестве значений оператора C_n.

Значение параметра регуляризации $\bar\alpha=\bar\alpha\left(C_n,f_\delta(t),h_n,\delta\right)$ в задаче (34) выберем, пользуясь условием (14)

$$\left\|C_nu^\alpha_{\delta h_n}(s)-\bar f_{\delta,n}(t)\right\|=\left\|u^\alpha_{\delta h_n}(s)\right\|h_n+\delta, \tag{35}$$

где $u^\alpha_{\delta h_n}(s)$ – решение вариационной задачи (34).

Известно, что при условии $\left\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\right\| > \delta + \left\|n_0^{'}(s)\right\| h_n$ существует единственное решение $\overline{\alpha}\left(C_n, f_\delta(t), h_n, \delta\right)$ уравнения (35).

Если решение $u_{\delta h_n}^{\overline{\alpha}(C_n, f_\delta(t), h_n, \delta)}(s)$ обозначить через $u_{\delta h_n}(s)$, то приближенное решение $n_{\delta h_n}(s)$ уравнения (33) будет иметь вид $n_{\delta h_n}(s) = Bu_{\delta h_n}(s)$.

Из (31) и (32) будет следовать, что уравнение (35) в R^n примет вид

$$\left\{\int_0^\infty \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P}_i(t) \overline{u}_i^\alpha - \frac{C_{\delta,n}(t)}{t}\right] dt\right\}^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\overline{u}_i^\alpha\right)\right]^{\frac{1}{2}} h_n + \delta.$$

Перейдем к оценке погрешности приближенного решения в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Введем функцию

$$\omega(\sigma, r) = \sup_n \left\{\left\|n(s)\right\|_{L_2} : n(s) \in M_r, \ \left\|Sn(s)\right\| \le \sigma\right\},$$

где $M_r = B\overline{S}_r$, $\sigma > 0$, $r > 0$, а S определен (33). Из теоремы 1 получим неравенство $\left\|n_{\delta h_n}(s) - n_0(s)\right\|_{L_2[a,b]} \le 2\omega\left(\delta + 2rh_n, r\right)$.

В работе [12] было получено, что $\omega(\sigma, r) \le r\left(1 + \frac{1}{\pi}\ln^2\left(\frac{r}{4\delta}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Для приближенного решения $u_{\delta h_n}(s)$ имеет место оценка

$$\left\|n_{\delta h_n}(s) - n_0(s)\right\|_{L_2[a,b]} \le 2r\left(1 + \frac{1}{\pi}\ln^2\left(\frac{r}{4\delta}\right)\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $n_{\delta h_n}(s)$ – приближенное решение уравнения (33).

Литература

1. *Гончарский, А.В. Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач / А.В. Гончарский, А.С. Леонов, А.Г. Ягола // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 15–24.*
2. *Танана, В.П. Об оценке погрешности регуляризующего алгоритма, основанного на обобщенном принципе невязки, при решении интегральных уравнений / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Вычислит. методы и программирование. – 2015. – Т. 16, № 1. – С. 1–9.*
3. *Танана, В.П. Проекционные методы и конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач / В.П. Танана // Сиб. мат. жур. – 1975. – Т. 16, № 6. – С. 1301–1307.*
4. *Васин, В.В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов / В.В. Васин // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 11–21.*
5. *Данилин, А.Р. Об условии сходимости конечномерных аппроксимаций метода невязки / А.Р. Данилин // Изв. вузов матем. – 1980. – № 11. – С. 38–40.*
6. *Леонов, А.С. О связи метода обобщенной невязки и обобщенного принцпа невязки для нелинейных задач / А.С. Леонов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1982. – Т. 22, № 4. – С. 783–790.*
7. *Данилин, А.Р. Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач / А.Р. Данилин // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1982. – Т. 22, № 4. – С. 1123–1129.*
8. *Танана, В.П. Об одном проекционно-итеративном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором / В.П. Танана // Доклады Академии наук. – 1975. – Т. 224, № 5. – С. 1028–1029.*
9. *Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Доклады Академии наук. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.*

10. Гончарский, А.В. Обобщенный принцип невязки / А.В. Гончарский, А.С. Леонов, А.Г. Ягола // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1973. – Т. 13, № 2. – С. 294–302.

11. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. – М.: Наука, 1981. – С. 156.

12. Танана, В.П. Оценка погрешности метода регуляризации А.Н. Тихонова при решении одной обратной задачи физики твердого тела / В.П. Танана, А.А. Ерыгина // Сиб. журн. индустр. математики. – 2014. – № 2. – С. 125–136.

Сидикова Анна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, 7413604@mail.ru

Ершова Анна Александровна, аспирант кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, anya.erygina@yandex.ru

Поступила в редакцию 20 января 2015 г.

DOI: 10.14529/ctcr150207

ABOUT ONE NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN SPACE L_2 BASED ON THE GENERALIZED DISCREPANCY PRINCIPLE

A.I. Sidikova, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, 7413604@mail.ru*
A.A. Ershova, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, anya.erygina@yandex.ru*

In this paper we consider a one-dimensional Fredholm integral equation of type I closed with a kernel having a solution in the class $W_2^1[a,b]$ with homogeneous boundary conditions of the first kind at the point a. The problem is reduced to a new integral equation for the derivative of the desired solution. The resulting integral equations is subjected to finite-dimensional approximation of a special form, that allows to use the variational regularization Tikhonov's method with the choice of regularization parameter according to the generalized discrepancy principle to reduce the problem to a special system of linear algebraic equations. A priori estimation of the accuracy of the resulting finite-stable approximate solution that takes into account the accuracy of the finite-dimensional approximation of the problem is also carried out. Using of this approach is made on the example of the problem of determining the phonon spectrum on its heat capacity, depending on the temperature, which is known to be reduced to integral equations of the first kind.

Keywords: regularization, integral equation, evaluation of inaccuracy, ill-posed problem.

References

1. Goncharsky A.V., Leonov A.S., Yagola A.G [Linear Finite-difference Approximation of Improperly-posed Problems]. *Journal of Calculus Mathematics and Mathematical Physics*, 1974, vol. 14, no. 1, pp. 15–24. (in Russ.)

2. Tanana V.P., Sidikova A.I. [About Error Estimation of a Regularizing Algorithm Based of the Generalized Residual Principle at the Solution of Integral Equations]. *Numerical Methods and Programming*, 2015, vol. 16, no. 1, pp. 1–9. (in Russ.)

3. Tanana V.P. [A projective Method and Finite-difference Approximation of Linear Ill-posed Problems]. *Siberian Mathematical Journal*, 1975, vol. 16, no. 6, pp. 1301–1307. (in Russ.)

4. Vasin V.V. [Discrete Finite-dimensional Approximation and Convergence of Regularizing Algorithms]. *Journal of Calculus Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 11–21. (in Russ.)

5. Danilin A.R. [On Conditions for Convergence of Finite Dimensional Approximations of the Residual Method]. *News of Higher Education Institutions: Mathematics*, 1980, no. 11, pp. 38–40. (in Russ.)

6. Leonov A.S. [On the Relationship between the Generalized Residual Method and the Generalized Principle Residual for Nonlinear Problems]. *Journal of Calculus Mathematics and Mathematical Physics*, 1982, vol. 22, no. 4, pp. 783–790. (in Russ.)

7. Danilin A.R. [About Order-optimal Estimates of the Finite-dimensional Approximation of the Up-solving Ill-posed Problems]. *Journal of Calculus Mathematics and Mathematical Physics*, 1982, vol. 22, no. 4, pp. 1123–1129. (in Russ.)

8. Tanana V.P. [On a Projection-iterative Algorithm for Operator-tory Equations of the First Kind with a Perturbed Operator]. *Reports of the Academy of Sciences*, 1975, vol. 224, no. 5, pp. 1028–1029. (in Russ.)

9. Tikhonov A.N. [On the Solution of Ill-posed Problems Regularization Method]. *Reports of the Academy of Sciences*, 1963, vol. 151, no. 3, pp. 501–504. (in Russ.)

10. Goncharsky A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. [Generalized Discrepancy Principle]. *Journal of Calculus Mathematics and Mathematical Physics*,1973, vol. 13, no. 2, pp. 294–302. (in Russ.)

11. Tanana V.P. *Metody resheniya operatornykh uravneniy* [Methods for Solving of Operator Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 156 p.

12. Tanana V.P., Erygina A.A. [An error estimate for the regularization method of A.N. Tikhonov for solving an inverse problem of solid state physics]. *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 125–136. (in Russ.)

Received 20 January 2015

БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТАТЬИ

Сидикова, А.И. Об одном численном алгоритме решения интегральных уравнений первого рода в пространствах L_2, основанном на обобщенном принципе невязки / А.И. Сидикова, А.А. Ершова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2015. – Т. 15, № 2. – С. 66–74. DOI: 10.14529/ctcr150207

REFERENCE TO ARTICLE

Sidikova A.I., Ershova A.A. About One Numerical Algorithm for Solving Integral Equations of the First Kind in Space L_2 Based on the Generalized Discrepancy Principle. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 66–74. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr150207