УДК 681.58

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Н.В. Плотникова

PROBLEM STATEMENT OF SYNTHESIS OF QUASIPERMANENT STOCHASTIC SYSTEM

N.V. Plotnikova

Задача синтеза корректирующих устройств квазистационарной стохастической системы формулируется как задача математического программирования и при определенном выборе коррекции сводится к задаче выпуклого программирования. Критерий оптимальности формулируется в частотной области.

Ключевые слова: корректирующее устройство, стохастическая система, стохастический синтез, математическое программирование.

The problem of synthesis of correcting devices of quasipermanent stochastic system is formulated as a problem of mathematical programming and with certain choice of correction is brought to a convex programming problem. The criterion of optimality is formulated in frequency domain.

Keywords: correcting device, stochastic system, stochastic synthesis, mathematical programming.

В процессе работы любой системы изменяются значения ее параметров, что приводит к разбросу показателей качества работы системы. Для того, чтобы скомпенсировать влияние случайных факторов без каких-либо дополнительных затрат, нужно решить задачу синтеза корректирующих устройств.

Решение этой задачи осложняется тем, что численные значения некоторых физических параметров изменяются.

Задача синтеза корректирующих устройств квазистационарной стохастической системы может быть сформулирована как задача математического программирования и при определенном выборе коррекции сведена к задаче выпуклого программирования.

1. Описание системы управления

Любая система, имеющая сосредоточенные параметры и, следовательно, представляемая конечным числом дифференциальных и алгебраических уравнений, может быть описана в форме переменных состояния.

Структурная схема системы управления в общем случае приведена на рис. 1. Введены следующие обозначения: $\mathbf{X} = [x_1 x_2 ... x_n]^T$ – вектор состояний системы; $\mathbf{Y} = [y_1 y_2 ... y_k]^T$ – вектор выходных сигналов; $\mathbf{U} = [u_1 u_2 ... u_m]^T$ – вектор входных (управляющих) сигналов; $\mathbf{G} = [g_1 g_2 ... g_l]^T$ – вектор возмущений.

В общем случае в матричном виде уравнения состояния системы в пространстве состояний имеют вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(x, y, g, t);$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(x, u, t), \qquad (1)$$

где **f** и **h** – вектора нелинейных зависимостей:

$$\mathbf{f} = [f_1 f_2 ... f_n]^T, f_i = f_i(x_1 ... x_n, u_1 ... u_m, g_1 ... g_l, t);$$
$$\mathbf{h} = [h_1 h_2 ... h_m]^T, h_k = h_k(x_1 ... x_n, u_1 ... u_m, t).$$

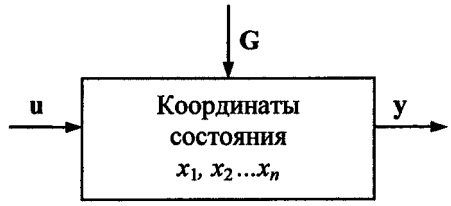

Рис. 1. Схема системы управления

В тех случаях, когда векторные нелинейные зависимости f_i и g_k могут быть линеаризованы (например, путем разложения в ряд Тейлора), они становятся линейными комбинациями переменных состояния x_i, входных переменных u_j и возмущений g_l. В этом случае уравнения состояния в векторно-матричной записи принимают вид:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(t)\mathbf{g}(t);$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \qquad (2)$$

где $\mathbf{A}(t)$ – собственная параметрическая матрица системы, $[n \times n]$, $\mathbf{B}(t)$ – входная матрица системы,

Плотникова Наталья Валерьевна - к.т.н., доцент кафедры систем управления ЮУрГУ; pnv@susu.ac.ru.

Plotnikova Natalya Valerievna - PhD, associate professor of control system department of SUSU; pnv@susu.ac.ru.

$[n\times m]$, $\mathbf{H}(t)$ – матрица возмущений, $[n\times l]$, $\mathbf{C}(t)$ – выходная матрица системы, $[k\times n]$, $\mathbf{D}(t)$ – выходная матрица, $[k\times m]$.

Любая система, описываемая уравнениями состояния (2) может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 2).

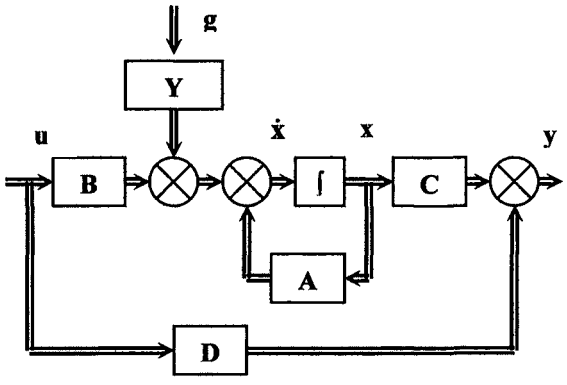

Рис. 2. Структурная схема системы

Если элементы матриц A, B, C, D не зависят от времени, то система стационарна, и уравнения в переменных состояния приобретают вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Hg};$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}. \qquad (3)$$

Рассмотрим класс линейных стационарных систем управления, движение которых может быть описано системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Для простоты положим в системе (3) матрицы H и D нулевыми.

Движение системы в свободном состоянии описывается линейной системой однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами или в векторно-матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}.$$

Характеристическое уравнение системы:

$$D(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) дает значения корней $\lambda_{1\,9} = 1..n$ которые позволяют судить о поведении системы в свободном состоянии.

Вывод характеристического уравнения системы в свободном состоянии осуществляется независимо от числа входов и выходов системы, поэтому методика описания системы с помощью пространства состояний является универсальной формой описания поведения систем всех видов: как линейных, так и нелинейных, как односвязных, так и многосвязных.

Если уравнение состояния линейной системы представить в виде

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

где $\mathbf{M} = [m_{ij}\,\delta_{ij}] = \mathrm{diag}(m_{11}, m_{22}\ldots m_{nn})$ – диагональная матрица инерционных коэффициентов системы; δ_{ij} – символ Кронекера; $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ – квадратная матрица размера $n\times n$; $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ – квадратная матрица размера $n\times k$; $\mathbf{x} = [x_1\ldots x_n]$ – вектор состояний системы; $\mathbf{u} = [u_1\ldots u_n]$ – вектор входных сигналов, тогда полная система уравнений пространства состояний стохастической квазистационарной системы управления запишется в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{M}^*\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^*\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx}, \end{cases} \qquad (5)$$

где $\mathbf{M}^*, \mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$ – математические ожидания матриц **M**, **A**, **B**, содержащие статистически осредненные значения коэффициентов, т.е.

$$\mathbf{A}^* = \left[\int f(a_{ij})a_{ij}da_{ij}\right] = \left[a^*_{ij}\right], i,j = \overline{1,n};$$

$$\mathbf{B}^* = \left[\int f\left(b_{ij}\right)b_{ij}db_{ij}\right] = \left[b^*_{ij}\right], i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k};$$

$$\mathbf{M}^* = \left[\int f\left(m_{ii}\right)m_{ii}dm_{ii}\right] = \mathrm{diag}(m^*_{11}, m^*_{22}\ldots m^*_{nn}),$$

C - выходная матрица.

2. Система ограничений

Характеристическое уравнение системы (4) в развернутом виде:

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

причем коэффициенты этого уравнения представляют собой функции от параметров объекта управления:

$$a_i = a_i(\overline{\mathbf{q}}), i = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

Известно, что динамические свойства системы определяются, главным образом, ее полюсами, т.е. корнями характеристического уравнения. Так, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости линейной системы является нахождение ее полюсов в левой части комплексной плоскости. Характер переходных процессов в системе зависит от взаимного расположения этих полюсов.

Для исходной линейной квазистационарной стохастической системы, описываемой первым уравнением системы (5) желаемое расположение полюсов на комплексной плоскости может быть обеспечено введением модального регулятора, т.е. линейной обратной связи по вектору состояния [1]. Уравнение такой связи можно записать следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{Kx}.$$

В этом уравнении v - новое обозначение вектора входных (задающих) воздействий; K - матрица обратной связи. Если u, v - скаляры, то K является матрицей-строкой, элементы которой представляют собой коэффициенты обратных связей по всем составляющим вектора x.

Очевидно, что существование матрицы обратной связи K может быть гарантировано только в том случае, если структура самого объекта не накладывает ограничений на возможность управления состоянием объекта χ с помощью входного воздействия и, т.е. объект должен быть полностью управляем.

После введения модального регулятора получаем новую систему, которая описывается уравнением вида:

$$\mathbf{M}^*\mathbf{x} = \mathbf{A}^*\mathbf{x} + \mathbf{B}^*(\mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^*\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} =$$
$$= (\mathbf{A}^* - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\mathbf{v} = \mathbf{A}_{ск}\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\mathbf{v},$$

где

$$\mathbf{A}_{ск} = \begin{bmatrix} a_{11} - k_1 & a_{12} - k_2 & \cdots & a_{1n} - k_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необходимо определить матрицу коэффициентов обратных связей K, при которой замкнутая с помощью обратной связи по состоянию система имела бы желаемое распределение полюсов, т.е. желаемый характеристический полином $D_0(p)$:

$$D_0(p) = \det|p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{ск}|. \quad (7)$$

Раскрывая определитель (7), получим характеристическое уравнение с модальной коррекцией

$$D_0(p) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n,$$

где коэффициенты этого уравнения

$$\alpha_i = \alpha_i([a_{ij}^*], [k_i]), (i,j = 1,n). \quad (8)$$

Для создания желаемого характеристического полинома воспользуемся прямым корневым методом синтеза.

Желаемый характеристический полином

$$D^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2^*)\ldots(\lambda - \lambda_n^*) =$$
$$= \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0, \quad (9)$$

где λ_i^* - желаемые значения корней характеристического полинома.

Приравнивая соответствующие коэффициенты уравнений (8) и (9), получим:

$$\alpha_i([a_{ij}^*], [k_i]) = b_i(\lambda_1^*, \lambda_2^* \ldots \lambda_n^*). \quad (10)$$

Совокупность уравнений (10) представляет собой систему ограничений, накладываемых на параметры системы и корректирующих цепей. Эта система может быть как линейной, так и нелинейной. Она всегда нелинейна относительно значений корней желаемого характеристического полинома и может быть линейной и/или нелинейной относительно вектора к в зависимости от вида коррекции.

Пусть m - число параметров корректирующих цепей, а и - порядок системы. Возможны следующие варианты:

- если $m < n$, то задача может не иметь решения;
- если $m = n$, то параметры коррекции определяются однозначно;
- если $m > n$, то возможны несколько решений задачи (т.е. в этом случае система обладает гибкостью по отношению к вектору q, но в этом случае система (10) однозначно будет нелинейной).

Очевидно, что наибольший интерес представляет второй случай, когда число параметров корректирующих цепей совпадает с порядком системы. Такой вариант обеспечивает именно модальная коррекция, при этом достигается линейность системы (10) относительно параметров вектора коррекции $\mathbf{k} = [k_i]$.

Рассмотрим квазистационарную стохастическую систему, которая в свободном состоянии описывается уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

где x- n-мерный вектор состояния; $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ - собственная параметрическая матрица коэффициентов системы. Введем корректирующее устройство описанным выше способом. Уравнение, описывающее систему примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}; \\ \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{K}, \end{cases} \quad (11)$$

где **K** – матрица коэффициентов корректирующих цепей размером $[n \times n]$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & \cdots & \cdots & -k_n \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы в этом случае будет иметь вид

$$D(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \hat{\mathbf{A}}| = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$D(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

где $c_i = c_i(k_1, k_2 \ldots k_n)$.

Так как все коэффициенты $k_1 \ldots k_n$ находятся в первой строке матрицы $\hat{\mathbf{A}}$, зависимости $c_i(k_i)$ будут линейными относительно этих коэффициентов.

Уравнение (10), записанное в матричной форме, примет вид

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}, \quad (12)$$

где $\mathbf{C} = [c_1\, c_2 \ldots c_n]^T$, $\mathbf{B} = [b_1\, b_2 \ldots b_n]^T$.

Так как элементы $[c_i]$ линейно зависят от параметров коррекции, то можно записать

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & \cdots & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} =$$
$$= \mathbf{D}\mathbf{K} + \mathbf{R}, \quad (13)$$

где $\mathbf{K} = [k_1\, k_2 \ldots k_n]^T$ – вектор-столбец коэффициентов корректирующего устройства; $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ – матрица, элементы которой зависят от элементов матрицы $\hat{\mathbf{A}}$; $\mathbf{R} = [r_1\, r_2 \ldots r_n]^T$ – вектор-столбец, элементы которого зависят от элементов матрицы **A** и не зависят от вектора **K**; $\mathbf{B} = [b_1\, b_2 \ldots b_n]^T$ – вектор-столбец, элементы которого – функции корней желаемого характеристического полинома.

Уравнение (12) с учетом этого перепишется в виде $\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{K} + \mathbf{R}$. Обозначая $\mathbf{G} = \mathbf{B} - \mathbf{R}$, получим:

$$\mathbf{D}\mathbf{K} = \mathbf{G}. \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой систему ограничений, записанную в матричной форме.

Благодаря введению в качестве корректирующих цепей жестких обратных связей по каждой переменной состояния получаем:

- систему ограничений вида (14), линейную относительно вектора параметров K;
- однозначное соответствие между корнями желаемого характеристического полинома и параметрами корректирующих цепей.

Так как ряд параметров системы в процессе работы претерпевает случайные изменения (что, в свою очередь, приводит к возникновению случайных изменений динамических свойств системы), задача синтеза имеет статистический характер.

3. Критерий оптимальности

Выберем критерий оптимальности в частотной области. Для этого применим метод определения глобальной чувствительности систем к большим вариациям параметров [2], минимизация которой может быть использована в качестве целевой функции. В основу метода положено однозначное соответствие свойств функции Михайлова качественным показателям свободной составляющей переходного процесса. В качестве критерия оптимальности выберем дисперсию функции Михайлова:

$$F(q) = D\left\{p^{\circ}(j\omega)\right\}, \qquad (15)$$

методика получения которой изложена в [2].

Так как коэффициенты корректирующих цепей входят в характеристический полином линейно (из-за использования метода модального управления), выражение для дисперсии функции Михайлова будет представлять собой квадратичную форму относительно этих коэффициентов.

В результате такого выбора критерия оптимальности и метода управления задача синтеза квазистационарной стохастической системы сведена к задаче выпуклого программирования с системой ограничений вида (14) и целевой функцией вида (15).

Литература

1. Кузовков, Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Н. Т. Кузовков. - М.: Машиностроение, 1976. -184 с.

2. Черноруцкий, Г. С. Следящие системы автоматических манипуляторов / Г. С. Черноруцкий, А. П. Сибрин, В. С. Жабреев; под ред. Г. С. Черноруцкого. -М.: Наука, 1987. - 272 с.

Поступила в редакцию 1 октября 2007 г.