На правах рукописи

Мартюшев Евгений Владимирович

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

01.01.04 – «Геометрия и топология»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Челябинск
2007

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель — | доктор физико-математических наук,<br>профессор Корепанов Игорь Германович. |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор Кашаев Ринат Мавлявиевич;<br>кандидат физико-математических наук<br>Коптева Наталья Викторовна. |
| Ведущая организация — | Челябинский государственный университет. |

Защита состоится 3 сентября 2007 г., в 11 часов, на заседании Диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан ..... .............. 2007 г.

Ученый секретарь<br>Диссертационного совета<br>д.ф.-м.н., профессор А.Е. Гутман

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Диссертационная работа посвящена одной из наиболее актуальных областей современной математики — инвариантам трехмерных многообразий, узлов и зацеплений. Инварианты многообразий — это специальным образом построенные величины, значения которых определяются лишь топологическими свойствами каждого конкретного многообразия и не зависят от деталей построения. Например, эйлерова характеристика, инварианты Тураева-Виро, Черна-Саймонса, кручения Райдемайстера, Уайтхеда и т. д.

В диссертации изучается один метод построения инвариантов 3-многообразий, разработка которого была начата в работах И.Г. Корепанова в 2001–2004 гг. Метод основан на приписывании различным элементам триангуляции многообразия евклидовых геометрических величин — длин ребер, двугранных углов, объемов тетраэдров и т. д. Рассмотрение бесконечно малых деформаций этих величин в комбинации с алгебраическими конструкциями в духе стандартной теории кручений приводит к некоторому конечному алгебраическому комплексу — основному объекта исследования данной диссертации — который оказывается ацикличеcким, и его кручение является основным ингредиентом в формуле для инварианта. Такого рода инварианты в работе называются геометрическими ввиду того, что при их построении ключевую роль играет геометрия 3-мерного евклидова пространства.

Геометрические инварианты допускают многочисленные обобщения и модификации. Например, взамен трехмерного евклидова пространства можно использовать трехмерную сферу и рассматривать представления фундаментальной группы в группе SO(4). Начало такой деятельности положено в работе Ю. Тэйлор и К. Вудворда[1]. Помимо евклидовой и сферической геометрий, оказывается возможным построить инвариант 3-мерных многообразий для двумерной аффинной геометрии плоскости с группой изометрий $SL(2,\mathbb{R})$ [1]. Кроме того, можно дополнительно "подкрутить" инвариант, введя в рассмотрение представления фундаментальной группы в группе автоморфизмов линейных пространств, входящих в ациклический комплекс. Для линзовых пространств эта возможность исследована в работе [3].

Также стóит отметить, что некоторые формулы, используемые при построении инвариантов, весьма напоминают квазиклассический предел соотношений

[1] Taylor Y., Woodward C. Spherical tetrahedra and invariants of 3-manifolds // Preprint.– arXiv:math.GT/0406228.– 2004.

для квантовых объектов. Поэтому, вполне вероятно, что геометрические инварианты могут оказаться лишь пределами каких-то более общих квантовых структур[2].

Задача различения 3-многообразий с помощью инвариантов является составной частью важнейшей задачи маломерной топологии — полной классификации трехмерных многообразий. Кроме того, рассмотрение относительной версии инварианта пары — 3-многообразие и оснащенное зацепление в нем — позволяет строить топологические теории поля с помощью аксиом М. Атьи[3].

Таким образом, все вышеизложенное позволяет считать тему диссертационной работы актуальной, полезной для развития теории и использования в приложениях.

**Цель работы.** Целью диссертационной работы является исследование различных свойств геометрических инвариантов, вычисление их для конкретных примеров, а также сравнение с другими известными инвариантами.

***Научная новизна.*** Все основные результаты исследования являются новыми. К основным результатам можно отнести следующие.

- Доказана ацикличность геометрического комплекса, кручение которого является наиболее существенным множителем в формуле для инварианта.

- Показано, что при некоторых условиях геометрический инвариант обладает свойством мультипликативности относительно операции связного суммирования многообразий.

- Получена общая формула значений геометрического инварианта для трехмерных линзовых пространств.

- Предложен метод построения "скрученной" версии геометрического инварианта трехмерных многообразий и зацеплений.

**Теоретическая и практическая ценность.** Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы как

---

[2]Korepanov I.G. Invariants of three-dimensional manifolds from four-dimensional Euclidean geometry // Preprint.– arXiv:math.GT/0611325.– 2006.

[3]Atiyah M.F. Topological quantum field theory // Publications Mathématiques de l'IHÉS.– 1988.– Vol. 68.– P.175–186.

в чистой математике для различения 3-многообразий и узлов, так и в математической физике, к примеру, в квантовой гравитации, теории исчисления Редже и при построении новых топологических теорий поля. Кроме того, результаты диссертации могут стать основой для развития теории геометрических инвариантов в различных направлениях, например, для обобщения на случай $n$-мерных многообразий, для построения неевклидовых/квантовых версий инварианта и т. д.

**Апробация работы.** Основные положения, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на международной конференции "Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств", посвященной столетию Л.В. Келдыш (Москва, 2004 г.); на региональной молодежной школе-конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2005 г., 2007 г.); на семинарах кафедры компьютерной топологии и алгебры Челябинского государственного университета под руководством профессора, чл.-корр. РАН С.В. Матвеева (Челябинск, 2003–2005 гг.) и на ежегодных научно-технических конференциях Южно-Уральского государственного университета (Челябинск, 2003–2006 гг.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано пять работ. Список публикаций [1–5] приведен в конце автореферата. Из работ [1, 2], выполненных совместно с научным руководителем, на защиту выносятся только результаты, полученные автором лично.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, разбитых на 9 параграфов, и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 103 страницы. Библиография включает 73 наименования.

## Содержание диссертации

Во *введении* дан краткий обзор работ по теме диссертации, поставлена цель работы и кратко изложено ее содержание.

В *первой главе* мы занимаемся построением и вычислением геометрического инварианта для трехмерных многообразий.

Пусть $M$ — связное замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие, $T$ — его триангуляция. Будем говорить, что на $T$ задана *допустимая расцветка*, если каждому ребру $e_{ij} \in T$ сопоставлено число $\lambda_{ij}$ так, что определитель Кэли-Менгера для каждого тетраэдра из $T$ строго больше нуля, и всем тетраэдрам из $T$ знаки сопоставлены таким образом, что при каждом ребре *угол дефекта*, т. е. алгебраическая сумма двугранных углов по модулю $2\pi$, тождественно равен нулю.

Построение геометрического инварианта естественно разбивается на несколько шагов.

Сначала (§ 1.1), по заданной допустимой расцветке триангуляции многообразия $M$ строится класс $[\rho]$ эквивалентных представлений $\rho\colon \pi_1(M) \to \mathrm{E}(3)$ фундаментальной группы многообразия в группе сохраняющих ориентацию изометрий трехмерного евклидова пространства, а также регулярное накрытие многообразия $M$, соответствующее ядру представления $\rho \in [\rho]$.

Далее, накрывающее пространство отображается в трехмерное евклидово пространство в соответствии с действием группы $\operatorname{Im}\rho$. Под этим понимается следующее: вершины накрывающего пространства, принадлежащие одной орбите, переходят друг в друга под действием элементов группы $\operatorname{Im}\rho$; симплексы же ненулевой размерности переходят в выпуклые линейные оболочки образов соответствующих вершин. Следующая теорема по сути утверждает, что такое отображение согласовывается с допустимой расцветкой, заданной изначально.

**Теорема 1.** *Пусть $\tilde{T}$ — симплициальный комплекс для универсального накрывающего пространства $\tilde{M}$ с индуцированной на нем допустимой расцветкой. Тогда, существует непрерывное отображение $\Gamma\colon \tilde{T} \to \mathbb{R}^3$ такое, что $l_{ij} = \lambda_{ij}$, $\forall i,j$, где $l_{ij}$ — длина ребра $\Gamma(e_{ij})$. Любое другое отображение $\Gamma'\colon \tilde{T} \to \mathbb{R}^3$ для той же самой допустимой расцветки получается из $\Gamma$ сохраняющей ориентацию изометрией пространства $\mathbb{R}^3$.*

В § 1.2 определяется комплекс конечномерных векторных пространств с фиксированными базисами.

- Пространство

$$\mathfrak{e}(3)_\rho = \{u \in \mathfrak{e}(3) \mid \mathrm{Ad}_{\rho(h)}\, u = u, \forall h \in \pi_1(M)\} \cong H^0(M; \mathrm{Ad}_\rho),$$

  где $\mathrm{Ad}_\rho = \mathrm{Ad} \circ \rho\colon \pi_1(M) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{e}(3))$.

- Пространство $(dg) = T_{[\rho]}R(M, \mathrm{E}(3)) \cong H^1(M; \mathrm{Ad}_\rho)$, где $R(M, \mathrm{E}(3))$ — пространство представлений группы $\pi_1(M)$ в $\mathrm{E}(3)$.

- Пространство $(dx) = T_\Gamma \mathbb{R}_x^{3N_0}$, где $\mathbb{R}_x^{3N_0}$ — пространство всех отображений множества вершин из $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^3$.

- Пространство $(dl) = T_\Gamma\mathbb{R}_l^{N_1}$, где $\mathbb{R}_l^{N_1}$ — пространство всех отображений множества ребер из $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}$ с базисом $(l_1, \ldots, l_{N_1})$, $l_i$ — евклидова длина $i$-го ребра.

- Пространство $(d\omega) = T_\Gamma\mathbb{R}_\omega^{N_1}$, где $\mathbb{R}_\omega^{N_1}$ — пространство всех отображений множества ребер из $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}$ с базисом $(\omega_1, \ldots, \omega_{N_1})$, $\omega_i$ — угол дефекта в $i$-ом ребре.

- Пространства $\mathfrak{e}(3)_\rho^*$, $(dx)^*$ и $(dg)^*$ с двойственными базисами к $\mathfrak{e}(3)_\rho$, $(dx)$ и $(dg)$ соответственно.

Здесь $\mathcal{F}$ — фундаментальное семейство симплексов триангуляции $\tilde{T}$ накрывающего пространства, т. е. такое семейство симплексов из $\tilde{T}$, что над каждым симплексом из $T$ лежит в точности один симплекс из этого семейства. Кроме того, мы используем обозначение $T_xM$ для касательного пространства к $M$ в точке $x$.

**Теорема 2.** *Последовательность векторных пространств и отображений*

$$0 \to \mathfrak{e}(3)_\rho \xrightarrow{f_1} (dx)\oplus(dg) \xrightarrow{f_2} (dl) \xrightarrow{f_3=f_3^T} (d\omega) \xrightarrow{-f_2^T} (dx)^*\oplus(dg)^* \xrightarrow{f_1^T} \mathfrak{e}(3)_\rho^* \to 0 \quad (1)$$

*является ациклическим комплексом, т. е. образ каждого отображения в нем совпадает с ядром последующего.*

Ациклический комплекс (1) мы называем *геометрическим*. Обозначим его кручение через $\tau$ и определим *геометрический инвариант* многообразия $M$ по формуле

$$I_\rho(M) = \frac{\tau}{\prod(-V)}, \quad (2)$$

где $V$ обозначает ушестеренный объем тетраэдра и произведение распространяется на все тетраэдры из фундаментального семейства $\mathcal{F}$.

Разумеется, построенный таким способом инвариант, существенным образом зависит от представления $\rho$ или точнее, от класса эквивалентных представлений $[\rho]$. К примеру, для тривиального представления компьютерные вычисления указывают на то, что наш инвариант выражается через первую группу гомологий многообразия $H_1$. В то же время, для абелевых (нетривиальных) представлений, по крайней мере для линзовых пространств и пространства $S^2 \times S^1$, инвариант выражается через $H_1$ и *кручение Райдемайстера* (ср. формулы (3) и (5) ниже).

В § 1.3 показано, что геометрические инварианты обладают свойством мультипликативности относительно операции связного суммирования многообразий.

Пусть $M_1, M_2$ — ориентированные замкнутые 3-многообразия, $\rho_i\colon \pi_1(M_i) \to \mathrm{E}(3)$ — представление фундаментальной группы многообразия $M_i$ в $\mathrm{E}(3)$. Обозначим $\rho_{\#}\colon \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) \to \mathrm{E}(3)$ представление свободного произведения групп $\pi_1(M_1)$ и $\pi_1(M_2)$ такое, что $\rho_{\#|_{\pi_1(M_i)}} = \rho_i$.

**Теорема 3.** *Пусть представление $\rho_1 = \theta$ тривиально. Тогда, для многообразия $M_1\#M_2$ и представления $\rho_{\#}$ геометрический инвариант равен*

$$I_{\rho_{\#}}(M_1\#M_2) = -I_\theta(M_1)\cdot I_{\rho_2}(M_2).$$

Наконец, в § 1.4 проводятся подробные вычисления инварианта для следующих многообразий.

- Линзовые пространства $L(p,q)$.

**Теорема 4.** *Инвариант $I_k(L(p,q))$ для линзового пространства $L(p,q)$ и нетривиального представления $\rho_k$ фундаментальной группы $\mathbb{Z}_p$ имеет вид*

$$I_k(L(p,q)) = -\frac{1}{p^2}\left(4\sin\frac{\pi k}{p}\sin\frac{\pi kq}{p}\right)^4, \tag{3}$$

*где $k = 1,\dots,p-1$.*

- Октаэдрическое многообразие $S^3/P_{24}$ и *неабелево* представление $\rho$ его фундаментальной группы. Инвариант в данном случае

$$I_\rho(S^3/P_{24}) = 4. \tag{4}$$

- Пространство $S^2\times S^1$ и нетривиальное представление его *бесконечной* фундаментальной группы. Параметризуем представление $\rho\colon \mathbb{Z}\to \mathrm{E}(3)$ переменными $h$ и $\gamma$ — сдвигом и поворотом вокруг фиксированной оси соответственно. Тогда

$$I_{\gamma,h}(S^2\times S^1) = (2-2\cos\gamma)^4. \tag{5}$$

*Вторая глава* посвящена теории геометрических инвариантов для узлов и зацеплений. Здесь также можно выделить несколько основных этапов построения инварианта.

В § 2.1 по заданному ориентированному зацеплению $L$ строится триангуляция трехмерной сферы $S^3$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) все зацепление $L$ лежит на некоторых ребрах триангуляции;

2) не более чем две вершины любого тетраэдра триангуляции принадлежат $L$;

3) вершины любого ребра $e$ триангуляции либо различны, либо совпадают, причем в последнем случае $e$ представляет меридиан соответствующей компоненты зацепления.

Ребра с совпадающими вершинами из условия 3) необходимы для описания локальных преобразований триангуляции $1 \leftrightarrow 2$, которых в совокупности с движениями Пахнера достаточно для того, чтобы преобразовать одну триангуляцию сферы со свойствами 1) – 3) в любую другую с теми же свойствами[4].

Здесь же, в § 2.1, формулируется общий алгоритм построения описанного разбиения для произвольного $L$.

Далее, по заданному представлению $\rho\colon \pi L \to \mathrm{SO}(3)$ группы зацепления в группе $\mathrm{SO}(3)$ строится разветвленное вдоль $L$ накрытие трехмерной сферы, соответствующее ядру представления. После этого, в полной аналогии со случаем 3-многообразий накрывающее пространство отображается в трехмерное евклидово пространство в соответствии с действием группы $\operatorname{Im}\rho$.

В § 2.2 строится алгебраический комплекс, аналогичный (1). Фиксированные базисы линейных пространств в нем состоят из дифференциалов евклидовых величин — координат вершин, длин ребер и т. д. Наконец, в предположении ацикличности этого комплекса определяется его кручение $\tau$ и далее геометрический инвариант зацепления:

$$I_\rho(L) = \tau \cdot \frac{\prod_{j=1}^{N} (2 - 2\cos\varphi_j)^{n_j}}{\prod' l^2 \cdot \prod(-V)}. \qquad (6)$$

[4]Корепанов И.Г. Геометрия евклидовых тетраэдров и инварианты узлов // Фундаментальная и прикладная математика.– 2005.– Т.11, № 4.– С.105–117.

Здесь $N$ — число компонент зацепления, $n_j$ — количество вершин в триангуляции сферы $S^3$, принадлежащих $j$-ой компоненте зацепления, $\varphi_j$ — параметры представления $\rho$ (поворот на угол $\varphi_j$ вокруг перехода, принадлежащего $j$-ой компоненте, определяет образующую группы зацепления в копредставлении Виртингера). В знаменателе, произведение квадратов длин ребер распространяется только на те ребра из фундаментального семейства $\mathcal{F}$, через которые проходит зацепление. Произведение ушестеренных объемов $V$ распространяется на все тетраэдры из $\mathcal{F}$.

В § 2.3 проводятся подробные вычисления инварианта для трилистника в случае абелева и неабелева представлений его группы в SO(3). Здесь же формулируется гипотеза о том, что для абелевых представлений группы зацепления наш инвариант выражается через полином Александера.

**Гипотеза 1.** *Пусть $L$ — зацепление с $N$ компонентами, $\Delta_L(t_1,\dots,t_N)$ — его полином Александера. Если представление $\rho\colon \pi L \to \mathrm{SO}(3)$ абелево, то*

$$I_\rho(L) = \begin{cases} -|\Delta_L(e^{i\varphi_1})|^{-4}\cdot(2-2\cos\varphi_1)^2, & N=1 \\ -|\Delta_L(e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_N})|^{-4}, & N>1. \end{cases} \tag{7}$$

*Третья глава* посвящена обобщению нашего инварианта, которое можно назвать "скрученным" геометрическим инвариантом, т.к. идея построения здесь во многом схожа с идеей построения скрученного полинома Александера.

В § 3.1 проведено построение "скрученной" версии инварианта для 3-многообразий.

Пусть $M$ — связное замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие, $T$ — его триангуляция, $\pi_1(M)$ — фундаментальная группа. Сначала мы берем представление $\rho\colon \pi_1(M) \to \mathrm{E}(3)$ и соответствующее ему регулярное накрытие $p_\rho\colon \tilde{M} \to M$ с индуцированной симплициальной структурой $\tilde{T}$. Затем выделяем из $\tilde{T}$ фундаментальное семейство симплексов $\mathcal{F}$ и строим непрерывное отображение $\Gamma\colon \tilde{T} \to \mathbb{R}^3$.

Таким образом, до этого момента построение "скрученного" геометрического инварианта ничем не отличается от построения обычного инварианта, описанного в главе 1. Различия начинаются на этапе построения алгебраического комплекса. Можно сказать, что идея обобщения инварианта заключается в замене на этом этапе представления $\rho$ тензорным произведением $\alpha\otimes\rho$, где

$$\alpha\colon \pi_1(M) \to H_1(M)/\operatorname{Tors} H_1(M) \cong \langle t_1,\dots,t_{\beta_1} \mid t_it_j = t_jt_i, \forall i,j\rangle. \tag{8}$$

В предположении ацикличности "скрученного" геометрического комплекса можно определить его кручение $\tau$ и затем инвариант:

$$I_{\alpha\otimes\rho}(M) = \frac{\tau}{\prod(-V)}, \tag{9}$$

где $V$ — ушестеренный объем тетраэдра и произведение распространяется на все тетраэдры из $\mathcal{F}$.

В конце § 3.1 в качестве примера проводятся вычисления "скрученного" инварианта для многообразия $S^2 \times S^1$. При этом мы используем ту же самую триангуляцию и то же самое представление $\rho$, что и при вычислениях "нескрученной" версии инварианта. Результат вычислений имеет вид

$$I_{\alpha\otimes\rho}(S^2 \times S^1) = \left(8\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi+\gamma}{2}\sin\frac{\varphi-\gamma}{2}\right)^4, \tag{10}$$

где мы использовали представление $\mathbb{Z} \to U(1): t \mapsto e^{i\varphi}$ для того, чтобы перейти от элемента группы $t$ к вещественной переменной $\varphi$.

В § 3.2 строится "скрученный" геометрический инвариант для зацеплений.

Пусть $L$ — снабженное ориентацией зацепление с $N$ компонентами. Как и при построении "нескрученной" версии инварианта из главы 2, сначала берется триангуляция 3-сферы, по ребрам которой проходит зацепление. Затем, по заданному представлению $\rho$: $\pi L \to \mathrm{SO}(3)$ строится разветвленное вдоль $L$ накрытие сферы с индуцированной симплициальной структурой, и в нем выделяется фундаментальное семейство симплексов $\mathcal{F}$. После этого, накрывающее пространство отображается в трехмерное евклидово пространство в соответствии с действием группы $\operatorname{Im}\rho$.

На этапе построения алгебраического комплекса представление $\rho$, в полной аналогии со случаем 3-многообразий, заменяется тензорным произведением представлений $\alpha \otimes \rho$, где

$$\alpha\colon \pi L \to \mathbb{Z}^N \cong \langle t_1, \ldots, t_N \mid t_i t_j = t_j t_i, \forall i, j\rangle \tag{11}$$

— представление абелизации. Тогда, "скрученный" геометрический инвариант определяется по формуле

$$I_{\alpha\otimes\rho}(L) = \tau \cdot \frac{\prod_{j=1}^{N}(2\cos\varphi_j - t_j - t_j^{-1})^{n_j}}{\prod(-V)}. \tag{12}$$

Здесь, $\tau$ — кручение "скрученного" геометрического комплекса, $n_j$ — количество вершин в триангуляции сферы, принадлежащих $j$-ой компоненте зацепления, $\varphi_j$ — углы, параметризующие представление $\rho$, $t_j$ — образ меридиана $j$-ой компоненты относительно $\alpha$. В знаменателе, произведение ушестеренных объемов $V$ распространяется на все тетраэдры из $\mathcal{F}$.

В конце § 3.2 проводятся вычисления "скрученного" инварианта для трилистника $3_1$ и неабелева представления $\rho$. Результат вычислений имеет вид

$$I_{\alpha\otimes\rho}(3_1) = -\frac{t^3}{(1-t^3)^2}. \tag{13}$$

Напомним, что скрученный полином Александера для трилистника и неабелева представления $\rho\colon \pi 3_1 \to \mathrm{SO}(3)$ равен

$$\Delta_{3_1,\rho}(t) = 1 - t^3.$$

Сравнивая это с (13), получаем

$$I_{\alpha\otimes\rho}(3_1) = -\frac{t^3}{\Delta_{3_1,\rho}(t)^2}.$$

Проведенные вычисления показали, что аналогичный результат верен и для других узлов и зацеплений, в частности, для восьмерки и зацепления Уайтхеда.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору И.Г. Корепанову, за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе.

## Работы автора по теме диссертации


1. Корепанов И.Г., Мартюшев Е.В. Классическое решение уравнения пентагона, связанное с группой SL(2) // ТМФ.– 2001.– Т.129, № 1.– С.1320–1324.

2. Korepanov I.G., Martyushev E.V. Distinguishing three-dimensional lens spaces $L(7,1)$ and $L(7,2)$ by means of classical pentagon equation // J. Nonlin. Math. Phys.– 2002.– Vol.9., No.1– P.86–98.

3. Martyushev E.V. Euclidean simplices and invariants of three-manifolds: a modification of the invariant for lens spaces // Известия Челябинского научного центра.– 2003.– Vol.19., No.2.– P.1–5.

4. Martyushev E.V. Euclidean geometric invariants of links in 3-sphere // Известия Челябинского научного центра.– 2004.– Vol.26., No.4.– P.1–5.

5. Мартюшев Е.В. Геометрические инварианты триангулированных накрытий, ветвящихся вдоль зацеплений // Труды 36-й Региональной молодежной конференции.– Екатеринбург: Изд-во Института математики и механики УрО РАН, 2005.– С.47–51.