

05.23.17  
А 862

На правах рукописи



**АРТЕМЬЕВА ЛЮБОВЬ МИХАЙЛОВНА**

**ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ РЕАКЦИИ  
КАРКАСНЫХ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ  
ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

05.23.17 – строительная механика

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

100 71  
Томск – 2009

Работа выполнена в ГОУ ВПО  
«Южно-Уральский государственный университет»

- Научный руководитель:** доктор технических наук, доцент  
**Потапов Александр Николаевич**
- Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, профессор  
**Люкшин Борис Александрович**
- кандидат технических наук, профессор  
**Тухфатуллин Борис Ахатович**
- Ведущая организация:** ООО ПТИ «Спецжелезобетонпроект»  
(г. Челябинск)

Защита состоится 26 июня 2009 года в 14-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.265.01 при Томском государственном архитектурно-строительном университете по адресу: 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, корпус 5, аудитория 307.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного архитектурно-строительного университета.

Автореферат разослан 21 мая 2009 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Копаница Н.О.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Современный уровень развития вычислительной техники позволяет инженеру создавать сотни виртуальных моделей одного и того же сооружения на разных стадиях его возведения и эксплуатации. Накопленные знания о моделях поведения различных материалов дают возможность заменить лабораторные или натурные эксперименты, требующие значительных материальных и временных ресурсов, исследованием математических моделей. Такой анализ дает представление о напряженно-деформированном состоянии конструкций и помогает оптимально использовать возможности современных материалов. Таким образом, развитие методов математического моделирования конструкций является важным аспектом современной строительной науки.

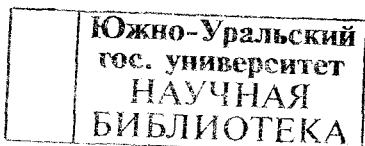
В настоящее время широко развивается многоэтажное строительство. В современном мире здания высотой 50...100 м – повсеместное явление. Одной из распространенных конструктивных схем для высотных зданий является рамно-каркасная система, которая образуется совокупностью вертикальных (колонны) и горизонтальных (перекрытия) несущих элементов.

Несущие конструкции здания воспринимают два вида нагрузок: вертикальные (гравитационные) и горизонтальные (ветровые, сейсмические), причем с ростом высоты здания горизонтальные нагрузки увеличиваются. В большинстве случаев вертикальные нагрузки являются статическими. Горизонтальные же, напротив, имеют ярко выраженный динамический характер. Среди множества динамических воздействий на здания необходимо выделить класс нагрузок, нередко приводящих к нестационарным процессам, таких как удары, импульсы, кратковременные нагрузки, различные их комбинации в виде групповых воздействий. Для оценки реальной работы конструкций необходим учет внутреннего трения и нелинейных свойств материала конструкций.

Обзор методов расчета динамических систем показывает, что наиболее полный и многосторонний динамический анализ возможен в том случае, когда к решению задачи привлекается анализ характеристического матричного квадратного уравнения. Использование в динамическом расчете дискретной диссипативной системы выявленных свойств соотношений матричного квадратного уравнения позволяет вычислять как в упругую, так и нелинейную реакцию системы при общих предпосылках динамической задачи.

Работа выполнена в рамках тематического плана научно-исследовательских работ ГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет».

**Объектом исследования** является многоэтажное каркасное здание.  
**Предмет исследования** – влияние параметров горизонтальных динамических нагрузок на напряженно-деформированное состояние несущих элементов каркаса.



**Целью диссертационной работы** является развитие аналитического метода расчета каркасных многоэтажных зданий на горизонтальную импульсную нагрузку.

Для достижения цели решались следующие задачи.

1. Разработка расчетной динамической модели, достаточно адекватно отражающей реальную работу каркасного многоэтажного здания при действии динамических горизонтальных нагрузок.

2. Исследование динамической реакции дискретной упругой системы с учетом внутреннего трения при действии треугольных импульсов в различных сочетаниях, включая периодический характер воздействия.

3. Построение математических моделей нелинейно-упругого расчета многоэтажного каркаса с диаграммой деформирования конструктивного элемента «восстанавливающая сила – относительное перемещение» в виде кусочно-линейной функции.

4. Построение расчетной схемы временного анализа каркасных многоэтажных зданий с нелинейно-упругой восстанавливающей силой при нестандартных нагрузениях.

5. Разработка аппарата технической реализации разрешающих уравнений вынужденных колебаний многоэтажного каркасного здания при нелинейно-упругом временном анализе.

**Методы исследования.** Для исследования задачи колебаний каркасных многоэтажных зданий использован метод временного анализа, основанный на анализе матричного квадратного уравнения, который при общих предположениях динамической задачи позволяет получить уравнение реакции упругой дискретной диссипативной системы в матричной форме интеграла Дюамеля, имеющей замкнутый вид.

**Достоверность** результатов исследования обеспечена использованием в диссертации фундаментальных принципов строительной механики совместно с методами высшей математики и матричной алгебры; замкнутой формой выведенного интеграла Дюамеля при упругих колебаниях дискретной диссипативной системы; сравнением с известными решениями аналогичных задач, полученными другими методами; корректным применением математических моделей неупругого расчета, обеспечивающих замкнутое решение в шаговом процессе на всех квазилинейных интервалах движения системы.

**Научная новизна диссертации** состоит в следующем:

- исследованы важные для приложений динамики сооружений частные случаи интеграла Дюамеля при действии треугольных импульсов с различными параметрами нагружения;

- в аналитическом виде получено уравнение реакции упругой дискретной диссипативной системы, описывающей многоэтажное каркасное здание, при действии горизонтальных периодических треугольных импульсов;

- разработаны математические модели нелинейно-упругого расчета многоэтажного каркасного здания на основе диаграммы деформирования

конструктивного элемента «восстанавливающая сила – относительное перемещение» в виде кусочно-линейной зависимости;

- построена расчетная схема временного анализа многоэтажного каркаса с нелинейно-упругой восстанавливающей силой при нестационарном процессе;

- разработаны алгоритмы определения критических временных точек при переходе модели каркаса из одного квазилинейного состояния в другое и создан программный комплекс по нелинейному временному анализу многоэтажных каркасов при динамических нагрузках, получивший свидетельство о государственной регистрации.

**Практическая ценность исследования и реализация его результатов.** Разработанные математические модели расчета дискретной диссипативной системы позволяют в замкнутом виде получать реакцию системы на динамическую нагрузку (одиночные и периодические импульсы треугольной формы) в линейной и нелинейно-упругой стадии работы материала конструкций. Аналитическая форма полученных уравнений реакции позволяет выполнять количественный и качественный анализ напряженно-деформированного состояния дискретной диссипативной системы при варьировании внутренних и внешних параметров, значительно снизив затраты компьютерного времени по сравнению с численными (итерационными) методами. В результате работы создан вычислительный комплекс «АРПО», предназначенный для расчета каркасных многоэтажных зданий с учетом внутреннего трения материала при сложном характере нагружений, моделирующих действие ветровых, сейсмических и взрывных нагрузок. Значения параметров реакции системы, вычисленные на основе данной методики в упругой и нелинейно-упругой постановке, могут быть использованы при оценке погрешностей приближенных решений, полученных различными численными методами.

Результаты исследований в области расчетов многоэтажных каркасных зданий на динамические воздействия использованы при подготовке лекций по разделу «Динамика и устойчивость зданий и сооружений» курса «Сопротивление материалов» на кафедре «Строительная механика» ГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет».

Вычислительный комплекс «АРПО» использовался в ООО Проектном бюро «Фридом проект» (г. Челябинск) при расчетах и проектировании многоэтажных каркасных зданий.

#### **На защиту выносятся:**

- уравнения реакции упругой дискретной диссипативной системы, моделирующей каркасное многоэтажное здание, при действии горизонтальных импульсов треугольной формы в различных сочетаниях;

- математические модели нелинейно-упругого расчета многоэтажного каркасного здания на основе диаграммы деформирования произвольного конструктивного элемента «восстанавливающая сила – относительное перемещение» в виде кусочно-линейной зависимости;

- расчетная схема временного анализа многоэтажного каркаса с нелинейно-упругой восстанавливающей силой при нестационарном процессе;
- алгоритмы определения критических временных точек при переходе модели каркаса из одного квазилинейного состояния в другое;
- программные комплексы по нелинейному временному анализу многоэтажных каркасов при динамических нагрузках.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались:

- на 56...60-й научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава и аспирантов ЮУрГУ (г. Челябинск, 2004...2008 г.);
- на научно-технических конференциях НГАСУ (г. Новосибирск, 2006 г.; г. Новосибирск, 2008 г.);
- на Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (г. Пермь, 2008 г.);
- на семинаре кафедры «Строительная механика» ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ» (г. Екатеринбург, 2009 г.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 10 печатных работ, в том числе 4 статьи в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов кандидатских диссертаций.

**Личный вклад автора** состоит в построении модели внешней нагрузки, получении уравнений реакции дискретной системы при действии импульсов треугольной формы, создании программного комплекса для временного анализа каркасов при динамических воздействиях.

**Структура и объем работы.** Диссертация изложена на 140 страницах машинописного текста и состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 130 наименований, и двух приложений. В работе приведены 54 рисунка и 6 таблиц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, дается ее общая характеристика, формулируются основные цели и задачи исследования, обсуждается достоверность, научная новизна и практическая ценность результатов работы. Здесь же приводится краткий обзор существующих методов решения задачи.

Большой вклад в развитие динамических методов расчета конструкций внесли российские и зарубежные ученые: С.А. Бернштейн, В.В. Болотин, И.Г. Бубнов, Б.Г. Галеркин, И.И. Гольденблат, А.Ю. Ишлинский, В.А. Киселев, Б.Г. Корнев, И.Л. Корчинский, А.И. Лурье, Л.С. Ляхович, А.М. Масленников, Н.А. Николаенко, Я.Г. Пановко, В.В. Петров, Н.Н. Попов, И.М. Рабинович, Б.С. Расторгуев, Ю.Э. Сеницкий, А.Ф. Смирнов, Е.С. Сорokin, С.П. Тимошенко, А.П. Филиппов, А.И. Цейтлин, К. Бате, Е. Вилсон, Р. Клаф, Д.Ж. Пензиен, Дж.У. Рэлей, Р.Л. Халфман и др.

Учет внутреннего трения в динамическом анализе осуществляли А.И. Ананьин, Г.И. Гребенюк, А.А. Кусаинов, Э.Я. Неустроев, Л.М. Резников, Е.С. Сорокин, А.П. Филиппов, А.И. Цейтлин, Д.А. Дадеппо, Т.К. Кафи, С. Кренделл, С. Соррентино и многие другие.

Большинство существующих методов решения динамических задач несколько упрощают параметры расчетной динамической модели, соответствующей реальной задаче. Основные ограничения состоят в следующем. В первую очередь, упрощения расчета связаны с выбором типа демпфирования: как правило, выбирается тип внутреннего трения, соответствующий модели однородного демпфирования, либо вообще проводится анализ консервативной системы. Во-вторых, ограничение относится к выбору числа степеней свободы и расположению масс в системе, часто размерами масс пренебрегают. В-третьих, упрощения связаны с моделированием внешних воздействий: исследуется реакция системы на одиночный импульс, как правило, мгновенный, рассмотрение более сложных нагрузок (группы импульсов) обычно изучается для одной степени свободы. В-четвертых, упрощения касаются модели поведения материала конструкций: не учитываются нелинейно-упругие или пластические свойства.

Одним из эффективных аналитических методов решения задачи, развивающимся в последние десятилетия, является метод временного анализа дискретных диссипативных систем, основанный на использовании свойств соотношений характеристического матричного квадратного уравнения, разработанный профессором А.Н. Потаповым. Этот метод позволяет получить уравнение реакции упругой дискретной диссипативной системы в нетривиальной матричной форме интеграла Дюамеля, имеющей замкнутый вид, при общих предположках динамической задачи.

**В первой главе** «Обзор по анализу упругой реакции диссипативной системы» приведены основные положения метода временного анализа по построению реакции дискретной системы со сложными условиями демпфирования.

Уравнение движения упругой дискретной системы с внутренним трением, учитываемым на основе линейной модели вязкого сопротивления:

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = P(t), \quad (1)$$

где  $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ ,  $C = C^T = [c_{ij}]$ ,  $K = K^T = [r_{ij}] \in M_n(R)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) – положительно определенные матрицы инерции, демпфирования и жесткости соответственно;  $Y(t) = [y_i(t)]$ ,  $P(t) = [p_i(t)] \in M_{n,1}(R)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – векторы искомых перемещений и заданных внешних воздействий соответственно. Внешнее воздействие может быть произвольным: кратковременная, длительная, периодическая нагрузка.

Согласно методу вариации произвольных постоянных Лагранжа частное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1 определяется в виде

$$Y(t) = \text{Re}[\Phi(t)A(t)], \quad (2)$$

где  $A(t)$  – вектор произвольных постоянных, зависящий от начальных условий интегрирования;  $\Phi(t) = e^{St}$  – фундаментальная матрица однородного ОДУ, соответствующего неоднородному ОДУ 1;  $S$  – матрица внутренних характеристик системы, полученная из решения характеристического матричного квадратного уравнения

$$MS^2 + CS + K = 0. \quad (3)$$

В результате решения уравнения 1 получаем выражение перемещений узлов системы

$$Y(t) = 2\text{Re}[Y^0(t) + Y^p(t)],$$

$$Y^0(t) = \Phi(t - t_0)U^{-1}M[-\bar{S}Y_0 + \dot{Y}_0], \quad Y^p(t) = U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)^T P(\tau) d\tau, \quad (4)$$

являющееся наиболее общей матричной формой записи интеграла Дюамеля для диссипативной системы с внутренним трением материала, учитываемым на основе линейной теории вязкого сопротивления. Первый член уравнения определяет реакцию системы при свободных колебаниях, второй – при вынужденных колебаниях. Векторы  $Y_0, \dot{Y}_0$  содержат значения перемещений и скоростей узлов системы в начальный момент времени  $t_0$  рассматриваемого интервала.

Дифференцируя уравнение 4 по времени, получаем вектор скоростей системы

$$\dot{Y}(t) = 2\text{Re}[\dot{Y}^0(t) + \dot{Y}^p(t)],$$

$$\dot{Y}^0(t) = SU^{-1}\Phi(t - t_0)^T M(-\bar{S}Y_0 + \dot{Y}_0), \quad \dot{Y}^p(t) = SU^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)^T P(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Выражения 4, 5 в матричной записи представляют полную систему уравнений реакции упругой дискретной диссипативной системы общего вида, позволяющих определять перемещения и скорости узлов системы от действия произвольной динамической нагрузки  $P(t)$ .

Далее приведены выражения реакции системы для некоторых частных случаев динамической нагрузки: линейный закон действия сил, синусоидальный импульс, группа импульсов.

**Во второй главе** «Построение расчетной динамической модели каркасного многоэтажного здания» формируется расчетная динамическая модель, отражающая реальную работу несущих конструкций здания с учетом нескольких допущений. Плиты перекрытия в пределах одного этажа образуют абсолютно жесткий диск постоянной толщины и плотности. Колонны считаются невесомыми и жестко защемленными в уровне фундамента и каждого перекрытия. Продольные деформации колонн не учитываются.

Такая модель соответствует пространственному каркасу, деформируемому по форме сдвига, и имеет широкое распространение в динамических расчетах каркасных многоэтажных зданий.

В принятой расчетной динамической модели любое перекрытие совершает плоское движение при колебаниях и имеет три степени свободы: два



линейных  $(x_i, y_i)$  и одно угловое смещение  $(\varphi_i)$  в горизонтальной плоскости. Здание в целом имеет  $n = 3m$  степеней свободы, где  $m$  – число этажей. Принята следующая нумерация степеней свободы здания (рисунок 1).

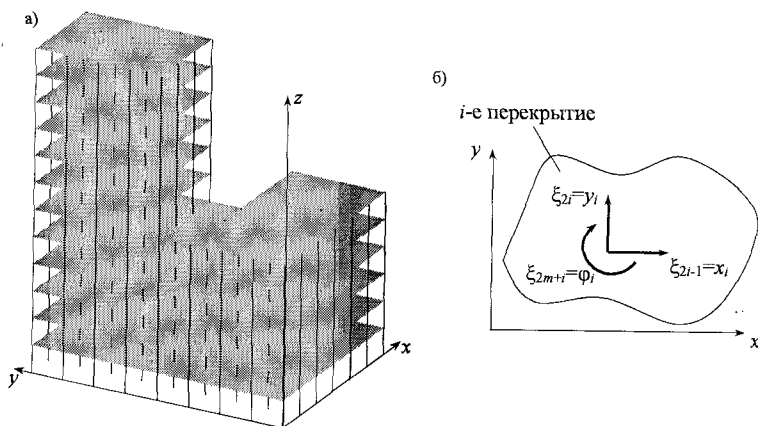


Рисунок 1 – Расчетная динамическая модель: а – общий вид, б –  $i$ -е перекрытие

Геометрические и механические характеристики расчетной динамической модели здания в полной мере описываются матрицами инерции  $M$  и жесткости  $K$ .

В общем случае структура матрицы инерции имеет блочно-диагональную форму:

$$M = \begin{bmatrix} M_m & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Каждый блок представляет диагональную матрицу вида  $M_m = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, \dots, m_m, m_m)$ ,  $\text{кН} \cdot \text{с}^2 / \text{м}$ ,  $M_j = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_m)$ ,  $\text{кН} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}$ , где  $m_i$  – масса, равномерно распределенная по диску перекрытия  $i$ -го этажа, включающая в себя массу  $i$ -го перекрытия, массу верхней половины элементов каркаса  $i$ -го этажа и массу нижней половины элементов каркаса  $i+1$ -го этажа;  $J_i = \sum_j \left[ \frac{m_j (a_j^2 + b_j^2)}{12} + m_j r_j^2 \right]$  – момент инерции  $i$ -го этажа,  $m_j$  – масса  $j$ -

го элемента этажа,  $a_j, b_j$  – размеры прямоугольного элемента в плане,  $r_j$  – расстояние между центром тяжести данного элемента и центром тяжести этажа.

Построение матрицы жесткости  $K$  проводится через построение матрицы податливости  $L = [\delta_{ij}]$  (здесь  $\delta_{ij}$  – перемещение  $i$ -ого узла от действия единичной нагрузки в  $j$ -ом узле), поскольку

$$K = L^{-1}. \quad (7)$$

В настоящей работе для построения матрицы демпфирования будем пользоваться моделью

$$C = KT, \quad (8)$$

поскольку она соответствует более общему типу неоднородного демпфирования. Здесь  $K$  – матрица жесткости;  $T = \text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_n)$  – диагональная матрица с элементами  $t_i = \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{m_i}{r_{ii}}}$ ,  $\delta$  – логарифмический декремент колебаний, зависящий от материала,  $m_i, r_{ii}$  – диагональные элементы матриц инерции и жесткости. Элементы матрицы демпфирования  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) выражают реакцию диссипативной системы в ответ на единичные импульсные смещения опор по направлению ее степеней свободы.

Матрицы  $K$  и  $C$  имеют блочную структуру, связанную с линейными и угловыми степенями свободы перекрытий. Эти блоки имеют различные единицы измерения: блоки  $K_{xy}$  (кН/м) и  $C_{xy}$  (кН·с/м) с параметрами, отвечающими за линейные степени свободы; блоки  $K_z$  (кН·м) и  $C_z$  (кН·с·м) с параметрами, полученными при угловых степенях свободы; кроме того, блоки  $K_{xyz}$  (кН) и  $C_{xyz}$  (кН·с), где параметры учитывают взаимное влияние линейных и угловых степеней свободы.

В третьей главе «Вывод уравнения упругой реакции дискретной диссипативной системы и ее анализ при действии треугольных импульсов» исследуется реакция системы на действие импульсов треугольной формы: одиночных, повторяющихся, знакопередающихся (рисунок 2).

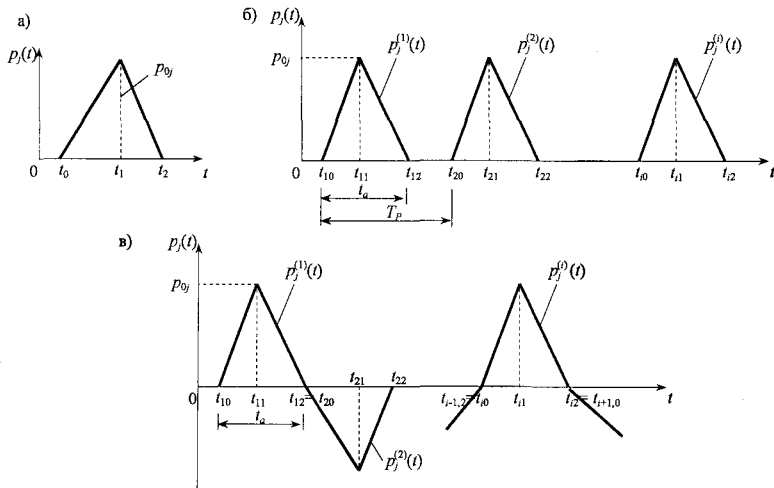


Рисунок 2 – Внешняя нагрузка на систему. Импульсы треугольной формы: а – одиночный, б – повторяющиеся, в - знакопередающиеся

При действии на систему одиночного импульса (рисунок 2а) с вектором амплитуд  $P_0 = [p_{01}, \dots, p_{0n}]^T$  выражения векторов перемещений и скоростей узлов системы на восходящей фазе действия нагрузки ( $t \in [t_0, t_1]$ ) определяются формулами:

$$Y(t) = 2 \operatorname{Re}\{Y^0(t) + [\Phi(t - t_0)(Et_0 + S^{-1}) - (Et + S^{-1})](US)^{-1} P_0 / t_1\},$$

$$\dot{Y}(t) = 2 \operatorname{Re}\{\dot{Y}^0(t) + [S\Phi(t - t_0)(Et_0 + S^{-1}) - E](US)^{-1} P_0 / t_1\}. \quad (9)$$

На нисходящем участке нагружения ( $t \in [t_1, t_2]$ ) полное выражение реакции системы будет

$$Y(t) = 2 \operatorname{Re}\{Y^0(t) + [\Phi(t - t_1)(E - Et_1 - S^{-1}) - (E - Et - S^{-1})](US)^{-1} P_0 \Delta t_{21}\},$$

$$\dot{Y}(t) = 2 \operatorname{Re}\{\dot{Y}^0(t) + [S\Phi(t - t_1)(E - Et_1 - S^{-1}) - E](US)^{-1} P_0 \Delta t_{21}\}. \quad (10)$$

Здесь  $\Delta t_{21} = t_2 - t_1$ ,  $E$  – единичная матрица порядка  $n$ ,  $Y^0(t)$ ,  $\dot{Y}^0(t)$  – выражения перемещений и скоростей при свободных колебаниях системы по аналогии с 4, 5.

Реакция системы после окончания действия нагрузки ( $t > t_2$ ) будет определяться выражениями:

$$Y(t) = 2 \operatorname{Re}\{\Phi(t - t_2)U^{-1}M[-\bar{S}Y_0 + \dot{Y}_0]\},$$

$$\dot{Y}(t) = 2 \operatorname{Re}[S\Phi(t - t_2)U^{-1}M(-\bar{S}Y_0 + \dot{Y}_0)], \quad (11)$$

в которых начальные условия вычислены в момент окончания действия нагрузки:  $Y_0 = Y(t_2)$ ,  $\dot{Y}_0 = \dot{Y}(t_2)$ .

Реакция от действия  $i$ -го импульса из группы периодических (рисунок 2б) или знакопеременных (рисунок 2в) определяется по аналогии с выражениями (9), (10) с учетом разницы обозначений. Перемещения и скорости узлов системы в периоды свободных колебаний между импульсами и после окончания действия нагрузки определяются по типу 11.

Таким образом, уравнения 9–11 позволяют в аналитическом виде вычислить параметры динамической реакции дискретной диссипативной системы при действии различных последовательностей треугольных импульсов.

На основании полученных зависимостей проведен анализ динамической реакции 18-этажного каркасного здания (рисунок 3) на действие различных динамических нагрузок, моделирующих действие ветра.

Для формирования исходных матриц  $M$ ,  $C$ ,  $K$  были приняты следующие данные: высота 1...4-го этажа 4,2 м, высота остальных этажей 3,3 м; шаг колонн 6,0 и 7,2 м; сечение колонн – стальной двутавр 40К1 ( $A = 175,8 \text{ см}^2$ ,  $J_x = 52400 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 17610 \text{ см}^4$ ,  $E_s = 2,05 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ ); перекрытия монолитные железобетонные толщиной 22 см ( $E_b = 3,0 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$ ). Жесткость ограждающих конструкций не учитывалась. Основная масса конструкции этажа сосредоточена в уровне перекрытий, образующих жесткий диск.

В ходе анализа получены следующие результаты.

1. Определены внешние (матрицы инерции, жесткости и демпфирования) и внутренние (собственные частоты колебаний и коэффициенты демпфирования) динамические параметры системы (рисунок 4).

2. Построены осциллограммы кинематических и силовых параметров реакции системы на действие одиночных импульсов различной длины  $t_a$ , периодических и повторяющихся знакопеременных импульсов с различными периодами  $T_p$  (рисунки 5, 6). Проведено сравнение результатов, полученных при решении задачи различными методами (рисунок 7).

3. Построены поверхности максимальных значений реакции здания при вариации таких параметров нагрузки, как угол атаки  $\alpha$ , длина импульса  $t_a$ , периодичность повторений  $T_p$  (рисунки 8...10).

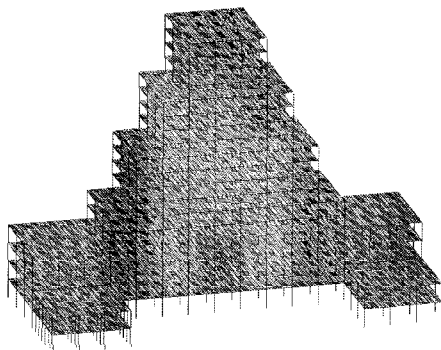


Рисунок 3 – Модель 18-этажного каркасного здания

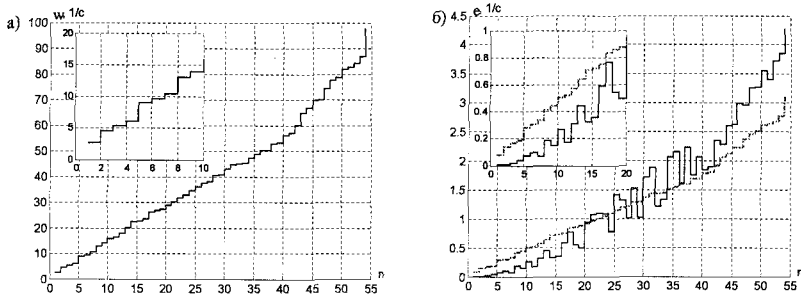


Рисунок 4 – Внутренние динамические характеристики здания:

а – собственные частоты  $\omega$ ,  $c^{-1}$ , б – коэффициенты демпфирования  $\epsilon$ ,  $c^{-1}$   
 (штрихпунктир соответствует модели А.И. Цейтлина)

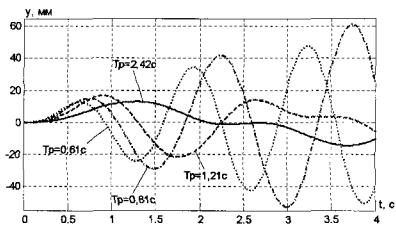


Рисунок 5 – Абсолютные перемещения центра 18-го этажй здания при действии знакопеременных импульсов с различной периодичностью  $T_p$  при  $\alpha = 90^\circ$

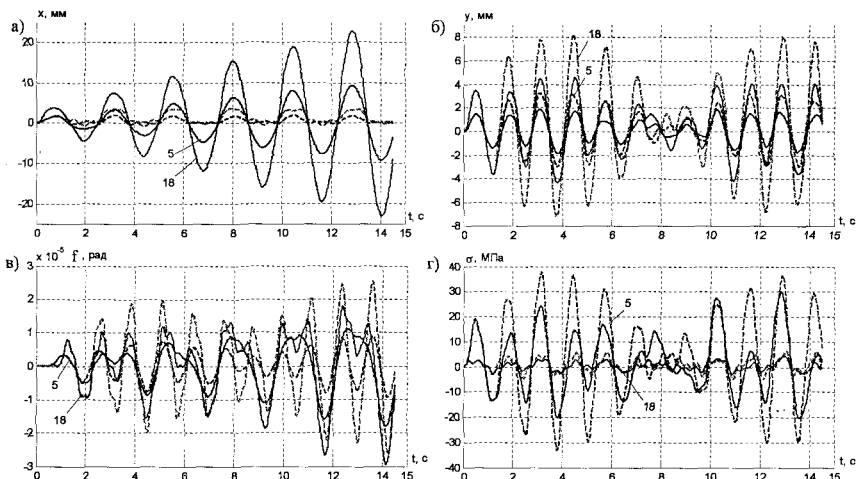


Рисунок 6 – Абсолютные перемещения (а...в) центров тяжести и напряжения (г) в колоннах 5 и 18-го этажей (цифры на графиках) здания при параметрах периодических импульсов:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $t_a = 0,3$  с,  $T_{P1} = 1,21$  с (пунктир),  $T_{P2} = 2,42$  с (сплошные)

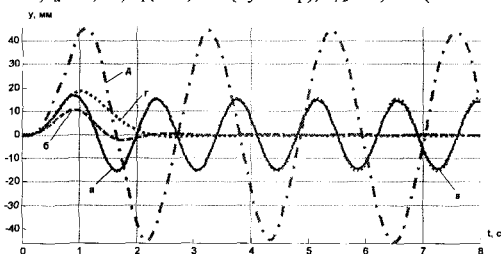


Рисунок 7 – Абсолютные перемещения центра тяжести 18-го этажа. Аналитический метод: а – непропорциональное демпфирование, б – однородное демпфирование, в – консервативная система; численный метод: г – однородное демпфирование, д – консервативная система.

На рисунок 7 представлена реакция системы на действие одиночного треугольного импульса ( $\alpha = 30^\circ$ ,  $t_a = 0,3$  с), вычисленная различными методами. Решение задачи о колебаниях консервативной системы численным методом (кривая д) отличается от результатов аналитического решения (кривая в) не только количественно, но и качественно. Несмотря на то, что внешняя нагрузка действует в плоскости  $yoz$  и должна вызвать колебания по второй форме с частотой  $\omega_2 = 4,4807 \text{ с}^{-1}$  ( $T_2 = 1,4023$  с), система совершает движение в плоскости  $yoz$ , но с частотой  $\omega_1 = 2,5946 \text{ с}^{-1}$  ( $T_1 = 2,4217$  с), соответствующей 1-й форме собственных колебаний в плоскости  $xoz$ .

Кривые б и г, полученные при рассмотрении систем с однородным типом демпфирования, не имеют принципиальных качественных отличий. Однако численный метод завышает максимальное перемещение в системе на 70,6% по сравнению с аналитическим решением.

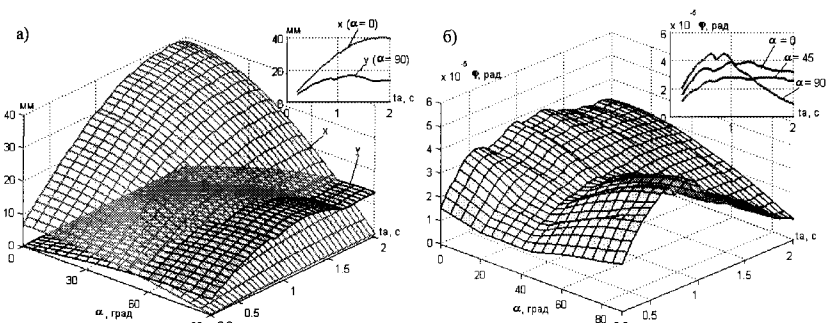


Рисунок 8 – Максимальные абсолютные перемещения центра тяжести 18-го этажа (а – линейные, б – угловые) при параметрах периодических импульсов:  $\alpha \in [0 \dots 90^\circ]$ ,  $t_a \in [0,2 \dots 2,0 \text{ с}]$ ,  $T_p = 2,1 \text{ с}$

В случае, когда нагрузка действует строго вдоль одной из осей, перемещения вдоль этой оси преобладают. При этом проявляются перемещения в поперечном направлении, вызванные переменной жесткостью здания по высоте и несовпадением центров тяжести и жесткости некоторых этажей. Большие значения перемещений вдоль оси  $x$  в сравнении с перемещениями вдоль оси  $y$  (рисунок 8) объясняются различием моментов инерции сечений колонн вокруг соответствующих осей и близостью выбранного периода внешней нагрузки  $T_p = 2,1 \text{ с}$  к периоду собственных колебаний здания в плоскости  $xoz$   $T_1 = 2,42 \text{ с}$ . С ростом длины действующих на систему импульсов  $t_a$  до некоторой величины значения абсолютных перемещений 18-го этажа возрастают. Однако при  $t_a > 1,25 \text{ с}$  начинают уменьшаться перемещения вдоль оси  $y$ , а при  $t_a > 1,85 \text{ с}$  и вдоль оси  $x$ . Очевидно этот эффект связан со скоростью приложения нагрузки и учитывался ранее с помощью коэффициента динамичности.

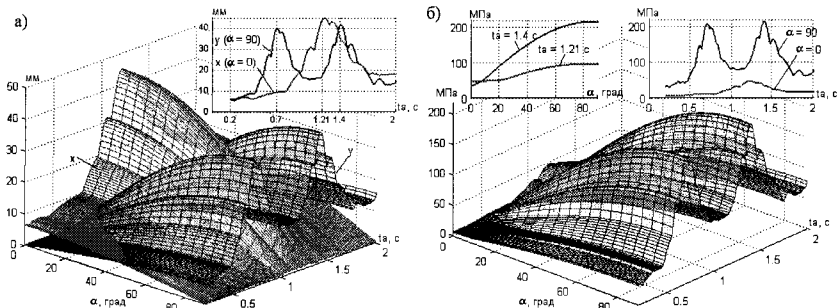


Рисунок 9 – Поверхности максимальных значений реакции (а – абсолютные перемещения центра тяжести 18-го этажа, б – нормальные напряжения в колоннах 1-го этажа) при параметрах периодических импульсов:  $\alpha \in [0 \dots 90^\circ]$ ,  $t_a \in [0,2 \dots 2,0 \text{ с}]$ ,  $T_p = 2$ ,  $t_a \in [0,4 \dots 4,0 \text{ с}]$

Всплески значений характеристик напряженно-деформированного состояния, наблюдаемые на рисунке 9, соответствуют следующим параметрам

нагрузки:  $t_a = 1,21$  с и  $T_p = 2,42$  с (перемещения вдоль оси  $x$ );  $t_a = 0,7$  с и  $T_p = 1,4$  с,  $t_a = 1,4$  с и  $T_p = 2,8$  с (перемещения вдоль оси  $y$ ). Увеличения обусловлены резонансными явлениями на 1-й ( $T_p = 2,42$  с), 2-й ( $T_p = 2,8$  с) и 5-й ( $T_p = 1,4$  с) частотах спектра собственных колебаний системы. Остальные всплески на графиках реакции соответствуют резонансам на более высоких частотах спектра.

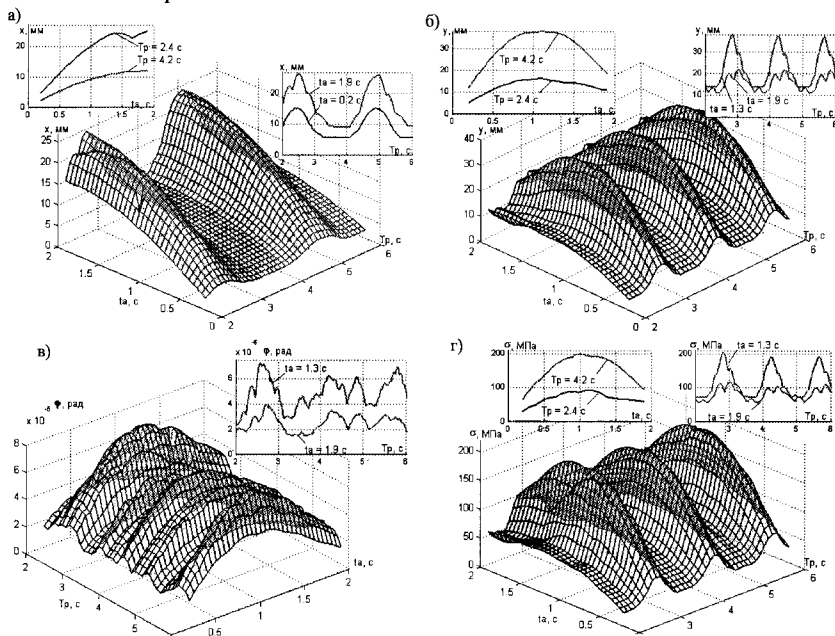


Рисунок 10 – Максимальные абсолютные перемещения центра тяжести 18-го этажа (а...в), максимальные нормальные напряжения в колоннах 1-го этажа (г) при параметрах периодических импульсов:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $t_a \in [0,2...1,9$  с,  $T_p \in [2,0...6,0$  с]

В рассматриваемом диапазоне значений периодов колебаний на поверхностях максимальных линейных перемещений 18-го этажа здания (рисунок 10) зарегистрировано пять всплесков, соответствующих значениям частот собственных колебаний системы в нижней части спектра или кратным им величинам:  $T_p = 2,4$  и  $4,8$  с соответствуют  $\omega_1 = 2,59$  с<sup>-1</sup>,  $T_1 = 2,42$  с (изгибная форма колебаний в плоскости  $xoz$ );  $T_p = 2,8$ ,  $4,2$  и  $5,6$  с соответствуют  $\omega_2 = 4,48$  с<sup>-1</sup>,  $T_2 = 1,40$  с (изгибная форма колебаний в плоскости  $yoz$ ). С увеличением периодичности  $T_p = kT_i$  ( $i = 1, 2$ ), кратной целому числу периодов низших форм колебаний  $T_1$  и  $T_2$ , амплитудные значения параметров реакции снижаются, так как существенно сказывается влияние сил демпфирования.

Приведенные результаты свидетельствуют о высокой эффективности временного анализа реакции конструкции пространственного типа при нестационарных воздействиях и вязкоупругом сопротивлении колебаниям.

**Четвертая глава** «Динамический расчет конструкций с нелинейной восстанавливающей силой» посвящена построению математической модели нелинейного расчета. Закон деформирования материала  $k$ -го элемента конструкции между восстанавливающей силой  $\eta_k(t)$  и относительным перемещением  $\xi_k(t)$  представляется кусочно-линейной аппроксимацией (рисунок 11). Величина  $\xi_{0k}$  на диаграмме характеризует предельное значение относительного перемещения концов  $k$ -го конструктивного элемента системы.

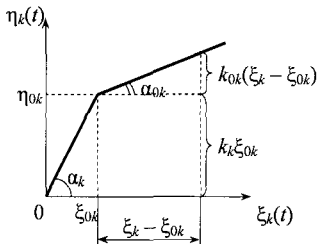


Рисунок 11 – Диаграмма жесткости «восстанавливающая сила – относительное перемещение»

$k$ -го конструктивного элемента системы:  $k_k = \text{tg} \alpha_k$  ( $\xi_k \leq \xi_{0k}$ );  $k_{0k} = \text{tg} \alpha_{0k}$  ( $\xi_k > \xi_{0k}$ )

В качестве механической интерпретации нелинейной работы  $k$ -го конструктивного элемента рассматривается механическая модель, состоящая из двух пружин (по числу участков диаграммы). Параметры жесткости пружин:  $k_k$  (для первого упругого участка) и  $k_{0k}$  (для второго участка). Пружина, соответствующая второму участку, обладает нелинейно-упругими свойствами как для системы с натягом, включающей механизм создания постоянной восстанавливающей силы. Основное свойство предложенной механической модели состоит в том, что обе пружины никогда не работают совместно. Они вступают в работу или выключаются из нее строго последовательно при условиях:  $\xi_k(t) \leq \xi_{0k}$  (работа первой пружины) или  $\xi_k(t) > \xi_{0k}$  (работа второй пружины).

Уравнение движения дискретной диссипативной системы представляется в следующем виде

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + R(t) = P(t),$$

$$R(t) = R^e(t) + R^0(t). \quad (12)$$

Здесь  $R^e(t)$  и  $R^0(t_i)$  – квазилинейная и предельная составляющая вектора восстанавливающих сил дискретной системы;  $t_i$  – время, при котором  $k$ -я обобщенная пружина включается в нелинейную работу.

Если в процессе реакции системы переход в новое промежуточное состояние на квазилинейном интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  происходит с понижением жесткости нелинейно-упругой связи ( $k$ -й пружины), то данный интервал времени называется интервалом нагрузки. Наоборот, если переход в новое квазилинейное состояние на интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  сопровождается повышени-



ем жесткости  $k$ -й нелинейно-упругой пружины, то данный интервал называется интервалом разгрузки.

Математические модели расчета на квазилинейных интервалах времени  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  (нагрузка) и  $t \in [t_j, t_{j+1}]$  (разгрузка) имеют следующий вид:

$$R^e(t) = K \cdot Y(t), \quad R^0(t_i) = 0, \quad \xi_k(t) \leq \xi_{0k} \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (13)$$

$$R^e(t) = K(t_i) \cdot Y(t), \quad R^0(t_i) = R^0(t_{i-1}) + \Delta K(t_i) Y(t_i), \\ \Delta K(t_i) = K(t_{i-1}) - K(t_i), \quad \xi_k(t) > \xi_{0k}, \quad \dot{\xi}_k(t) > 0; \quad (14)$$

$$R^e(t) = K(t_j) \cdot Y(t), \quad R^0(t_j) = R^0(t_{j-1}) + \Delta K(t_j) Y(t_j), \\ \Delta K(t_j) = K(t_{j-1}) - K(t_j), \quad \xi_k(t) < \xi_{0k}, \quad \dot{\xi}_k(t) < 0 \quad (t_j > t_i). \quad (15)$$

Выражения 13 суть условия упругой работы системы, которые выполняются для всех обобщенных пружин системы ( $k = 1, 2, \dots$ ). Формулы 14, 15 определяют условия нелинейно-упругой работы системы при нагрузке и разгрузке соответственно.

Нелинейная стадия работы системы на интервале нагрузки  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  14 связана с изменением (понижением) жесткости  $k$ -й обобщенной пружины в момент времени  $t_i$ . В этот момент происходит перестройка матрицы жесткости  $K(t_i)$  и матрицы-невязки  $\Delta K(t_i)$ . В результате вносятся изменения в квазилинейную и предельную составляющие вектора восстанавливающих сил. Величины  $K(t_i)$ ,  $\Delta K(t_i)$  и  $R^0(t_i)$  сохраняют постоянные значения на данном интервале вплоть до момента времени  $t_{i+1}$ , пока в нелинейную работу не вступит очередная обобщенная пружина. Работа системы на интервале разгрузки  $t \in [t_j, t_{j+1}]$  15 происходит аналогично предыдущему, но с повышением жесткости в  $k$ -й обобщенной пружине, при условии  $\xi_k(t) < \xi_{0k}$ ,  $\dot{\xi}_k(t) < 0$  ( $t_j > t_i$ ), где  $\dot{\xi}_k(t)$  – относительная скорость концов  $k$ -го конструктивного элемента (пружины).

Комплекс условий 13–15 позволяет для уравнения движения 12 реализовать задачу нелинейно-упругого анализа дискретной конструкции в процессе ее движения с билинейной диаграммой деформирования. Этот процесс технически осуществим для любой диссипативной системы, внутреннее трение которой подчиняется модели упруговязкого сопротивления, при этом действие произвольной динамической нагрузки может быть произвольным.

В качестве иллюстрации предложенного алгоритма нелинейно-упругого расчета дискретной диссипативной системы рассматриваются колебания трехэтажного каркасного здания (рисунок 12) под действием импульсной нагрузки.

Диаграмма деформирования материала колонн и соответствующая ей диаграмма жесткости  $k$ -го элемента каркаса представлены на рисунке 13. Модуль упругости материала колонн равен  $E_1 = 2,06 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup> и  $E_2 = 1,72 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup> на I и II-й стадиях деформирования соответственно.

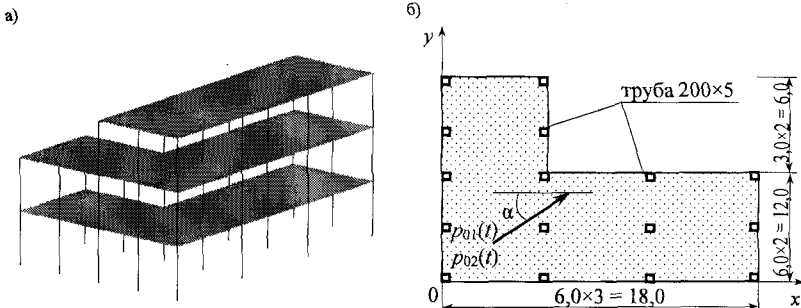


Рисунок 12 – Модель 3-этажного каркасного здания:  
а – общий вид, б – план 1 и 2-го этажей

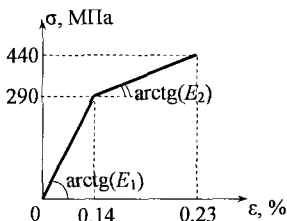


Рисунок 13 – Диаграмма деформирования материала

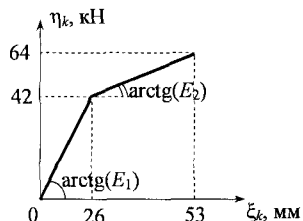


Рисунок 14 – Диаграмма жесткости  $k$ -го элемента

В качестве нагрузки рассмотрено действие на систему одного импульса синусоидальной формы длиной  $t_a = 0,7$  с, углом атаки  $\alpha = 75^\circ$ . Амплитудные значения описываются вектором  $P_0 = [32, 173, 41, 224, 22, 224, -9, -41, 0]$  (кН, кНм). Здесь первые 6 элементов – силы, соответствующие линейным степеням свободы каждого из трех этажей, последние три – моменты, соответствующие угловым степеням свободы. Общее время анализа реакции системы  $t_{end} = 8$  с, шаг временного анализа  $\Delta t = 0,0145$  с.

В результате анализа получены осциллограммы кинематических и силовых параметров реакции системы. На рисунках 15, 16 представлены результаты в направлении оси  $y$ . Цифрами обозначены номера этажей, пунктиром показана реакция линейно-упругой системы. Изменение матрицы жесткости и внутренних динамических характеристик системы в процессе реакции показано на рисунках 17, 18.

Реакцию каркасного здания на действие импульсной нагрузки можно разделить на несколько этапов, каждый из которых характеризуется постоянством матриц-коэффициентов уравнения движения 12. Переход от одного этапа к другому происходит вследствие достижения некоторыми элементами предельных перемещений и изменения их модуля упругости.

1. Упругая работа каркаса в  $I$ -й стадии  $t \in [0, 0,338]$  с. Начальные перемещения и скорости нулевые. Модуль упругости всех элементов каркаса равен  $E_1 = 2,06 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup>. Первоначальные матрицы  $M$ ,  $C$  и  $K$  сформированы на

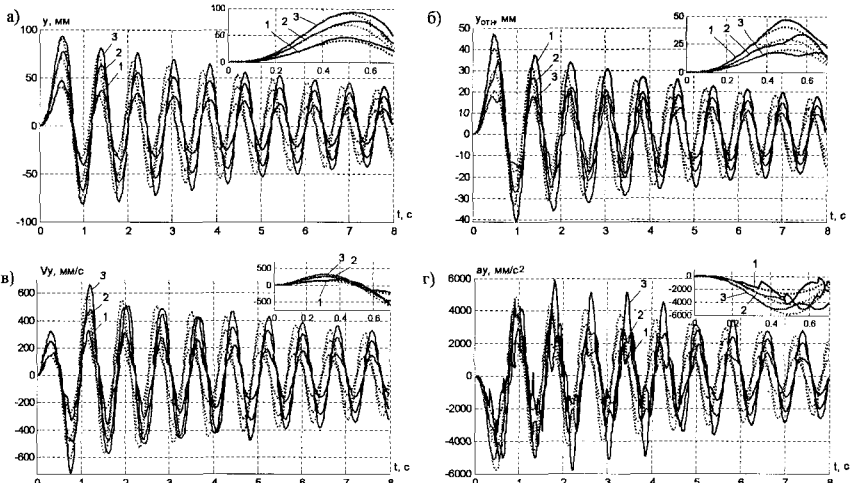


Рисунок 15 – Кинематические параметры реакции системы: абсолютные (а) и относительные (б) перемещения, скорости (в) и ускорения (г) центров тяжести этажей (цифрами обозначены номера этажей)

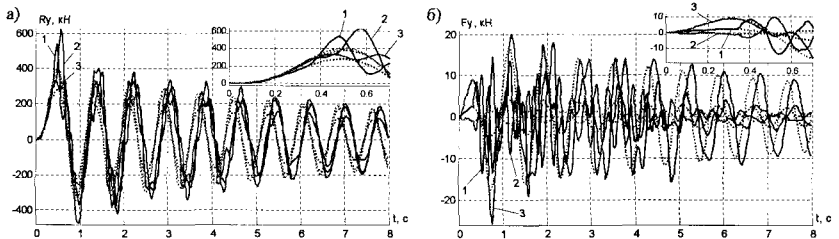


Рисунок 16 – Силловые параметры реакции системы: восстанавливающие (а) и диссипативные (б) силы в центрах тяжести этажей (цифрами обозначены номера этажей)

основе инерционных и жесткостных характеристик системы. Параметры реакции системы определяются уравнениями 13.

2. Переход 1-го этажа во II-ю стадию  $t \in [0,338, 0,476]$  с. Относительные смещения концов колонн 1-го этажа в момент времени  $t_1 = 0,338$  с достигают предельных значений  $\xi_k = 26$  мм, что приводит к качкообразному снижению их модуля упругости на  $E_2 = 1,72 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup> и изменению матрицы жесткости системы, частот собственных колебаний и коэффициентов демпфирования. Параметры реакции системы определяются по формулам 14.

3. Переход 2-го этажа во II-ю стадию  $t \in [0,476, 0,652]$  с. В момент времени  $t_2 = 0,476$  с относительные смещения концов колонн 2-го этажа достигают предельных значений  $\xi_k = 26$  мм, после чего их модуль упругости также снижается до  $E_2 = 1,72 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup>. Вновь определяются матрица жесткости и внутренние динамические параметры системы. Параметры реакции системы

определяются по формулам 14 с учетом изменений. Максимальные перемещения возникают в момент времени  $t = 0,539$  с, после этого система начинает возвращаться к положению равновесия. Начинается период разгрузки.

4. Возвращение 2-го этажа в 1-ю стадию  $t \in [0,652, 0,684]$  с. При  $t_3 = 0,652$  с относительные смещения концов колонн 2-го этажа снижаются до значения  $\xi_k = 26$  мм, их модуль упругости принимает первоначальное значение  $E_1 = 2,06 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup>. Частоты и коэффициенты демпфирования, как и матрица жесткости, принимают значения, аналогичные второму этапу. Параметры реакции системы определяются уравнениями 15.

5. Возвращение 1-го этажа в 1-ю стадию  $t \in [0,684, 0,874]$  с. Дальнейшее движение системы вызывает восстановление модуля упругости 1-го этажа (при  $t_4 = 0,684$  с), что приводит полному восстановлению жесткости всей системы. Матрица жесткости и внутренние динамические параметры системы принимают первоначальные значения.

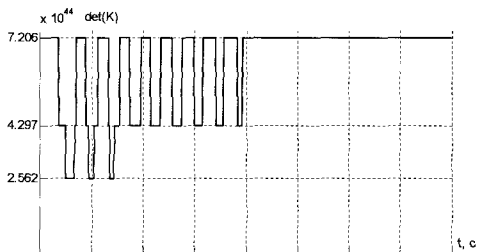


Рисунок 17 – Определитель матрицы жесткости  $K$

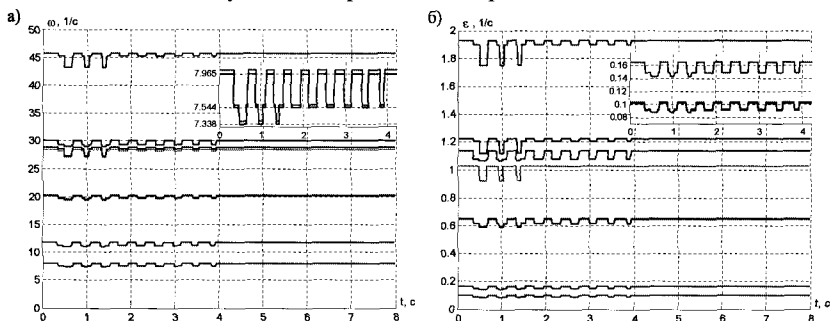


Рисунок 18 – Внутренние динамические параметры системы:

а – собственные частоты  $\omega$ , с<sup>-1</sup>, б – коэффициенты демпфирования  $\epsilon$ , с<sup>-1</sup>

При  $t = 0,773$  с система переходит положение нулевого равновесия и начинает движение в противоположную сторону (новый период нагрузки). Второй и третий полуциклы колебаний имеют аналогичные описанным этапам последовательного включения в нелинейную работу 1-го и 2-го этажей и их восстановления. В 4...9-м полуциклах колебаний модуль упругости снижается только в колоннах 1-го этажа.

Предложенные математические модели позволяют реализовать следующую расчетную схему нелинейно-упругого временного анализа. Весь процесс по вычислению реакции диссипативной системы разбивается на такие интервалы времени  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), внутри которых динамические параметры системы являются неизменными. Вследствие этого на каждом отдельном интервале уравнения движения интегрируются по схеме упругого решения. Временные точки  $t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots$ , принадлежащие границам интервалов, заранее неизвестны и определяются в ходе шагового процесса. В этих точках полученные уравнения реакции на смежных участках сопрягаются с помощью начальных условий, что обеспечивает непрерывность движения. Таким образом, задача построения нелинейной реакции системы сводится к однотипному процессу многократно повторяющихся различных квазилинейных решений. Это делает данный подход доступным для практического применения, вследствие своей алгоритмичности.

Определение динамической реакции каркасных зданий при различных параметрах внешнего импульсного воздействия осуществлялось с помощью вычислительного комплекса «АРПО».

**В заключении** сформулированы основные результаты, полученные в работе. **В Приложение 1** вынесены численные значения внешних и внутренних динамических характеристик расчетной динамической модели 18-этажного каркасного здания, рассматриваемой в Главе 3. **В Приложении 2** приведен программный код вычислительного комплекса по динамическому расчету многоэтажных каркасных зданий при нестационарном процессе «АРПО» для решения упругой и нелинейно-упругой задач.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Получены новые знания о влиянии характера горизонтальных динамических воздействий на вынужденные колебания многоэтажных каркасных зданий в линейной и нелинейной постановках задачи.

Основные результаты и выводы состоят в следующем.

1. Исследованы важные для приложений динамики сооружений частные случаи интеграла Дюамеля при действии импульсов треугольной формы. Построена замкнутая форма упругой реакции системы для случая одиночного и серии периодических импульсов, включая знакопередающееся нагружение. Полученные уравнения позволяют в аналитическом виде давать оценку динамической реакции конструкции, находящейся в сложных условиях нагружения.

2. Построена расчетная динамическая модель многоэтажного каркасного здания, деформирующегося по форме сдвига, предназначенная для восприятия горизонтальной нагрузки. Составлены матрицы, определяющие внешние динамические параметры модели: матрицы инерции, жесткости и демпфирования. Построенная модель позволяет выполнять динамический расчет на ветровые, сейсмические и взрывные воздействия.

3. Построена расчетная схема временного анализа и созданы математические модели расчета многоэтажного каркаса с нелинейно-упругой восстанавливающей силой для диаграммы деформирования материала, аппроксимированной кусочно-линейной зависимостью. Согласно расчетной схеме весь процесс анализа по времени разбивается на такие интервалы, в пределах которых динамические параметры расчетной модели неизменны, что позволяет использовать схему упругого решения на основе интеграла Дюамеля.

4. Проведенный анализ упругой реакции 18-этажного каркасного здания как системы с 54 степенями свободы на действие динамической нагрузки с различными параметрами нагружения показал высокую эффективность применяемого аналитического метода. В отличие от широко используемых численных методов данный подход позволяет учитывать непропорциональное демпфирование в системе и получать более точное качественное и количественное решение динамических задач. Максимальные абсолютные перемещения каркаса при расчетах в МК АРПО в 1,7...2,7 раза (с учетом и без учета внутреннего трения) ниже аналогичных параметров, полученных при решении задачи средствами ПК Лира, затраты компьютерного времени также меньше в 6-7 раз.

5. Решена задача о колебаниях трехэтажного каркасного здания с нелинейной зависимостью восстанавливающей силы от жесткости при действии импульсной нагрузки. Анализ результатов показывает, что снижение жесткости элементов системы на 20% влечет за собой увеличение максимальных перемещений на 16,9%, скоростей на 19,7%, ускорений на 38,5%.

6. Разработаны алгоритмы и прикладные программы по выполнению временного анализа упругой и нелинейно-упругой реакции каркасных многоэтажных зданий на динамические воздействия. Программы позволяют определять параметры напряженно-деформированного состояния каркасных многоэтажных зданий при действии ветровых, сейсмических и ударных нагрузок. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008610575 от 31.01.2008.

Таким образом, в диссертации дано приложение нового метода временного анализа реакции каркасных многоэтажных зданий на нестационарную нагрузку при общих предпосылках динамической задачи.

### **Основное содержание диссертации опубликовано в следующих научных работах:**

1. Артемьева, Л.М. Динамический расчет многоэтажного каркасного здания на действии импульсов синусоидальной формы / Л.М. Артемьева // Вестник ЮУрГУ, серия «Строительство и архитектура». Вып. 3. – Челябинск: ЮУрГУ. – 2005. – № 13 (53). – С.52-56.

2. Потапов А.Н. Вынужденные колебания конечномерной системы с упруговязким сопротивлением при импульсном воздействии / А.Н. Потапов, Л.М. Артемьева // Известия вузов. Строительство. – 2007. – №4. – С. 27-33. (вклад автора 65%)

3. Потапов, А.Н. Вынужденные колебания каркасных зданий при периодических воздействиях / А.Н. Потапов, Л.М. Артемьева // Вестник ЮУрГУ, серия «Строительство и архитектура». Вып. 5. – Челябинск: ЮУрГУ. – 2007. – № 22 (94). – С. 51-53. (вклад автора 70%)

4. Потапов, А.Н. Временной анализ каркасных зданий из нелинейно-упругого материала / А.Н. Потапов, Л.М. Артемьева // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2008. – Vol. 4(2). – P. 98-99. (вклад автора 75%)

5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008610575 от 31.01.2008. Вычислительный комплекс по динамическому расчету многоэтажных каркасных зданий при нестационарном процессе «АРПО» (версия 1.0) / А.Н. Потапов, Л.М. Артемьева. – заявл. № 2007614850 от 04.12.2007; опублик. 20.06.2008, Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам № 2 (63). – с. 137. (вклад автора 80%)

6. Артемьева, Л.М. Временной анализ реакции высотных сооружений на динамическое действие ветра / Л.М. Артемьева // Вестник УГТУ-УПИ № 11 (41) Строительство и образование: Сб. науч. тр. – Екатеринбург: ГОУ ВПО «УГТУ-УПИ». – 2004. – Вып. 7. – С. 103-105.

7. Артемьева, Л.М. Построение исходных матриц дифференциального уравнения движения дискретной диссипативной конструкции / Л.М. Артемьева // Южно-Ур. гос. ун-т: Челябинск, 2006. – 9 с. Деп. в ВИНТИ 03.07.2006, № 883-В2006.

8. Потапов, А.Н. Временной анализ диссипативной системы на действие импульсной нагрузки / А.Н. Потапов, Л.М. Артемьева // Сб. тез. докл. науч.-техн. конф., 11-13 апреля, 2006. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. – С. 1-2. (вклад автора 60%)

9. Потапов, А.Н. Математические модели нелинейного расчета конечномерной диссипативной конструкции / А.Н. Потапов, Л.М. Артемьева, В.В. Колтан // Южно-Ур. гос. ун-т: Челябинск, 2008. – 11 с. Деп. в ВИНТИ 10.07.2008, № 597-В20008. (вклад автора 60%)

10. Потапов, А.Н. Математические модели нелинейного расчета диссипативной конструкции / Всероссийская конференция «Актуальные проблемы строительной отрасли»: математика, компьютерные технологии и автоматизированные системы проектирования // А.Н. Потапов, Л.М. Артемьева. – Сб. тез. докл. науч.-техн. конф., 8-10 апреля, 2008. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2008. – С. 177-178. (вклад автора 60%)