На правах рукописи

Богатырева Екатерина Александровна

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ И ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
доцент Манакова Наталья Александровна.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Сукачева Тамара Геннадьевна,
ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», кафедра алгебры и геометрии, зав. кафедрой;

доктор физико-математических наук,
профессор Кризский Владимир Николаевич,
ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», Стерлитамакский филиал, кафедра математического моделирования, профессор.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова».

Защита состоится 25 декабря 2015 года в 10:00 на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте: http://susu.ac.ru/ru/dissertation/d-21229814/bogatyreva-ekaterina-aleksandrovna/.

Автореферат разослан 23 октября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена аналитическому и численному исследованиям одного класса нелинейных математических моделей, основанных на неклассических уравнениях в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени. Актуальность изучения такого рода математических моделей обусловлена необходимостью решения важных прикладных задач в гидродинамике и электродинамике. Ранее такие математические модели рассматривались в работах Г.И. Баренблатта, А.А. Гильмана, А.П. Винниченко, В.М. Рыжика, В.М. Ентова, J. Garsia-Azorero, T.V. Patzek, Т.А. Файзулина, М.О. Корпусова, В.Н. Кризского и других авторов.

Нелинейные модели описывают физический процесс качественнее, чем более простые линейные аналоги, однако их нелинейная структура вызывает значительные трудности при аналитическом и численном исследованиях. При этом нахождение аналитических решений, как правило, невозможно, и возникает необходимость в разработке численных методов нахождения приближенных решений для таких моделей с начальными условиями и комплексов программ для них. Применение известных численных методов для нелинейных моделей зачастую невозможно, поэтому на первый план выходят вопросы построения новых численных методов для таких моделей, доказательства их сходимости и проверка адекватности получаемых результатов.

Как правило, аппарат исследования разрабатывается для каждой отдельно взятой нелинейной модели. Особенностью диссертационной работы является построение общего метода исследования изучаемых математических моделей с начальными условиями как задач Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа. Нелинейные уравнения соболевского типа рассматриваются, например, в работах R.E. Showalter, А.Г. Свешникова, M. Ptashnyk, N. Seam, G. Vallet и других авторов. Исследованию уравнений соболевского типа и их приложений посвящено большое количество работ как российских (Г.В. Демиденко, С.В. Успенского, Н.В. Сидорова, М.В. Фалалеева, И.В. Мельниковой, В.Н. Врагова, С.Г. Пяткова, А.И. Кожанова, Г.А. Свиридюка, Т.Г. Сукачевой, В.Е. Федорова, В.Ф. Чистякова и многих других), так и зарубежных авторов (A. Favini, A. Yagi, S. Mesloub, T. Hayat и другие). Представим математические модели, исследуемые в работе.

Математическая модель неравесной противоточной капиллярной пропитки. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса

C^∞. В цилиндре $\Omega \times (0,T)$, $T \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим уравнение

$$x_t - \lambda\alpha(\Delta\Phi(x))_t = \alpha\Delta\Phi(x) \tag{1}$$

с условием Дирихле

$$x(s,t) = 0, (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{2}$$

Искомая функция $x = x(s,t)$ соответствует насыщенности. Функция $\Phi(x) \equiv \equiv |x|^{p-2}x, p > 2$ – монотонно возрастающая и гладкая. Параметры α и λ вещественны, положительны, характеризуют свойства фаз и среды. Уравнение (1) впервые получено Г.И. Баренблаттом и А.А. Гильманом[1]. Математическая модель (1), (2) рассматривалась в линеаризованном виде Т.А. Файзулиным, что позволило получать приближенно-аналитические решения. Модель (1), (2) описывает совместную фильтрацию пары жидкостей в пористой среде (например, воды и нефти в коллекторе при нефтедобыче) под действием капиллярных сил. Актуальным вопросом является определение минимального внешнего воздействия на данный процесс в начальный момент времени с целью достижения требуемой насыщенности в пласте в конечный момент времени. Для этого рассмотрим **математическую модель начального регулирования неравесной противоточной капиллярной пропитки,** которая строится на основе задачи стартового управления и финального наблюдения

$$\begin{gathered} x(s,0) = u(s),\ s \in \Omega, \\ J(\hat{x}(T),\hat{u}) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{U}\times U_{ad}} J(x(T),u) \end{gathered} \tag{3}$$

для математической модели (1), (2). Здесь J – некоторый специальным образом построенный функционал, U_{ad} – непустое выпуклое и замкнутое множество, $\hat{u}$ – стартовое управление. Математическая модель (1) – (3) описывает ситуацию, когда момент наблюдения результата отделен по времени от начального кратковременного управляющего воздействия, что хорошо согласуется с особенностями модели (1), (2).

Модель квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии. В цилиндре $\Omega \times T$ рассмотрим неклассическое уравнение

$$(\Delta x - \Phi(x))_t = \Phi(x), \tag{4}$$

[1]Баренблатт, Г.И. Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Г.И. Баренблатт, А.А. Гильман // Инженер.-физ. журн. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 456–461.

моделирующее квазистационарный процесс с учетом релаксации в проводящей среде без дисперсии, с условием Дирихле (2). Здесь Ω – область идеальной проводимости, искомая функция $x = x(s,t)$ соответствует потенциалу электрического поля, $\Phi(x) \equiv |x|^{p-2}x, p > 2$ – монотонно возрастающая и гладкая функция. Данная математическая модель была предложена М.О. Корпусовым, А.Г. Свешниковым[2]. Модель (2), (4) с условием Коши

$$x(0) = x_0 \tag{5}$$

впервые была рассмотрена М.О. Корпусовым[3], при некоторых условиях на данные задачи была доказана глобальная резрешимость в сильном обобщенном смысле.

Рассмотренные модели с условием Коши в специальным образом подобранных функциональных пространствах могут быть редуцированы к начальной задаче (5) для абстрактного операторного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) = 0,\ L(x) = Ax + \lambda M(x),\ \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Записав уравнение (6) в виде

$$N(x)\dot{x} + M(x) = 0, \tag{7}$$

где $N(x) = L'_x$ – производная Фреше оператора L, получим уравнение соболевского типа. Поэтому уравнение (7), его прообраз (6), а также уравнения (1) и (4) называются *квазилинейными уравнениями соболевского типа.* Отметим, что в таком контексте уравнения (1), (4), (6), (7) рассматриваются впервые.

Целью работы являются аналитическое и численное исследования математических моделей двухфазной фильтрации и квазистационарного процесса в проводящей среде на основе квазилинейных уравнений соболевского типа с последующей реализацией алгоритмов численного решения в виде комплекса программ.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:
1. Разработать метод аналитического исследования математических моделей, основанных на квазилинейных уравнениях соболевского типа.

[2]Корпусов, М.О. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии / М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер, А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, № 8. – С. 1237–1249.

[3]Корпусов, М.О. «Разрушение» решения псевдопараболического уравнения с производной по времени от нелинейного эллиптического оператора / М.О. Корпусов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 12. – С. 1788–1795.

2. Исследовать с помощью разработанного аналитического метода математические модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки, начального регулирования неравновесной противоточной капиллярной пропитки.
3. Исследовать с помощью разработанного аналитического метода математическую модель квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии.
4. Разработать методы нахождения численного решения модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки и модели квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии с условием Коши, доказать сходимость численных методов.
5. Реализовать в виде программ для ЭВМ алгоритмы разработанных методов. Провести вычислительные эксперименты для модельных задач, подтверждающие эффективность предложенных методов и алгоритмов.

Научная новизна. *В области математического моделирования:*

Впервые предложен общий метод исследования квазилинейных математических моделей, описывающих процессы гидродинамики и электрического поля, основанных на квазилинейных уравнениях соболевского типа. Создана теоретическая основа для численного исследования изучаемых моделей: доказаны теоремы существования и единственности решений задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа.

В области численных методов:

Разработаны алгоритмы численных методов, позволяющие находить приближенные решения изучаемых квазилинейных моделей математической физики с условием Коши. Установлена сходимость приближенных решений к точному.

В области комплексов программ:

Разработан комплекс программ нахождения приближенного решения квазилинейных математических моделей соболевского типа с условием Коши, позволяющий проводить вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач, исследовать эффективность предложенных алгоритмов, методов, подходов.

Методы исследования. Основными методами исследования являются метод редукции изучаемых математических моделей с условием Коши к начальной задаче для квазилинейного уравнения соболевского типа и метод априорных оценок. Кроме того, в работе широко используются метод компактности, теория s-монотонных и p-коэрцитивных операторов[4]. При разработке алгоритмов численных методов нахождения приближенного решения используются модифицированные методы Галеркина, Розенброка, метод Рунге – Кутты, а также метод прямых.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы, полученные при исследовании математических моделей, вносят вклад в теорию нелинейных уравнений соболевского типа, получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа, построены численные методы решения задачи Коши для таких уравнений, доказана сходимость численных методов. Алгоритмы численных методов реализованы программно и позволяют получать численное решение и наглядное представление о поведении приближенных решений моделей двухфазной фильтрации и квазистационарного процесса в проводящей среде с условием Коши в графическом виде. Результаты, полученные при исследовании математических моделей, могут быть полезны в гидродинамике, в геологии при изучении фильтрации воды в почве, в нефтедобыче, электродинамике, электротехнике. Кроме того, полученные результаты создают основу для исследования других нелинейных неклассических моделей математической физики.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на конференциях: Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы, развитие» (г. Челябинск, 2012), конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (Новосибирск, 2013), Научно-практической конференции студентов, аспирантов, молодых ученых в ЮУрГУ (Челябинск, 2013 и 2014), XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014), Всероссийской конференции с международным участием «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященная памяти В.К. Иванова (Челябинск, 2014), Международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования» (Москва, 2014), Международной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (Уфа, 2015). Результаты неоднократно докладывались на областном семинаре профессора Г.А. Свиридюка, посвященном уравнениям соболевского типа, на семинаре кафедры Математики Физического факультета

[4]Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 2. С. 55–61.

МГУ им. Ломоносова под руководством профессора Н.Н. Нефедова. Результаты диссертационного исследования были представлены и обсуждены на Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2015).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 15 научных работах, в их числе 3 статьи [1 – 3] в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ, и 1 свидетельство [4] о государственной регистрации программы для ЭВМ. Список работ приводится в конце автореферата. Из работ [1, 2, 5, 6, 8, 10 – 15], выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором лично.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 110 страниц. Список литературы содержит 108 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования.

Первая глава состоит из пяти параграфов. Она посвящена исследованию квазилинейных математических моделей соболевского типа. Первый параграф содержит определения, теоремы и вспомогательные утверждения, с опорой на которые получены основные результаты исследования, и носит вспомогательный характер. Второй параграф посвящен исследованию вопроса локальной и глобальной разрешимости задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа.

Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным и оснащенное дуальной парой рефлексивных банаховых пространств $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{U}, \|\cdot\|)$ и $\mathfrak{U}^* \equiv (\mathfrak{U}, \|\cdot\|_*)$ так, что имеют место непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$. Пусть оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, а оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$.

Определение 1. (1.2.1)[5] Вектор-функцию $x \in C^1((0,T_0);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую (7) на $(0,T_0)$ при некотором $T_0 = T_0(x_0)$ и условию (5), назовем *классическим локальным решением* задачи (5), (7).

[5]В скобках указана нумерация в диссертации.

Теорема 1. (1.2.1) Пусть в $x_0 \in \mathfrak{U}$ оператор $N(x_0) : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$ – топлинейный изоморфизм. Тогда существует единственное локальное решение задачи (5), (7).

Рассмотрим пространство $H = \{x : x \in L_\infty(0,T;\mathfrak{U}), x_t \in L_2(0,T;\mathfrak{H})\}$.

Определение 2. (1.2.2) Вектор-функцию $x \in H$ при $T \in \mathbb{R}_+$, назовем *слабым обобщенным решением задачи (5), (6),* если она удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} \left\langle \tfrac{d}{dt}L(x(t)), v\right\rangle + \langle M(x(t)), v\rangle = 0, \text{ при п. в. } t \in (0,T), \\ \langle x(0) - x_0, v\rangle = 0, \forall v \in \mathfrak{U}. \end{gathered} \tag{8}$$

Теорема 2. (1.2.2) Пусть оператор M s-монотонен, p-коэрцитивен и однороден порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, причем его производная Фреше симметрична, оператор A положительно определен и симметричен. Пусть на некотором интервале $(0,T_0), T_0 \in \mathbb{R}_+$, существует единственное локальное решение задачи (5), (6). Тогда существует слабое обобщенное решение задачи (5), (6) на $(0,T)$ при любом $T \in \mathbb{R}_+$.

В третьем параграфе получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (5), (6).

Условие 1. (1.3.1) Будем говорить, что оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$ удовлетворяет условию 1, если $\exists F(s) \geq 0$ при п.в. $s \in [0,\infty)$, такая что $F(s) \in C[0,\infty)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль, и для п.в. $s_0 \in [0,\infty)$, для любых $u = u(s_0), v = v(s_0) \in \mathfrak{U}$ выполняется

$$\|M(u) - M(v)\|_* \leq F(s_0)\|u - v\|.$$

Теорема 3. (1.3.1) Пусть выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, оператор M удовлетворяет условию 1. Тогда для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное слабое обобщенное решение $x \in H$ задачи (5), (6).

В четвертом параграфе строится метод нахождения приближенного решения задачи Коши, доказывается его сходимость.

Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ и $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств.

Условия (A):

A1. Вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{P} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{P}^* \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$ плотны и непрерывны.

A2. Пространство $\mathfrak{U}$ сепарабельно.

A3. Вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{P}$ компактно.

Условие (B):
B1. Оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$ симметричен, положительно определен.
Условия (C):
C1. Оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, s-монотонен, однороден порядка k.
C2. Оператор M удовлетворяет условию 1.
C3. $\exists\, C^M > 0, p \geq 2$ такие, что $\|M(u)\|_* \leq C^M \|u\|^{p-1}\, \forall u \in \mathfrak{U}$, $\langle M(u), u\rangle \geq 0$.
C4. Производная Фреше оператора M симметрична.

Пусть выполнены условия (A) – (C). Выберем в $\mathfrak{U}$ счетную всюду плотную ортонормальную систему функций $\{w_k\}$. Построим приближения решения задачи (5), (6) в виде $x_m = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k$, где коэффициенты $c_{mk} \in$ $\in C^1[0, T_{m0}]$ определяются следующей задачей

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T (\tfrac{d}{dt}\langle Ax_m + \lambda M(x_m), w_k\rangle + \langle M(x_m), w_k\rangle)\varphi(t)dt = 0,\ \forall \varphi \in L^2(0,T),\\ x_{m0} = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k \to x_0 \text{ в } \mathfrak{U} \text{ при } m \to \infty.\end{gathered} \tag{9}$$

Теорема 4. (1.4.1) Пусть выполнены условия (A) – (C), тогда для любого $x_0 \in \mathfrak{U}$ и для любого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи (5), (6).

Теорема 4 показывает сходимость последовательности приближенных решений к точному. В пятом параграфе описан алгоритм проекционного численного метода решения задачи (5), (6). Ниже приводится его краткое описание. В пространстве $\mathfrak{U}$ выбирается счетная всюду плотная ортонормальная система функций $\{w_i(s)\}$. Приближенное решение задачи (5), (6) ищется в виде суммы

$$\tilde{x}(s,t) = x_m(s,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(t) w_i(s), m \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

После подстановки суммы (10) в уравнение (6) и умножения полученной системы скалярно в $\mathfrak{H}$ на $w_i(s)$, численно решается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $c_{mi}(t)$

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}\langle Ax_m + \lambda M(x_m), w_i\rangle + \langle M(x_m), w_i\rangle = 0,\\ \langle x_m(0) - x_0, w_i\rangle = 0, i = 1, \ldots, m.\end{gathered} \tag{11}$$

Вторая глава содержит результаты исследования математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки и состоит из пяти параграфов. В первом параграфе проводится и обосновывается редукция математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки к уравнению (6).

Второй параграф посвящен аналитическому исследованию математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки. Доказываются теоремы об однозначной локальной и глобальной разрешимости задачи Коши для уравнения (1).

Теорема 6. (2.2.2) Пусть $p > 2$ и $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого $x_0 \in L_p(\Omega)$ и для любого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное слабое обобщенное решение $x \in H$ задачи (1), (2), (5).

В третьем параграфе исследуется задача начального регулирования насыщенности в математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки (1) – (3) на основе задачи стартового управления и финального наблюдения

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}(L(x)) + M(x) = 0,\ x(0) = u, \\ J(\hat{x}(T), \hat{u}) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{U}\times U_{ad}} J(x(T), u), \end{gathered} \tag{12}$$

где $J(x(T), u)$ – ограниченный снизу полунепрерывный снизу коэрцитивный функционал.

Определение 3. (2.3.1) Пару $(\hat{x}, \hat{u}) \in H \times \mathfrak{U}_d$ будем называть решением задачи (12), если

$$J(\hat{x}(T), \hat{u}) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{U}\times U_{ad}} J(x(T), u)$$

и $\hat{x}$ удовлетворяет (6) в смысле определения 2.

Теорема 7. (2.3.1) Пусть выполнены условия (A) – (C), тогда при любом $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (12).

Построим функционал

$$J(x, u) = \|x(s, T) - x_d(s)\|^q_{\overset{0}{W}{}^1_q(\Omega)} + \|u(s)\|^q_{\overset{0}{W}{}^1_q(\Omega)}.$$

Теорема 8. (2.3.2) Пусть $1 < q \leq n$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$, и $q < n$, $2 < p < \frac{2q}{n-q}$, или $n = q$, $p \in (2, +\infty)$. Тогда при любом $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (1) – (3).

Четвертый параграф посвящен описанию алгоритма программы для численного исследования математической модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки на основе разрботанного проекционного метода.

В пятом параграфе приведены результаты вычислительных экспериментов для модельных примеров.

Пример 1. Требуется найти приближенное решение задачи (1), (2) с начальным условием $x(r,0) = 1 - r^2$, $r \in [0,1)$. Решение ищется в виде суммы

$$x_m(r,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(t) \frac{J_0(\mu_0^i r)}{B_i},$$

где $B_i = \frac{1}{2} J_1^2(\mu_0^i)$ – норма функции $J_0(\mu_0^i r)$ с весом r в $L_2(\Omega)$, J_i – функция Бесселя i-го порядка, μ_0^i – i-ый нуль функции J_0. Результатом работы программы является приближенное решение, график которого в разные моменты времени приведен на рис. 1.

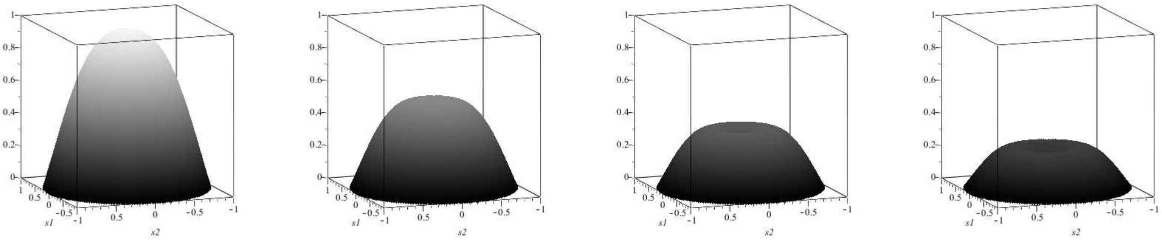

Рис. 1. Приближенное решение в моменты времени $t = 0$, $t = 2.5$, $t = 5$, $t = 10$

Третья глава состоит из семи параграфов и содержит результаты исследования математической модели квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии. В первом параграфе проводится и обосновывается редукция математической модели квазистационарного процесса к уравнению (6). Второй параграф является вспомогательным, в нем описывается схема Розенброка для одного класса дифференциально-алгебраических систем. Третий параграф содержит аналитическое исследование математической модели квазистационарного процесса. Доказываются теоремы об однозначной локальной и глобальной разрешимости задачи Коши для уравнения (4).

Теорема 9. (3.3.2) Пусть $p > 2$, тогда для любого $x_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для любого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи (2), (4), (5).

В четвертом параграфе строится метод приближенного решения задачи Коши, основанный на методе конечных разностей, доказывается его сходимость. Проведем декомпозицию задачи (2), (4), обозначим $w = x_{ss} - |x|^{p-2} x$. К полученной задаче применим метод прямых. Перейдем к диференциально-алгебраической системе уравнений:

$$\tfrac{d}{dt} W = -W + MX, \quad 0 = W - MX + |X|^{p-2} X. \tag{13}$$

Полученную систему будем решать с помощью одностадийного метода Розенброка с коэффициентом $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Теорема 10. (3.4.1, 3.4.2) Существуют τ_0, h_0, что при $\forall \tau \in (0, \tau_0)$, $\forall h \in (0, h_0)$, для задачи (2), (4), (5) при $w = x_{ss} - |x|^{p-2}\, x$ выполнено

$$\left\|\hat{W} - w(t+\tau)\right\|_{C_{w_h}} \le C\tau(\tau^2 + h^2),\ \left\|\hat{X} - x(t+\tau)\right\|_{C_{w_h}} \le C(\tau^2 + h^2),$$

$$\left\|\bar{W}_N - w(N\tau)\right\|_{C_w} \le C(\tau^2 + h^2),\ \left\|\bar{X}_N - x(N\tau)\right\|_{C_w} \le C(\tau^2 + h^2).$$

Пятый параграф посвящен описанию алгоритма программы для численного исследования математической модели квазистационарного процесса. В шестом параграфе приведены результаты вычислительных экспериментов для модельных примеров на основе разработанных методов.

Пример 2. Требуется найти приближенное решение задачи (2), (4) на интервале $(0, 5)$ с начальным условием $x(s, 0) = s\sin(s)$, $s \in (0, \pi)$ с помощью разработанного разностного метода. Результатом работы программы на сгущающихся сетках являются приближенные решения, графики которых с отмеченными значениями в узлах приведены на рис. 2.

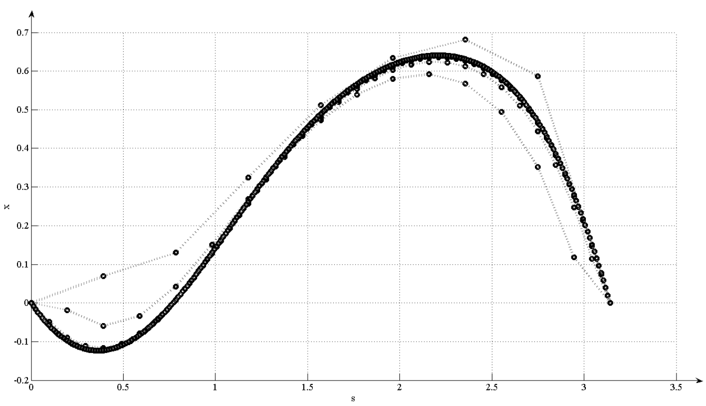

Рис. 2. Приближенные решения на различных сетках в момент времени $t = 5$

Седьмой параграф посвящен сравнительному анализу полученных результатов. Рассмотрены различные модельные примеры, проведены вычислительные эксперименты для них с помощью разработанных методов. Вычисления по проекционному методу проводились с различным количеством членов в приближении искомой функции. Вычисления по методу на основе сеток проводились с последовательным сгущением сетки (как пространственной, так и временной). Решения, полученные с помощью разностного метода на наиболее густых сетках, имеют вычислительную точность на порядок выше, чем решения, полученные проекционным методом с максимальным количеством слагаемых, при сопоставимом или меньшем объеме использованных вычислительных ресурсов. Однако результат работы проекционного метода обусловлен в значительной степени выбором начального условия и зависит от точности его приближения соответствующим рядом.

В заключении представлены выводы по результатам исследований и обосновывается соответствие работы паспорту специальности 05.13.18.

Результаты, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2 паспорта специальности) получены:

1. Аналитический метод исследования математических моделей, основанных на квазилинейных уравнениях соболевского типа.
2. Достаточные условия существования и единственности решений моделей неравновесной противоточной капиллярной пропитки и квазистационарного процесса с условием Коши.
3. Достаточные условия разрешимости задачи регулирования эффективной насыщенности в модели неравновесной противоточной капиллярной пропитки на основе задачи стартового управления и финального наблюдения.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3 паспорта специальности) получены:

4. Условия сходимости проекционного метода нахождения приближенного решения математических моделей на основе квазилинейных уравнений соболевского типа с условием Коши, численного метода исследования математической модели квазистационарного процесса.
5. Алгоритмы проекционного метода нахождения приближенного решения математических моделей на основе квазилинейных уравнений соболевского типа с условием Коши, численного метода исследования математической модели квазистационарного процесса.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п. 4 паспорта специальности) получены:

9. Программы для ЭВМ, реализующие алгоритмы нахождения приближенных решений моделей неравновесной противоточной капиллярной пропитки и квазистационарного процесса с условием Коши.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ для опубликования результатов диссертационного исследования:

1. *Богатырева, Е.А.* О решении задачи Дирихле – Коши для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 7, №1. – С. 52–60.

2. *Bogatyreva, E.A.* On the Uniqueness of a Nonlocal Solution in the Barenblatt – Gilman Model / E.A. Bogatyreva, I.N. Semenova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Мат. моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, №4. – С. 113–119.

3. *Богатырева, Е.А.* Задача стартового управления и финального наблюдения для одного квазилинейного уравнения соболевского типа / Е.А. Богатырева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, №4. – С. 5–10.

Свидетельство о регистрации программы:

4. Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге: свидетельство № 2015617080 / Богатырева Е.А, Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015614008; заявл. 15.05.2015; зарегистр. 30.07.2015, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации:

5. *Кононова, Е.А.* О начально-краевой задаче для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Кононова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, вып. 2. – С. 270–271.

6. *Богатырева, Е.А.* Численное исследование процессов в модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Вестник МаГУ. Математика. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2013. – Вып. 15. – С. 58–67.

7. *Bogatyreva, E.A.* Numerical Modeling of Quasi-Steady Process in Conducting Nondispersive Medium with Relaxation / E.A. Bogatyreva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 1. – P. 45–51.

8. *Богатырева, Е.А.* Задача стартового управления и финального наблюдения для модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 79–80.

9. *Bogatyreva, E.A.* Comparison of Numerical Modeling Methods for Quasi-Steady Process in Conducting Nondispersive Medium with Relaxation / E.A. Bogatyreva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 2. – P. 13–18.

10. *Богатырева, Е.А.* О нелокальном решении задачи Коши – Дирихле для модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Измерения: состояние, перспективы развития. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – С. 165–166.

11. *Богатырева, Е.А.* О продолжении решения задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2013. – С. 190.

12. *Богатырева, Е.А.* Исследование математической модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 1502–1506.

13. *Богатырева, Е.А.* Сходимость метода Галеркина в модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2014. – С. 206–207.

14. *Богатырева, Е.А.* Сходимость метода Галеркина в квазилинейной модели соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: Тезисы и тексты докладов международной конференции. Москва, РУДН, 15 – 18 декабря 2014 г. – М: Издательство РУДН, 2014. – С. 219–220.

15. *Богатырева, Е.А.* Численное моделирование квазистационарного процесса в проводящей среде без дисперсии с учетом релаксации / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ: сборник тезисов международной конференции (г. Уфа, 1 – 3 октября 2015 г.) / отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. – С. 103–104.

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 19.10.2015. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 0,93. Тираж 120 экз. Заказ 481/611.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.

454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.