УДК 519.63 DOI: 10.14529/mmp150213

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИН

А.Л. Ушаков

Рассматривается эллиптические краевые задачи четвертого порядка, лежащие в основе математических моделей деформаций пластин на упругих основаниях при смешанных краевых условиях четырех теоретически возможных типов. Предлагаются замещения этих задач в вариационной форме на их фиктивные продолжения. Решения последних задач с помощью модификаций методов фиктивных компонент сводятся к решениям задач в прямоугольной области. Приводятся оптимальные оценки сходимости итерационных процессов на непрерывном уровне. При простой дискретизации фиктивно продолженных задач по методу конечных элементов на параболических восполнениях получаются эффективные численные модификации методов фиктивных компонент простые при практической реализации на ЭВМ. Получаемые системы линейных алгебраических уравнений могут оптимально решаться с помощью методов итерационных факторизаций. В итоге предложенные численные методы являются логарифмически оптимальными или оптимальными по количеству арифметических операций, необходимых для достижения задаваемых относительных погрешностей.

Ключевые слова: деформации пластин; фиктивные продолжения.

1. Математические модели деформации пластин. Пусть $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченные области. Рассматриваются математические модели теории упругости для вычислений деформаций пластин $\breve{u}_\alpha$ на упругих основаниях под действиями давлений $\breve{f}_\alpha$ при различных однородных краевых условиях

$$\begin{gathered} \Delta^2\breve{u}_\alpha + \breve{a}_\alpha\breve{u}_\alpha = \breve{f}_\alpha, \ \ \alpha = 1, 2, \\ \breve{u}_\alpha|_{\Gamma_{\alpha,0}} = \frac{\partial \breve{u}_\alpha}{\partial n_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,0}} = 0, \ \ \breve{u}_\alpha|_{\Gamma_{\alpha,1}} = l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha|_{\Gamma_{\alpha,1}} = 0, \\ \frac{\partial \breve{u}_\alpha}{\partial n_\alpha}\Big|_{\Gamma_{\alpha,2}} = l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha|_{\Gamma_{\alpha,2}} = 0, \ \ l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha|_{\Gamma_{\alpha,3}} =, \ \ l_{\alpha,2}\breve{u}_\alpha|_{\Gamma_{\alpha,3}} = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь границы $s_\alpha = \partial\Omega_\alpha = \bar{\Gamma}_{\alpha,0} \bigcup \bar{\Gamma}_{\alpha,1} \bigcup \bar{\Gamma}_{\alpha,2} \bigcup \bar{\Gamma}_{\alpha,3}$, $\Gamma_{\alpha,i} \bigcap \Gamma_{\alpha,j} = \emptyset$, если $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, $\vec{n}_\alpha$ – внешние нормали к $\partial\Omega_\alpha$ $\breve{a}_\alpha \in [0; +\infty)$, $\sigma_\alpha \in (0; 1)$ – константы. Дифференциальные операторы

$$l_{\alpha,1}\breve{u}_\alpha = \Delta\breve{u}_\alpha + (1-\sigma_\alpha)n_{\alpha,1}n_{\alpha,2}\breve{u}_{\alpha xy} - n^2_{\alpha,2}\breve{u}_{\alpha xx} - n^2_{\alpha,1}\breve{u}_{\alpha yy},$$

$$l_{\alpha,2}u_\alpha = \frac{\partial\Delta\breve{u}_\alpha}{\partial n_\alpha} + (1-\sigma_\alpha)\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(n_{\alpha,1}n_{\alpha,2}(\breve{u}_{\alpha yy} - \breve{u}_{\alpha xx}) + (n^2_{\alpha,1} - n^2_{\alpha,2})\breve{u}_{\alpha xy}),$$

причем $n_{\alpha,1} = -\cos(n_\alpha, x)$, $n_{\alpha,2} = -\cos(n_\alpha, y)$. Краевые условия из (1) определяют, что у пластин на $\Gamma_{\alpha,0}$ жесткая заделка, на $\Gamma_{\alpha,1}$ – шарнирное опирание, на $\Gamma_{\alpha,2}$ – симметрия и на $\Gamma_{\alpha,3}$ – свободное опирание.

Моделям из (1) соответствуют следующие вариационные модели деформации пластин

$$\breve{u}_\alpha \in \breve{H}_\alpha : \ \Lambda_\alpha(\breve{u}_\alpha, \breve{v}_\alpha) = \breve{g}_\alpha(\breve{v}_\alpha) \ \forall\breve{v}_\alpha \in \breve{H}_\alpha, \breve{g}_\alpha \in \breve{H}'_\alpha, \alpha = 1, 2, \tag{2}$$

где

$$\breve{H}_\alpha = \breve{H}_\alpha(\Omega_\alpha) = \left\{\breve{v}_\alpha \in W^2_2(\Omega_\alpha) : \ \breve{v}_\alpha|_{\Gamma_{\alpha,0}\bigcup\Gamma_{\alpha,1}} = 0, \ \frac{\partial\breve{v}_\alpha}{\partial\vec{n}_\alpha}\,|_{\Gamma_{\alpha,0}\bigcup\Gamma_{\alpha,2}} = 0\right\} -$$

соболевские пространства функций на областях Ω_α,

$$\Lambda_\alpha(\breve{u}_\alpha, \breve{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha}(\sigma_\alpha\Delta\breve{u}_\alpha\Delta\breve{v}_\alpha + (1-\sigma_\alpha)(\breve{u}_{\alpha xx}\breve{v}_{\alpha xx} + 2\breve{u}_{\alpha xy}\breve{v}_{\alpha xy} + \breve{u}_{\alpha yy}\breve{v}_{\alpha yy}) + a_\alpha\breve{u}_\alpha\breve{v}_\alpha)d\Omega_\alpha -$$

билинейные формы и $\breve{g}_\alpha(\breve{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \breve{f}_\alpha \breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha$ – линейные функционалы. Предположим, что для задачи (2) имеют место оценки

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty) : c_1 \|\breve{v}_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)} \le \Lambda_\alpha(\breve{v}_\alpha, \breve{v}_\alpha) \le c_2 \|\breve{v}_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)} \, \forall \breve{v}_\alpha \in \breve{H}_\alpha, \alpha = 1, 2.$$

2. Фиктивные продолжения непрерывных задач и их решений. Рассмотрим фиктивные продолжения вариационных моделей деформаций пластин (2) вида

$$\breve{u} \in \breve{V} : \ \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}, \breve{v}) = \breve{g}_1(I_1\breve{v}) + \breve{g}_2(\breve{v}) \ \ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \ \ \breve{g}_{3-\alpha}(\breve{v}) = 0 \ \forall \breve{v} \in \breve{V}_{3-\alpha}, \ \ \alpha = 1, 2, \quad (3)$$

где

$$\breve{V} = \breve{V}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Omega) : \ \breve{v}|_{\Gamma_0 \bigcup \Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial \breve{v}}{\partial \vec{n}} \, |_{\Gamma_0 \bigcup \Gamma_2} = 0 \right\} -$$

соболевское пространство функций на области Ω с нормой $\|\breve{v}\|_{\breve{V}} = \sqrt{\Lambda(\breve{v}, \breve{v})}$. Ограниченные плоские области Ω, $\Omega_{3-\alpha}$ такие, что Ω_1, $\Omega_2 \subset \Omega$, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \bigcup \bar{\Omega}_2$, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$, $\Gamma_{1,0} \bigcap \Gamma_{2,3} \supseteq \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 = S \neq \emptyset$. Граница $s = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \bigcup \bar{\Gamma}_1 \bigcup \bar{\Gamma}_2 \bigcup \bar{\Gamma}_3$, $\Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \emptyset$, если $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, причем $\vec{n}$ ее внешняя нормаль. Определим подпространства пространства $\breve{V}$

$$\breve{V}_{i^2} = \left\{ \breve{v}_{i^2} \in \breve{V} : \breve{v}_{i^2} \, |_{\Omega \setminus \Omega_i} \ = 0 \right\}, \ i = 1, \, 2.$$

Зададим $\Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, \breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}, \breve{v})$, причем $\Lambda_i(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_i(\breve{u}\,|_{\Omega_i}, \breve{v}\,|_{\Omega_i})$, $\breve{g}_i(\breve{v}) = \breve{g}_i(\breve{v}\,|_{\Omega_i})$ при любых $\breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}$, $i = 1, \, 2$. В этом случае будем считать, что имеют место оценки

$$\exists c_1, c_2 \in (0;+\infty) : c_1 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \le \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \le c_2 \|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \, \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Пусть $\breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_4$ – прямая сумма подпространств $\breve{V}_{i^2}$, $i = 1, 2$, в скалярном произведении $\Lambda(\cdot, \cdot)$, подпространство $\breve{V}_3 = \left\{ \breve{v}_3 \in \breve{V} : \ \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_0) = 0 \ \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0 \right\}$, т.е. $\breve{V} = \breve{V}_0 \oplus \breve{V}_3$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot, \cdot)$. Причем через $\breve{v}_0 \in \breve{V}$, $\breve{v}_3 \in \breve{V}$ обозначены проекции v на соответствующие подпространства. Далее вводятся подпространства $\breve{V}_{8-3i} = \breve{V}_3 \oplus \breve{V}_{i^2}$, $i = 1, \, 2$, тогда имеет место $\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2$. Будем считать, что $\breve{H}_i = \breve{H}_i(\Omega_i) = \breve{V}_i(\Omega_i), \breve{V}(\Omega_i) = \breve{V}\,|_{\Omega_i}$, $i = 1, \, 2$, $H_2 = V(\Omega_2)$.

Определим, что $I_{i^2} : \breve{V} \to \breve{V}_{i^2}$, $i = 1, \ 2,$ – ограниченные операторы, причем $\breve{V}_{i^2} = \mathrm{im} I_{i^2}$. Заметим при этом, что $I_{i^2} = I^2_{i^2}$, т.е. I_{i^2} проекторы, но не обязательно ортопроекторы. Будем считать, что $I_0 = I_1 + I_4$. Здесь $I_0 : \breve{V} \to \breve{V}_0$ – ограниченный оператор, причем $\breve{V}_0 = \mathrm{im} I_0$, при этом $I_0 = I_0^2$, т.е. I_0 проектор, но не обязательно ортопроектор. Можно отметить, что

$$\Lambda_1(\breve{u}, I_0\breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}), \breve{g}_1(I_0\breve{v}) = \breve{g}_1(I_1\breve{v}) \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

Предположение 1. *Имеют место следующие неравенства*

$$\exists \beta_1 \in (0; 1] \ \ \exists \beta_2 \in [\beta_1; 1] : \ \beta_1 \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \le \Lambda_2(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \le \beta_2 \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \ \forall \breve{v}_3 \in \breve{V}_3.$$

3. Модификации методов фиктивных компонент. Для вычислений деформаций пластин на непрерывном уровне были предложены следующие итерационные процессы [1].

$$\begin{gathered} \breve{u}^k \in \breve{V} : \ \Lambda(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_k(\Lambda_1(\breve{u}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \Lambda_2(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - \breve{g}_1(I_1\breve{v}) - \breve{g}_2(\breve{v})) \ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \\ \tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau, \ \tau \in (0; 2), \\ \tau_k \in (0; \, 2\beta_2^{-1}), \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \, ; \ \forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_\alpha \subset \breve{V}, \ \alpha = 1, \, 2. \end{gathered} \quad (4)$$

Теорема 1. *Для итерационных процессов из (4) имеют место следующие оценки*

$$\left\| \breve{u}^k - \breve{u} \right\|_{\breve{V}} \le \breve{\varepsilon}_\alpha \left\| \breve{u}^0 - \breve{u} \right\|_{\breve{V}}, k \in \mathrm{N}, \alpha = 1, \, 2.$$

$$\left\| I_1 \breve{u}^k - \breve{u} \right\|_{\breve{V}} \le \| I_1 \|_{\breve{V}} \left\| \breve{u}^k - \breve{u} \right\|_{\breve{V}}, \alpha = 1,$$

где

$$0 \le \breve{\varepsilon}_\alpha \le ((2-\alpha)\delta_1 + (\alpha - 1) q_1)\, q^{k-1},$$

$$\delta_1 = \sqrt{\| I_1 \|_{\breve{V}}^2 - 1},\ \| I - I_1 \|_{\breve{V}}, 0 \le q_1 = \max \left\{ |1 - \tau\beta_1|\,,\ \ |1-\tau|\ \right\},\ \tau \in (0;2),$$

$$0 \le q = \max \left\{ |1 - \tau\beta_1|\,,\ \ |1 - \tau\beta_2|\ \right\} < 1, \tau \in (0;\, 2\beta_2^{-1}).$$

Здесь I оператор тождественного преобразования из $\breve{V}$ в $\breve{V}$. Если $\alpha = 2$ и $\tau_1 = \tau = 2/(1+\beta_1)$, то $q_1 = (1-\beta_1)/(1+\beta_1)$. Если $\tau_k = \tau = 2/(\beta_2 + \beta_1)$, то $q = (\beta_2 - \beta_1)/(\beta_2 + \beta_1),\ k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

4. Дискретизации фиктивно продолженных задач. При дискретизации задач из (3) будем дополнительно предполагать, что

$$\breve{V} = \breve{V}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Omega):\ \ \breve{v}|_{\Gamma_0 \bigcup \Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial \breve{v}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0 \bigcup \Gamma_2} = 0 \right\},$$

где область $\Omega = (0;b_1) \times (0;b_2)$, с границами $\Gamma_0 = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_1 = \{b_1\} \times [0;b_2] \bigcup [0;b_1) \times \{b_2\}$, $s = \bar{\Gamma}_1 \bigcup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_3 = \emptyset$, $s = \partial\Omega$, $b_1, b_2 \in (0;+\infty)$, т.е. рассматриваются задачи, решение которых изучалось уже ранее в [2]. Предлагается рассмотреть на основе метода конечных элементов системы линейных алгебраических уравнений, получающихся при дискретизации задач, предложенных в (3),

$$B\bar{u} = \bar{g}. \tag{5}$$

Здесь $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$, $\bar{g} \in \mathbb{R}^N$. Пусть $\bar{v} \in \mathbb{R}^N$: $\bar{v} = (v_1, ..., v_N)'$, $N = m \cdot n$, m, $n \in \mathbb{N}$, а $v_{n(i-1)+j} = v_{i,j}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, и $v_{i,j}$ являются значениями функции дискретного аргумента, соответствующего узлам сетки $(x_i, y_j) = ((i-0,5)h_1, (j-0,5)h_2)$, шаги сетки $h_1 = b_1/(m+0,5)$, $h_2 = b_2/(n+0,5)$, состоящей из указанных выше узлов. Матрица B размерности $N \times N$

$$\langle B\bar{u}, \bar{v} \rangle =\ \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v})\ + \Lambda_2(\tilde{u}, \tilde{v})\, \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V} \subset \breve{V},$$

а векторы $\bar{g}$ определены $\langle \bar{g}, \bar{v} \rangle = \breve{g}_1(I_1\tilde{v}) + \breve{g}_2(\tilde{v})$ для любого $\tilde{v} \in \tilde{V}$. Здесь $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ – скалярное произведение векторов, причем $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k v_k h_1 h_2$ для любых $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^N$. Подпространство

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} : \tilde{v} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x,y), v_{i,j} \in \mathrm{R}, \right\} \subset \breve{V},$$

где базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x,y) = \Psi_{1,i}(x)\Psi_{2,j}(y), \Psi_{1,i}(x) = \mathrm{E}(1/i)\Psi(x/h_1 - i + 3) + \Psi(x/h_1 - i + 2) - \mathrm{E}(i/m)\Psi(x/h_1 - i),$$

$$\Psi_{2,j}(y) = \mathrm{E}(1/j)\Psi(y/h_2 - j + 3) + \Psi(y/h_2 - i + 2) - \mathrm{E}(j/n)\Psi(y/h_2 - j), i = 1, ..., m, j = 1, ..., n,$$

$$\Psi(z) = \left\{ \begin{array}{ll} 0,5z^2, & z \in [0;1]\,, \\ -z^2 + 3z - 1,5, & z \in [1;2]\,, \\ 0,5z^2 - 3z + 4,5, & z \in [2;3]\,, \end{array} \right.$$

$\Psi(z) = 0\,,\ \ z \notin [0;3]$, $E(\,\cdot\,)$ – целая часть числа. Будем предполагать, что оператор I_0 просто обнуляет все коэффициенты $v_{i,j}$ у базисных функций $\Phi^{i,j}(x,y)$, носители которых имеют не пустое пересечение с границей S, т.е. с границей (частью границы области), через которую осуществляются продолжения задач и их решений. Введем в рассмотрение подпространства

$$\tilde{V}_{i^2} = \left\{ \tilde{v}_{i^2} \in \tilde{V} : \tilde{v}_{i^2} \Big|_{\Omega \backslash \Omega_i} = 0 \right\},\ i = 1,\, 2.$$

Пусть $\tilde{V}_0 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_4$ прямая сумма подпространств $\tilde{V}_{i^2},\ i = 1,2$, в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$. Подпространство

$$\tilde{V}_3 = \left\{ \tilde{v}_3 \in \tilde{V} :\ \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_0) = 0\ \forall \tilde{v}_0 \in \tilde{V}_0 \right\},$$

т.е. $\tilde{V} = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{V}_3$ в скалярном произведении $\Lambda(\cdot,\cdot)$, а через $\tilde{v}_0 \in \tilde{V}$, $\tilde{v}_3 \in \tilde{V}$ обозначены проекции $\tilde{v}$ на соответствующие подпространства. Введем следующие подпространства: $\tilde{V}_{8-3i} = \tilde{V}_3 \oplus \tilde{V}_{i^2},\ i = 1,\ 2$, тогда имеет место $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$.

Замечание 1. Имеют место следующие неравенства

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0;1]\ \ \exists \tilde{\beta}_2 \in \left[\tilde{\beta}_1; 1\right] :\ \tilde{\beta}_1 \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3) \le \Lambda_2(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3) \le \tilde{\beta}_2 \Lambda(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3)\ \forall \tilde{v}_3 \in \tilde{V}_3.$$

5. Модификации методов фиктивных компонент на дискретном уровне. Предлагаются итерационные процессы вычислений деформаций пластин на дискретном уровне

$$\begin{gathered} \tilde{u}^k \in \tilde{V} :\ \Lambda(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) = -\tau_k(\Lambda_1(\tilde{u}^{k-1}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_2(\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) - \breve{g}_1(I_1\tilde{v}) - \breve{g}_2(\tilde{v}))\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}, \\ \tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau,\ \tau \in (0;\,2), \\ \tau_k \in (0;\, 2\tilde{\beta}_2^{-1}),\ k \in \mathbb{N}\backslash\{1\};\ \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_\alpha \subset \tilde{V},\ \alpha = 1,\ 2; \end{gathered} \tag{6}$$

модификации методов фиктивных компонент на матричном уровне

$$\begin{gathered} \bar{u}^k \in \mathbb{R}^N :\ \Lambda(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_k(B\bar{u}^{k-1} - \bar{g}), \\ \tau_1 = (2-\alpha) + (\alpha - 1)\tau,\ \tau \in (0;\,2), \\ \tau_k \in (0;\, 2\tilde{\beta}_2^{-1}),\ k \in \mathbb{N}\backslash\{1\};\ \forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^N,\ \alpha = 1,\ 2, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\tilde{V}_1 = \left\{ \tilde{v}_1 \in \tilde{V} :\ \tilde{v}_1 \in \breve{V}_1 \right\}, \tilde{V}_2 = \left\{ \tilde{v}_2 \in \tilde{V} :\ \Lambda(\tilde{v}_2, \tilde{v}_1) = 0\ \forall \tilde{v}_1 \in \tilde{V}_1 \right\},$$

$\bar{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^N$ – подпространства, соответствующие подпространствам $\tilde{V}_\alpha,\ \alpha = 1,\ 2$, а матрица Λ размерности $N \times N$ определяется $\langle \Lambda\bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda(\tilde{u}, \tilde{v})$ для любых $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V} \subset \breve{V}$.

Замечание 2. Если предполагать, что оператор I_1просто обнуляет все коэффициенты $v_{i,j}$ у базисных функций $\Phi^{i,j}(x,y)$, носители которых имеют не пустое пересечение с $\Omega\backslash\Omega_1$, то в (6), (7), в оценках относительной погрешности может появиться зависимость от шагов сетки

$$\exists c \in (0 + \infty) :\ \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|^2_{\breve{V}} - 1},\ \|I - I_1\|_{\breve{V}} \le c\,|\underline{h}|^{-3/2},\ \ |\underline{h}| = \min\{h_1, h_2\}.$$

Замечание 3. Если в (6), (7), $\alpha = 2$ и $\tau_1 = \tau = 2\Big/(1 + \tilde{\beta}_1)$, то $q_1 = (1 - \tilde{\beta}_1)\Big/(1 + \tilde{\beta}_1)$. Если в (6), (7) $\tau_k = 2\Big/(\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_1)$, то $q = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)\Big/(\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_1),\ k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Вывод. При решении задач, возникающих на каждом шаге итерационных процессов из (7) можно использовать метод итерационных факторизаций из [2]. Для решения задач из (5) с N неизвестными (шаги сетки одного порядка) по предложенным итерационным процессам из (7) требуется, если $\alpha = 1$ не более чем $O(N \ln N \ln^2 \varepsilon_\alpha^{-1})$ арифметических операций, если $\alpha = 2$ не более чем $O(N \ln^2 \varepsilon_\alpha^{-1})$ арифметических операций. Для выбора итерационных параметров τ_k не требуется знания констант $\tilde{\beta}_1,\ \tilde{\beta}_2$. При выборе этих параметров можно использовать известные вариационные методы и рекомендовать, при $\alpha = 1$ со второй итерации метод скорейшего спуска, а при $\alpha = 2$ уже с первой итерации метод минимальных поправок.

Литература

1. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент / А.Л. Ушаков; Челяб. гос. техн. ун-т. – Челябинск, 1991. – 40 с. (Деп. в ВИНИТИ 11.11.1991, №4232-В1991)
2. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация на фиктивном продолжении для численного решения эллиптического уравнения четвертого порядка / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №2. – С. 17–22.

Андрей Леонидович Ушаков, старший преподаватель, кафедра «Дифференциальные и стохастические уравнения», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), ushakov_al@inbox.ru.

Поступила в редакцию 27 января 2015 г.

MSC 65N85 **DOI: 10.14529/mmp150213**

About Modelling of Deformations of Plates

A.L. Ushakov, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation), ushakov_al@inbox.ru

Of concern are the elliptic boundary problems of the fourth order which are underlying in mathematical models of deformations of plates on the elastic bases under the mixed boundary conditions of four theoretically possible types. Replacements of these problems in a variation form to their fictitious continuations are proposed. Solutions of the last problems by means of modifications of fictitious components methods are reduced to solutions of problems in a rectangular area. Optimum estimates of convergence of iterative processes at the continuous level are given. At simple sampling of fictitiously continued problems by method of final elements on parabolic completions, effective numerical modifications of fictitious components methods turn out to be suitable for practical realization on the computer. The received systems of linear algebraic equations can be optimally solved by means of iterative factorizations methods. As a result the proposed numerical methods are log-optimal or optimal by number of arithmetic operations necessary for achievement of set relative errors.

Keywords: deformations of plates; fictitious continuations.

References

1. Ushakov A.L. *Modifikaziya metoda fiktivnykh komponent* [Modification of a Method of Fictitious Components (Depp. in VINITI 11.11.1991, no. 4232-B1991)]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State Technical University, 1991. 40 p.
2. Ushakov A.L. [Iterative Factorization on Fictitious Continuation for the Numerical Solution of the Elliptic Equation of the Fourth Order]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 17–22. (in Russian)

Received January 27, 2015 г.