УДК 517.9

ГОЛОМОРФНЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.В. Келлер[1], Дж.К. Аль-Делфи[2]

Дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно старшей производной, впервые появились, по-видимому, в конце позапрошлого века. Отдавая дань С.Л. Соболеву, который начал систематическое исследование таких уравнений, их часто называют уравнениями соболевского типа. В силу того, что интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос, то возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах.

Теория голоморфных вырожденных групп операторов, развитая в банаховых пространствах и пространствах Фреше, переносится в квазибанаховы пространства. Абстрактные результаты иллюстрированы конкретными примерами.

Статья кроме введения и списка литературы содержит три части. В первой из них приводятся сведения об относительно *p*-ограниченных операторах в квазибанаховых пространствах. Во второй части строятся голоморфные группы разрешающих операторов. А в третьей приводятся достаточные условия для того, чтобы пара операторов порождала группу разрешающих операторов.

Ключевые слова: вырожденные группы операторов; квазибанаховы пространства; уравнения соболевского типа.

Введение

Пусть U – банахово пространство, обозначим $L \in \boldsymbol{L}(U)$ банахово пространство линейных ограниченных операторов, определенных на U и действующих в U. Отображение $V^{\bullet} \in C(R; \boldsymbol{L}(U))$ назовем *группой операторов*, если

$$V^s V^t = V^{s+t} \tag{1}$$

при всех $t, s \in R$. Обычно группу операторов отождествляют с ее графиком $\left\{V^t : t \in R\right\}$. Группу $\left\{V^t : t \in R\right\}$ назовем *голоморфной*, если она аналитична во всей комплексной плоскости C, причем (1) выполняется при всех $t, s \in C$. Наконец, голоморфная группа $\left\{V^t : t \in R\right\}$ называется *вырожденной*, если ее единица V^0 является проектором в U.

Впервые голоморфные вырожденные группы операторов появились в [1] как разрешающие группы линейных уравнений соболевского типа (термин ввел в обиход Р.Е. Шоуолтер [2])

$$L\dot{u} = Mu \tag{2}$$

с (L, p)-ограниченным оператором M. Первая монография, посвященная голоморфным вырожденным группам и полугруппам, а также вырожденным сильно непрерывным полугруппам вышла в свет в 2003 году [3]. К настоящему времени голоморфные вырожденные группы нашли применение в теории динамических измерений [4], в теории оптимального управления [5], при изучении дихотомий уравнений вида (2) [6, 7], а также при изучении вырожденных операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка [8]. Кроме того, теория вырожденных групп и полугрупп операторов была перенесена в пространства Фреше [9].

Уравнения вида (2) впервые начал изучать А. Пуанкаре, однако систематическое их изучение началось в середине прошлого века после основополагающих работ С.Л. Соболева (см. прекрас-

[1] Келлер Алевтина Викторовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: alevtinak@inbox.ru
[2] Аль-Делфи Джавад Кадим – аспирант кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: rassian71@mail.ru

ный исторический обзор в [10]). Ныне уравнения соболевского типа – активно изучаемая область неклассических уравнений математической физики, и число монографий, посвященных им полностью [11] либо частично [12, гл. 6], растет лавинообразно.

Как известно [13, п. 3.11], квазибанаховы пространства ненормируемы, но метризуемы. Расхожим примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q\in(0,1)$. В работе [14] построены квазибанаховы пространства ℓ_q^m, $q\in(0,1)$, $m\in R$, $\ell_q^0=\ell_q$, которые названы *квазисоболевыми*. Именно этими пространствами мы воспользуемся для иллюстраций абстрактных результатов.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за плодотворные дискуссии и интерес, проявленный к данной работе, профессору Е.Ю. Панову за строгую, но конструктивную критику и доценту М.А. Сагадеевой за добросовестную правку рукописи.

1. Относительно *p*-ограниченные операторы

Линеал U над полем R назовем квазинормированным, если на нем задана функция ${}_U\|\cdot\|:U\to R$ со следующими свойствами:

(i) ${}_U\|u\|\ge 0$ при всех $u\in U$, причем ${}_U\|u\|=0$ точно тогда, когда $u=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нуль линеала U;

(ii) ${}_U\|\alpha u\|=|\alpha|\,{}_U\|u\|$ при всех $u\in U$, $\forall\alpha\in R$;

(iii) ${}_U\|u+v\|\le C\left({}_U\|u\|+{}_U\|v\|\right)$ при всех $u,v\in U$, где константа $C\ge1$.

Функция ${}_U\|\cdot\|$ со свойствами (i)–(iii) называется *квазинормой*. В частном случае, когда $C=1$, квазинорма ${}_U\|\cdot\|$ называется нормой, а линеал U с нормой ${}_U\|\cdot\|$ – нормированным. Квазинормированный линеал $(U, {}_U\|\cdot\|)$ метризуем [13, лемма 3.10.1], поэтому мы располагаем понятием фундаментальной последовательности $\{u_k\}\subset U$: ${}_U\|u_k-u_l\|\to0$ при $k,l\to\infty$. Определим *квазибанахово пространство* как полный квазинормированный линеал.

Пример 1. Пусть $\{\lambda_k\}\subset R_+$ – монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty$, а $q\in R_+$. Положим

$$\ell_q^m=\left\{u=\{u_k\}\subset R:\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}\,|u_k|\right)^q<+\infty\right\}.$$

Линеал ℓ_q^m при всех $m\in R$, $q\in R_+$ с квазинормой элемента $u=\{u_k\}\in\ell_q^m$

$${}_q^m\|u\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}\,|u_k|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

является квазибанаховым пространством (при $q\in[1,+\infty)$ – банаховым). Заметим, что если $q\in(0,1)$, то в (iii) константа $C=2^{1/q}$. Пространства ℓ_q^m названы в [14] *квазисоболевыми*.

Пусть $(U, {}_U\|\cdot\|)$ и $(F, {}_F\|\cdot\|)$ – квазибанаховы пространства, линейный оператор $L:U\to F$ с областью определения $dom\,L=U$ назовем *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty}Lu_k=L(\lim\limits_{k\to\infty}u_k)$ для любой сходящейся в U последовательности $\{u_k\}\subset U$. Заметим, что в данном случае линейный оператор $L:U\to F$ непрерывен точно тогда, когда он ограничен (т.е. отображает ограниченные множества в ограниченные). Обозначим через $\mathbf{L}(U;F)$ линеал (над полем R) линейных ограниченных операторов – квазибанахово пространство с квазинормой

$${}_{L(U;F)}\|L\|=\sup_{\|u\|=1}{}_F\|Lu\|.$$

Пусть операторы $L, M \in \mathbf{L}(U;F)$. Следуя [1; 3, п. 2.1], введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} \in \mathbf{L}(F;U)\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Рассуждая аналогично замечанию 2.1.2 [3], нетрудно показать, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M всегда замкнут. Кроме того, если $\rho^L(M) \neq \varnothing$, то L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M голоморфна на $\rho^L(M)$ [3, теорема 2.1.1]. Назовем оператор M (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a \in R_+ \quad \forall \mu \in C \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Итак, пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Выберем контур $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)d\mu \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L_\mu^L(M)d\mu,$$

где интегралы понимаются в смысле Римана. Заметим, что в силу голоморфности правой $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и левой $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L-резольвент оператора M, операторы P и Q не зависят от радиуса r контура γ. Рассуждая аналогично доказательству [3, лемма 4.1.1], нетрудно показать, что операторы $P \in \mathbf{L}(U)$ ($\equiv \mathbf{L}(U;U)$) и $Q \in \mathbf{L}(F)$ – проекторы. Положим $U^0 = \ker P$, $U^1 = im P$, $F^0 = \ker Q$, $F^1 = im Q$; и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L(M) на U^k, $k = 0,1$.

Теорема 1 (теорема о расщеплении). *Пусть операторы* $L, M \in \mathbf{L}(U;F)$, *причем оператор* M (L,σ)-*ограничен. Тогда*

(i) *операторы* $L_k, M_k \in \mathbf{L}(U^k;F^k)$, $k = 0,1$;

(ii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathbf{L}(F^1;U^1)$ *и* $M_0^{-1} \in \mathbf{L}(F^0;U^0)$.

Идея **доказательства** теоремы излагалась на весьма представительном форуме [15]. Положим $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$. Очевидно, операторы $H \in \mathbf{L}(U^0)$ и $S \in \mathbf{L}(U^1)$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при всех* $\mu \in C : \mu > a$ *имеет место*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}L_1^{-1}Q.$$

Назовем точку ∞ *устранимой особой точкой* L-резольвенты оператора M, если $H = \mathbb{O}$; *полюсом порядка* p, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$; *существенно особой точкой*, если $H^k \neq \mathbb{O}$ при всех $k \in N$. Удобно устранимую особую точку считать полюсом порядка нуль. Назовем (L,σ)-ограниченный оператор M (L, p)-*ограниченным*, $p \in \{0\} \cup N$, если точка ∞ – полюс порядка p L-резольвенты оператора M.

Вектор $\varphi \in U$ назовем M-*присоединенным вектором* оператора L, если существует вектор $\psi \in U$ такой, что $L\psi = M\varphi$. Упорядоченное множество

$$\{\varphi_k : k \in \{0\} \cup N, \quad L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad \varphi_0 \in \ker L\} \equiv \{\varphi_k : k \in \{0\} \cup N\}$$

назовем *цепочкой* M-*присоединенных векторов* оператора L. Цепочка векторов может быть бесконечной, однако она обязательно конечна, если существует вектор $\varphi_r \in \{\varphi_k : k \in \{0\} \cup N\}$ такой, что $M\varphi_r \notin im L$. Мощность конечной цепочки назовем ее длиной. Напомним еще, что оператор $L \in \mathbf{L}(U;F)$ называется *фредгольмовым*, если $dim \ker L = codim\, im L < \infty$.

Теорема 2. *Пусть операторы* $L \in \mathbf{L}(U;F)$ *фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *оператор* M (L, p)-*ограничен*, $p \in \{0\} \cup N$;

(ii) *длина любой цепочки* M *-присоединенных векторов оператора* L *не превышает* p *и существует по крайней мере одна цепочка длины* p.

Доказательство теоремы 2 в общем случае довольно сложно (см. [3, гл. 4]), однако в частном случае $p=0$ (т.е. оператор L не имеет M -присоединенных векторов) очень просто [7].

Пример 2. Введем в рассмотрение *квазиоператор Лапласа* с помощью формулы $\Lambda u=\{\lambda_k u_k\}$, $u\in \ell_q^m$. Как нетрудно показать [16], оператор $\Lambda:\ell_q^{m+2}\to \ell_q^m$ – топлинейный изоморфизм при всех $m\in R$, $q\in R_+$. Обратный оператор $\Lambda^{-1}u=\{\lambda_k^{-1}u_k\}$ назовем *квазиоператором Грина*.

Далее, построим операторы $L=\lambda-\Lambda$ и $M=\alpha\Lambda$, $\alpha\in R$. Покажем, что при всех $\alpha\in R\setminus\{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен. Если $\lambda\notin\{\lambda_k\}$, то утверждение тривиально. Если же $\lambda=\lambda_k$ при некоторых $k\in N$ (их обязательно конечное множество в виду монотонной сходимости $\lambda_k\to+\infty$), то утверждение следует из теоремы 2.

2. Разрешающие группы операторов

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, операторы $L,M\in \boldsymbol{L}(U;F)$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа
$$L\dot{u}=Mu. \tag{3}$$

Вектор-функцию $u\in C^\infty(R;U)$ назовем *решением уравнения* (3), если она удовлетворяет ему. Решение $u=u(t)$ уравнения (3) назовем решением задачи Коши
$$u(0)=u_0 \tag{4}$$
для уравнения (3) (коротко, задачи (3), (4)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (4) при некотором $u_0\in U$. Заметим, что вообще говоря, задача (3), (4) неразрешима при любых $u_0\in U$, и для уравнений вида (3) приходится ставить другие задачи, например, с условием Шоуолтера–Сидорова $L\big(u(0)-u_0\big)=0$ [4, 17].

Определение 1. Множество $\wp\subset U$ называется *фазовым пространством* уравнения (3), если

(i) при любом $u_0\in\wp$ существует единственное решение задачи (3), (4);

(ii) любое решение $u=u(t)$ уравнения (3) лежит в $\wp$ как траектория (то есть $u(t)\in\wp$ при всех $t\in R$).

Теорема 3. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $p\in\{0\}\cup N$. *Тогда фазовым пространством уравнения* (3) *служит подпространство* U^1.

Приведем набросок **доказательства**. В силу теоремы 1 уравнение (3) эквивалентно системе из двух уравнений
$$H\dot{u}^0=u^0,\qquad \dot{u}^1=Su^1, \tag{5}$$
где $u^0=u^0(t)\in U^0$ и $u^1=u^1(t)\in U^1$ при всех $t\in R$. Дифференцируя первое уравнение по t и применяя оператор H слева, последовательно получим
$$0=H^{p+1}\frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}}u^0(t)=H^p\frac{d^p}{dt^p}u^0(t)=\ldots=Hu^0(t)=u^0(t).$$
Значит, все решения уравнения (3) лежат в U^1 как траектории. Однозначная разрешимость задачи $u^1(0)=u_0^1$ для второго уравнения (5) при любых $u_0^1\in U^1$ очевидна в виду ограниченности оператора $S\in\boldsymbol{L}(U^1)$.

Пусть далее $\left\{V^t:t\in R\right\}$ – вырожденная голоморфная группа операторов, а V^0 – ее единица. Введем в рассмотрение образ $im\,V^\bullet=im\,V^0$ и ядро $\ker V^\bullet=\ker V^0$ этой группы. Назовем группу $\left\{V^t:t\in R\right\}$ *разрешающей группой* уравнения (3), если, во-первых, вектор-функция $u(t)=V^tu_0$ является решением уравнения (3) при любом $u_0\in U$, а во-вторых, образ $im\,V^\bullet$ совпадает с фазовым пространством уравнения (3).

Теорема 4. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $p\in\{0\}\cup N$. *Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (3), которая к тому же имеет вид*

$$V^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu,\qquad t\in R,$$

где контур $\gamma=\{\mu\in C:|\mu|=r>a\}$.

Доказательство теоремы аналогично случаю банаховых пространств (см. [1; 3, гл. 4]), поэтому опускается.

Пример 3. Пусть $U=\ell_q^{m+2}$, $F=\ell_q^m$, $m\in R$, $q\in(0,1)$, где квазисоболевы пространства ℓ_q^m определены в примере 1, а операторы L и M построены в примере 2. Рассмотрим уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной как наиболее известное из неклассических уравнений математической физики [18]

$$(\lambda-\Lambda)\dot u=\alpha\Lambda u. \tag{6}$$

Как нетрудно показать, голоморфная разрешающая группа уравнения (6) будет иметь вид

$$V^t=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_{0k}e^{\mu_k t}e_k, & \text{если}\quad \lambda\ne\lambda_k,\quad k\in N;\\ \sum\limits_{k\ne l}u_{0k}e^{\mu_k t}e_k, & \text{если существует } l\in N:\lambda=\lambda_l.\end{cases}$$

Здесь $\mu_k=\dfrac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}$ – точки L-спектра оператора M, последовательность $\{u_{0k}\}=u_0\in\ell_q^{m+2}$, векторы $e_k=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где единица стоит на k-том месте. Фазовым пространством уравнения (6) будет множество

$$U^1=\begin{cases}U, & \text{если } \lambda\ne\lambda_k,\ k\in N;\\ \{x\in U:\ \ x_l=0,\quad \lambda=\lambda_l\}.\end{cases}$$

Замечание 1. В условиях теоремы 4 операторы L и M на пространстве F порождают вырожденную голоморфную группу

$$W^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu$$

– разрешающую группу уравнения $L(\beta L-M)^{-1}\dot f=M(\beta L-M)^{-1}f$, где $\beta\in\rho^L(M)$.

3. Порождающие операторы вырожденных голоморфных групп

Пусть квазибанаховы пространства U и F расщепляются в прямые суммы

$$U=U^0\oplus U^1\qquad\text{и}\qquad F=F^0\oplus F^1. \tag{7}$$

Пусть существуют топлинейные изоморфизмы

$$A:U^0\to F^0\qquad\text{и}\qquad B:U^1\to F^1. \tag{8}$$

Пусть на U^1 (F^1) задана голоморфная группа операторов

$$e^{tS}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S^k}{k!}t^k\qquad\left(e^{tT}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{k!}t^k\right), \tag{9}$$

где $S\in\boldsymbol{L}(U^1)$ $(T\in\boldsymbol{L}(F^1))$ – некоторый оператор. Пусть существует такой оператор $C\in\boldsymbol{L}(U^0;F^0)$, что оператор

$$A^{-1}C=H\in\boldsymbol{L}(U^0)\ \text{нильпотентен степени}\ p\in\{0\}\cup N. \tag{10}$$

Построим операторы

$$L=C(I-P)+BP\quad\text{и}\quad M=A(I-P)+BSP, \tag{11}$$

где $P\in\boldsymbol{L}(U)$ – проектор из первого расщепления (7) (т.е. $\ker P=U^0$, $im\,P=U^1$). По построению операторы $L,M\in\boldsymbol{L}(U;F)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (7)–(11). *Тогда оператор* M (L, p)*-ограничен*.

Действительно, $\mu L - M = (\mu C - A)(I - P) + B(\mu I - S)P$, откуда

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k H^k A^{-1}(I - Q) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} B^{-1} Q, \tag{12}$$

где $Q \in \mathbf{L}(F)$ проектор из второго расщепления (7). Поскольку $\sigma^L(M) = \sigma(S)$, а спектр $\sigma(S)$ ограниченного оператора ограничен, то число $\mu \in C$ в (12) достаточно взять таким, что $\mu >_{L(U^1)} \|S\|$.

В силу теорем 5 и 4 простроенные операторы L и M порождают на U голоморфную вырожденную группу операторов $V^t = \mathrm{O}(I - P) + e^{tS} P$, $t \in R$. (Если вдобавок оператор $T = BSB^{-1}$, то эти же операторы порождают на F голоморфную вырожденную группу $W^t = \mathrm{O}(I - Q) + e^{tT} Q$.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

2. Showalter, R.E. The Sobolev type equations. I (II) / R.E Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V. 5, № 1 (2). – P. 15–22 (P. 81–99).

3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.

4. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

5. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – № 17 (234). – С. 113–114.

6. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

7. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.

8. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

9. Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131–160.

10. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York – Basel – Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.

11. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

12. Lyapunov–Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.

13. Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. – М.: Мир, 1980. – 264 р.

14. Аль-Делфи, Дж.К. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

15. Свиридюк, Г.А. Квазиоператор Лапласа в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Тезисы Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева. – Новосибирск, 2013. – С. 247

16. Аль-Делфи, Дж.К. Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып. 2 (31). – С. 13–16.

17. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

18. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.

Поступила в редакцию 15 января 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2015, vol. 7, no. 1, pp. 20–27

HOLOMORPHIC DEGENERATE GROUPS OF OPERATORS IN QUASI-BANACH SPACES

***A.V. Keller*[1], *J.K. Al-Delfi*[2]**

Probably, Sobolev type equations, i.e. unsolved with respect to the highest derivative, first appeared in the late nineteenth century. Due to the fact that the interest to the Sobolev type equations recently significantly increased, the need arose for their consideration in quasi-Banach spaces. Specifically, this study aimed at understanding non-classical models of mathematical physics in quasi-Banach spaces.

The theory of holomorphic degenerate groups of operators, developed in Banach spaces and Frechet spaces is transferred to quasi-Banach spaces. Abstract results are illustrated by specific examples.

The article besides the introduction and the references contains three parts. The first part provides the necessary information regarding the theory of relatively *p*-bounded operators in quasi-Banach spaces. The second one represents the construction of the holomorphic group of solving operators. The third part contains the sufficient conditions for pair of operators to generate group of solving operators.

Keywords: degenerate groups of operators; quasi-Banach spaces; Sobolev type equations.

References

1. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. Russian Mathematical Surveys, 1994. Vol. 49, no. 4. P. 45–74. http://dx.doi.org/10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

2. Showalter R.E. The Sobolev type equations. I (II). *Appl. Anal*. 1975. vol. 5, no. 1 (2). pp. 15–22 (pp. 81–99).

3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003. 216 p.

4. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control*. 2012. vol. 73, no. 1. pp. 97–104.

5. Manakova N.A., Dylkov A.G. ptimal'noe upravlenie resheniyami nachal'no-konechnoy zadachi dlya lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa (Optimal Control of Solutions of Initial-Finish Problem for the Linear Sobolev Type Equations). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*. 2011. no. 17 (234). pp. 113–114. (in Russ.).

6. Sviridyuk G.A., Keller A.V. Invariant spaces and dichotomies of solutions of a class of linear equations of Sobolev type. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*). 1997. Vol. 41, no. 5. pp. 57–65.

7. Sagadeeva M.A. *Dikhotomii resheniy lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa* (Dichotomies of the Solutions for the Linear Sobolev Type Equations). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 139 p. (in Russ.).

8. Zamyshlyaeva A.A. *Lineynye uravneniya sobolevskogo tipa vysokogo poryadka* (Linear Sobolev Type Equations of Hihg Order). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. 88 p. (in Russ.).

9. Fedorov V.E. Holomorphic Solution Semigroups for Sobolev Type Equations in Locally Convex Spaces. *Sbornik: Mathematics*. 2004. Vol. 195, no. 8. pp. 1205–1234. http://dx.doi.org/10.1070/-SM2004v195n08ABEH000841

[1] Keller Alevtina Viktorovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Modeling Department, South Ural State University.
E-mail: alevtinak@inbox.ru
[2] Al-Delfi Jawad Kadim is Post-graduate Student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University.
E-mail: rassian71@mail.ru

10. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest–order Derivative. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003. 239 p.

11. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* (Linear and Nonlinear Equation of Sobolev Type). Moscow, FizMatLit Publ., 2007. 736 p. (in Russ.).

12. Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov–Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p.

13. Bergh J., Löfström J. *Interpolation Spaces. An Introduction*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1976. 207 p.

14. Al-Delfi J.K. Kvazisobolevy prostranstva $\ell_p{}^m$ (Quasi-Sobolev Spaces $\ell_p{}^m$). *Bulletin of South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*. 2013. Vol. 5, no. 1. pp. 107–109. (in Russ.).

15. Sviridyuk G.A., Al-Delfi J.K. The Laplace Quasi-Operator in the Quasi-Banach Spaces. *Differential Equations. Function Spaces. Approximation Theory. Abstracts of International Conference Dedicated to the 105th Anniversary of the Birthday of S.L. Sobolev*. Novosibirsk, 2013. p. 247. (in Russ.).

16. Al-Delfi J.K. Kvazioperator Laplasa v kvazisobolevykh prostranstvakh (The Laplace' Quasi-operator in Quasi-Sobolev spaces). *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki.* 2013. Issue 2 (31). pp. 13–16. (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1213

17. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Zadacha Shouoltera–Sidorova kak fenomen uravneniy sobolevskogo tipa. (The Showalter–Sidorov problem as a Phenomena of the Sobolev type Equations). *Bulletin of Irkutsk State University. Series: "Mathematics"*. 2010. Vol. 3, no. 1. pp. 104–125. (in Russ.).

18. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Neklassicheskie modeli matematicheskoy fiziki (Nonclassical Models of Mathematical Physics). *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*. 2012. no. 40 (299). pp. 7–18. (in Russ.).

Received 15 January 2015