

# ТРЕХМЕРНАЯ СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

*В.В. Пухначев*

В работе Ж. Лерэ (1933) доказана рассуждением от противного разрешимость краевой задачи для уравнений Навье – Стокса при дополнительном условии нулевого потока через каждую связную компоненту границы области течения. При этом же условии Э. Хопф (1941) получил априорную оценку решения. Остается открытым вопрос: имеет ли эта задача решение при выполнении лишь необходимого условия суммарного нулевого потока? Ранее разрешимость трехмерной задачи протекания установлена при малых значениях потоков (Х. Фуджита, 1961; Р. Финн, 1961), либо при условии близости течения к потенциальному (Х. Фуджита и Х. Моримото, 1995). В серии работ М.В. Коробкова, К. Пилецкаса и Р. Руссо (2011 – 2015) положительный ответ на этот вопрос получен для плоских и осесимметричных течений без ограничений на величину потоков. В данной работе задача протекания для уравнений Навье – Стокса рассматривается в трехмерной области типа сферического слоя. Получена априорная оценка решения этой задачи при следующих дополнительных условиях: течение имеет плоскость симметрии; поток через внутреннюю границу области положителен. Из этой оценки вытекает разрешимость указанной задачи.

*Ключевые слова:* задача протекания; симметричные решения; виртуальная дрена.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в области  $\Omega$  типа сферического слоя с внутренней границей  $\Gamma_1$  и внешней границей  $\Gamma_2$  класса Липшица. Предположим для простоты, что поверхности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются звездными относительно начала координат. Обозначим через  $r, \varphi, z$  цилиндрические координаты, а через  $u, v, w$  – соответствующие проекции вектора скорости  $\mathbf{u}$ . Уравнения Навье – Стокса в цилиндрических координатах имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} \right),$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Здесь  $p$  – отношение давления к плотности жидкости,  $\nu = \text{const} > 0$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\Delta$  – оператор Лапласа в цилиндрических координатах,

$$\Delta q = \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}.$$

Для системы (1) задаются краевые условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_i(x), \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где функции  $\mathbf{a}_i \in W^{1/2,2}(\Gamma_i)$  удовлетворяют условию

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma_1 = - \int_{\Gamma_2} \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma_2 = F \quad (3)$$

( $\mathbf{n}_i$  обозначает единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma_i$ ). Задача (1)-(3) представляет пример задачи протекания для уравнений Навье-Стокса. Неизвестно до сих пор, имеет ли эта задача решение, если величина  $F$  не является малой. Данная работа содержит достаточные условия ее разрешимости.

## 2. Лемма Хопфа

Рассмотрим более общую ситуацию. Предположим, что граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  состоит из  $N$  связных компонент  $\Gamma_i$ :  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_N$  и  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ . Требуется найти решение  $\mathbf{u}$ ,  $p$  уравнений Навье-Стокса,

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}, \quad x \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Вследствие уравнения неразрывности (1.2), функция  $\mathbf{a}$  должна удовлетворять условию

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ , выражающему равенство нулю общего потока несжимаемой жидкости через границу области течения. Обозначим через  $F_i$  поток вектора  $\mathbf{a}$  через поверхность  $\Gamma_i$ . Предположим, что выполнено более сильное условие, чем (2), а именно,

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \equiv F_i = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

При выполнении этого условия задача (4)-(6) имеет, по крайней мере, одно решение [1]. В указанной работе Ж. Лерэ этот результат получен рассуждением от противного. Э. Хопф [2] получил априорную оценку решения. Следуя [3], определим пространство  $\mathbf{H}(\Omega)$  как замыкание множества вектор-функций  $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\operatorname{div} \xi = 0$ , в норме интеграла Дирихле

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^3 (\partial w_i / \partial x_k)^2 dx. \quad (9)$$

**Лемма 1.** [2] *Предположим, что граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  принадлежит классу Липшица и что заданное на границе векторное поле  $\mathbf{a}$  принадлежит классу  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Если*

выполнено условие (8), то для любого  $\varepsilon > 0$  существует соленоидальное продолжение  $\mathbf{b}(x, \varepsilon) \in W^{1,2}(\Omega)$  граничного поля  $\mathbf{a}$  в область  $\Omega$  такое, что

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dx \right| \leq \varepsilon \|\mathbf{w}\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega).$$

Доказательство леммы изложено в монографии О.А. Ладыженской [3]. Ключевую роль в этом доказательстве играет тот факт, что при выполнении условия (8) возможно продолжение векторного поля  $\mathbf{a}$  в область  $\Omega$  в виде  $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D} \in W^{2,2}(\Omega)$ . Затем это продолжение подправляется с помощью срезающей функции Хопфа  $\xi(x, \varepsilon)$ , зависящей от параметра  $\varepsilon > 0$ , так что  $\mathbf{A} = \text{rot}(\xi(x, \varepsilon) \mathbf{D}(x))$ .

Эффективное построение векторного поля  $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{D}$  в случае гладких поверхностей  $\Gamma_i$  предложено Х. Фуджита [4] и Р. Финном [5]. Ими же установлена разрешимость трехмерной задачи протекания в случае малых значений потоков  $F_i$ . Впоследствии Х.Фуджита и Х. Моримото [6] доказали аналогичный результат для течений, мало отличающихся от потенциальных. М.В. Коробков, К. Пилецкас и Р. Руссо установили разрешимость плоской и осесимметричной задачи протекания без ограничений на величину потоков. Обзор их результатов имеется в статье [7].

Оказывается, что достаточное условие (8) для существования соленоидального продолжения  $\mathbf{A}(x, \varepsilon)$  граничного поля  $\mathbf{a}$  в область  $\Omega$ , для которого неравенство (4) выполнено с любым  $\varepsilon > 0$ , является и необходимым. Первый пример, доказывающий этот факт, был построен в работе А. Такешита [8]. Впоследствии появились и другие примеры (они приведены в обзоре [7]).

С помощью (9) получают оценки  $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C$ ,  $\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \leq C$  для всех возможных решений  $\mathbf{u}$ ,  $p$  задачи (4)-(6), где положительная постоянная  $C$  зависит от нормы  $\|\mathbf{a}\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}$  и константы Липшица функций, параметризующих поверхность  $\partial\Omega$  [3]. Возникает вопрос: как задать продолжение вектора  $\mathbf{a}$  в область  $\Omega$  при выполнении лишь необходимого условия (7), чтобы неравенство (9) имело место? В работах Л.И. Сазонова [9] и Х. Фуджита [10] дается ответ на этот вопрос в случае плоских симметричных векторных полей. В работе автора [11] аналогичная конструкция предложена для осесимметричных векторных полей в трехмерном пространстве.

### 3. Симметричные решения уравнений Навье – Стокса

Хорошо известно, что уравнения Навье-Стокса допускают бесконечномерную псевдогруппу Ли (см., например, [12, 13] и цитируемую там литературу). Это их свойство является источником точных решений данных уравнений и имеет ряд других приложений. Между тем, эти уравнения обладают и дискретными симметриями, в частности, симметриями по отношению к отражениям. Например, система (4), (5) обладает решениями, в которых компоненты  $u_1$ ,  $u_2$  вектора скорости и давление  $p$  являются четными функциями  $x_3$ , а компонента  $u_3$  является нечетной функцией  $x_3$  ( $u_k$  обозначает проекцию вектора  $\mathbf{u}$  на ось  $x_k$  декартовой системы координат в пространстве  $\mathbb{R}^3$ ). В плоском случае существуют симметричные решения этой системы, в которых  $u_1$  и  $p$  – четные функции переменной  $x_2$ , а  $u_2$  – нечетная функция этой переменной.

Предположим, что область  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  имеет ось симметрии  $x_2 = 0$ , и что заданное на ее границе векторное поле  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  обладает свойством симметрии в указанном выше смысле. Кроме того, пусть ось симметрии пересекает каждую из связных компонент  $\Gamma_i$  границы области  $\Omega$ . Если вектор  $\mathbf{a}$  и поверхность  $\partial\Omega$  удовлетворяют условиям Леммы 1, то задача протекания для уравнений Навье-Стокса (5) – (7) имеет, по крайней мере, одно обобщенное

решение, в котором  $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega)$  и  $\nabla p \in L^2(\Omega)$ . Впервые этот результат был установлен Ч.Дж. Эмиком [14] и независимо Л.И. Сазоновым [9] рассуждением от противного. В этих работах симметричная область  $\Omega$  была криволинейным кольцом с внутренней границей  $\Gamma_1$  и внешней границей  $\Gamma_2$ . Вероятно, Л.И. Сазонов не знал о работе Эмика, но он доказал теорему существования более простым способом, используя понятие виртуальной дрены. Сам этот термин был введен Фуджита [10], который также получил априорную оценку нормы  $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)}$  в плоской симметричной задаче протекания и на ее основе дал конструктивное доказательство теоремы существования.

Как уже отмечалось, соленоидальное продолжение заданного на поверхности  $\partial\Omega$  векторного поля  $\mathbf{a}$  внутрь области  $\Omega$  в виде ротора некоторой функции невозможно, если нарушено условие (8). Идея виртуальной дрены состоит в представлении желаемого продолжения в виде суммы  $\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ , где функция  $\mathbf{d}$  удовлетворяет условию нулевых частных расходов

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

а носитель функции  $\mathbf{c} = (c_1(x_2), 0)$  сосредоточен в узкой полоске, примыкающей к оси симметрии  $x_1$ . Это слагаемое в сумме  $\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$  обеспечивает перетекание жидкости с одной компоненты границы области  $\Omega$  на другую, причем его вклад в выражение в левой части неравенства, аналогичного (9), оценивается сверху величиной  $C \sum_1^N |F_i|$ . Функция  $c_1(x_2)$  также выражается в терминах срезающей функции, подобной функции Хопфа. Элегантная конструкция такой функции предложена Фуджита [10]. В следующем разделе мы строим модификацию срезающей функции Хопфа – Фуджита, позволяющую доказать аналог неравенства (9) для трехмерных симметричных соленоидальных векторных полей в области типа сферического слоя, которые удовлетворяют необходимому условию (7).

#### 4. Модификация срезающей функции

Определим семейство функций  $\varsigma_\kappa(t)$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \varsigma_\kappa \in C_0^{2, Lip}(\mathbb{R}); \quad \varsigma_\kappa \geq 0, \quad \varsigma_\kappa(-t) = \varsigma_\kappa(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad \varsigma_\kappa \leq \frac{1}{t} \quad (0 < t < \infty), \\ |\varsigma'_\kappa| \leq \frac{2}{t^2} \quad (0 < t < \infty), \quad \varsigma_\kappa = 0 \quad (1 \leq t < \infty), \quad \varsigma_\kappa = \frac{1}{t} \quad (\kappa \leq t \leq \frac{1}{2}), \quad \varsigma'_\kappa = 0 \quad (0 \leq t \leq \frac{\kappa}{2}). \end{aligned} \quad (11)$$

По сравнению с конструкцией срезающей функции, предложенной Фуджита, здесь добавлено ограничение на величину  $|\varsigma'_\kappa|$  и требование, чтобы  $\varsigma_\kappa = const$ , если  $|t| < \kappa/2$ . Полагая  $\gamma_\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} \varsigma_\kappa(t) dt = \int_{-1}^1 \varsigma_\kappa(t) dt$ , мы замечаем, что  $\gamma_\kappa \geq 2 \int_\kappa^{1/2} \frac{dt}{t} \rightarrow \infty$ , если  $\kappa \rightarrow 0$ . Введем вспомогательную функцию  $\eta(t) = \eta(t; \delta, \kappa)$  посредством равенства

$$\eta(t) = \frac{1}{\gamma_\kappa} \frac{1}{\delta} \varsigma_\kappa\left(\frac{t}{\delta}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

где постоянная  $\delta > 0$  достаточно мала, но фиксирована. Из (11), (12) вытекают оценки

$$0 \leq \eta(t) \leq \frac{1}{\gamma_\kappa} \frac{1}{\delta} \frac{\delta}{t} = \frac{1}{\gamma_\kappa} \frac{1}{t}, \quad 0 \leq |\eta'(t)| \leq \frac{1}{\gamma_\kappa} \frac{2}{\delta^2} \frac{\delta^2}{t^2} = \frac{1}{\gamma_\kappa} \frac{2}{t^2}, \quad (t \neq 0),$$

которые влекут соотношения

$$\sup_t |t| \eta(t) \rightarrow 0, \quad \sup_t t^2 |\eta'(t)| \rightarrow 0, \quad \text{если } \kappa \rightarrow +0. \quad (13)$$

Условия (11) будут выполнены при следующем выборе функции  $\varsigma_\kappa$ :

$$\varsigma_\kappa = \frac{31}{24\kappa}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\kappa}{2}; \quad \varsigma_\kappa = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{31}{24} - \frac{16}{3} \left( \frac{t}{\kappa} - \frac{1}{2} \right)^3 + 6 \left( \frac{t}{\kappa} - \frac{1}{2} \right)^4 \right], \quad \frac{\kappa}{2} \leq t \leq \kappa; \quad (14)$$

$$\varsigma_\kappa = \frac{1}{t}, \quad \kappa \leq t \leq \frac{1}{2}; \quad \varsigma_\kappa = 112(1-t)^3 - 320(1-t)^4 + 256(1-t)^5, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

## 5. Формулировка основного результата

Вернемся к задаче (1) – (3). Пусть существует функция  $\mathbf{b}$  такая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_i, \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Ниже будем рассматривать функции  $\mathbf{b}$  из пространства Соболева  $W^{1,2}(\Omega)$ . В этом случае уравнение (15) выполняется в смысле распределений. Далее считается, что область  $\Omega$  имеет плоскость симметрии  $z = 0$ . Предположим, что проекции векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  на оси  $r, \varphi$  цилиндрической системы координат являются четными функциями переменной  $z$ , а их проекции на ось  $z$  – нечетные функции  $z$ . В этих условиях можно рассчитывать на то, что задача (1)-(3) имеет симметричное решение, в котором проекции вектора скорости  $\mathbf{u}$  на оси  $r, \varphi$  цилиндрической системы координат и давление  $p$  будут четными функциями переменной  $z$ , а проекция  $\mathbf{u}$  на ось  $z$  будет нечетной функцией  $z$ .

Обозначим через  $\mathbf{H}_s(\Omega)$  подпространство пространства  $\mathbf{H}(\Omega)$ , образованное вектор-функциями, симметричными в указанном выше смысле. Функция  $\mathbf{u}$  называется обобщенным решением задачи (1) – (3), если  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{U} \in \mathbf{H}_s(\Omega)$ , и выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{U} + \mathbf{b}) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{U} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b} \, dx = \\ & = -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{b} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_s(\Omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Основным результатом работы является

**Лемма 2.** *Предположим, что граница  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  области  $\Omega$  принадлежит классу Липшица и что заданные на границе функции  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  принадлежат классу  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Пусть выполнены указанные выше предположения относительно симметрии области  $\Omega$  и функций  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ . Если, сверх того, выполнено условие*

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \, d\Gamma_1 = - \int_{\Gamma_2} \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \, d\Gamma_2 = F > 0, \quad (18)$$

то имеет место априорная оценка

$$\|\nabla \mathbf{U}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_* \quad (19)$$

обобщенного решения задачи (1) – (3).

## 6. Доказательство Леммы 2

Положим в тождестве (10)  $\eta = \mathbf{U}$ . Это дает:

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \, dx = -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{U} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{U} \, dx. \quad (20)$$

По аналогии с работой Фуджита [10], мы строим вектор-функцию  $\mathbf{b}$ , удовлетворяющую соотношениям (15), (16), в виде  $\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ , где

$$\mathbf{c} = (c_r, 0, 0), \quad c_r = \frac{F}{2\pi r} \eta(z) \quad (21)$$

(виртуальная дрена), а функция  $\mathbf{d}$  удовлетворяет условию нулевых частных расходов (10) с  $N = 2$ . На основании леммы Хопфа, мы в состоянии выбрать  $\mathbf{d}$  таким образом, чтобы обеспечить выполнение неравенства  $|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \mathbf{U}\|_{L^2(\Omega)}^2$ ,  $\forall \mathbf{U} \in \mathbf{H}_s(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \mathbf{U}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbf{H}_s(\Omega). \quad (22)$$

(Выбором величины  $\varepsilon$  мы распорядимся позже). Основная трудность состоит в оценке выражения

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \, dx &= \frac{F}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\eta V^2}{r} \, dr \, d\varphi \, dz - \\ - \frac{F}{2\pi} \int_{\Omega} \eta \left( U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) \, dr \, d\varphi \, dz &\equiv I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (23)$$

возникающего при подстановке выражения для функции  $\mathbf{b}$  в левую часть равенства (20). (Здесь  $U, V, W$  – проекции вектора  $\mathbf{u}$  на соответствующие оси цилиндрической системы координат). При выводе соотношения (23) были использованы уравнения (1) и равенства (21). Если  $F > 0$ , то величина  $I_1$  неотрицательна. Покажем, что за счет подходящего выбора функции  $\eta$  можно обеспечить выполнение неравенства

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \mathbf{U}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbf{H}_s(\Omega). \quad (24)$$

Учитывая уравнение неразрывности, условия симметрии и тот факт, что функции  $U, V, W$  обращаются в нуль на границе области  $\Omega$ , а функция  $\eta(z)$  обращается в нуль при  $|z| \geq \delta$ , мы после интегрирования по частям приходим к соотношению:

$$I_2 = \frac{F}{2\pi} \int_{\Omega} \left[ \eta'(z) U W - \frac{1}{r} \eta(z) U^2 \right] \, dr \, d\varphi \, dz. \quad (25)$$

Введем обозначения

$$I_3 = \int_{\Omega} \eta'(z) U W \, dr \, d\varphi \, dz, \quad I_4 = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \eta(z) U^2 \, dr \, d\varphi \, dz. \quad (26)$$

Неравенство (24) будет доказано, если мы установим, что

$$\frac{F}{2\pi} |I_3| \leq \frac{\varepsilon}{4} \|\nabla \mathbf{U}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \frac{F}{2\pi} |I_4| \leq \frac{\varepsilon}{4} \|\nabla \mathbf{U}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbf{H}_s(\Omega). \quad (27)$$

Рассмотрим четную функцию  $\chi(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$  со следующими свойствами:  $\chi \geq 0$ ,  $\chi' \leq 0$ ,  $z \in \mathbb{R}_+$ ;  $\chi(0) = 1$ ,  $\chi = 0$ ,  $z \geq \kappa^2$ . Определим функции  $U_1$  и  $U_2$  соотношениями

$$U_1 = [1 - \chi(z)] U(r, \varphi, z), \quad U_2 = \chi(z) U(r, \varphi, z). \quad (28)$$

Очевидно, что

$$U(r, \varphi, z) = U_1 + U_2, \quad U_1(r, \varphi, 0) = 0, \quad U_2 = 0, \quad |z| \geq \kappa^2. \quad (29)$$

Далее будем считать, что  $\kappa < 1/2$ .

Определенное первым из равенств (26) выражение  $I_3$  представимо в виде

$$I_3 = \int_{\Omega} \eta'(z) U_1 W dr d\varphi dz + \int_{\Omega} \eta'(z) U_2 W dr d\varphi dz = \int_{\Omega} \eta'(z) U_1 W dr d\varphi dz \quad (30)$$

(здесь мы использовали последнее из равенств (21) и тот факт, что  $\eta' = 0$ , если  $|z| \leq \kappa/2$ ). Из (29), второго равенства (28), условия  $W(r, \varphi, 0) = 0$  и неравенства Харди вытекают оценки:

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{\Omega} z^2 |\eta'| \cdot \frac{|U_1|}{|z|} \cdot \frac{|W|}{|z|} dr d\varphi dz \leq \\ &\leq \sup_z (z^2 |\eta'|) \left( \int_{\Omega} \frac{U_1^2}{z^2} dr d\varphi dz \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \frac{W^2}{z^2} dr d\varphi dz \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_1 \sup_z (z^2 |\eta'|) \|U_1\|_{H^1(\Omega)} \|W\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \sup_z (z^2 |\eta'|) \|\nabla U\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (31)$$

где постоянная  $C_1 > 0$  зависит только от геометрии области. На основании (19) мы можем выбрать параметр  $\kappa$  столь малым, что  $F C_1 (2\pi)^{-1} \sup_z (z^2 |\eta'|) < \varepsilon/4$  (при больших  $F$  этот параметр имеет порядок  $\exp(-aF)$ ,  $a = \text{const} > 0$ ). Итак, за счет выбора параметра  $\kappa$  мы добились выполнения первого из неравенств (27). Докажем второе неравенство (27). Представим величину  $I_4$  в виде суммы трех интегралов,  $I_4 = I_5 + I_6 + I_7$ , где

$$I_5 = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \eta(z) U_1^2 dr d\varphi dz, \quad I_6 = \int_{\Omega} \frac{2}{r} \eta(z) U_1 U_2 dr d\varphi dz, \quad I_7 = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \eta(z) U_2^2 dr d\varphi dz. \quad (32)$$

Учитывая, что  $U_1(r, \varphi, 0) = 0$ , и рассуждая так же, как при получении оценки (23), мы убеждаемся, что за счет выбора малого параметра  $\kappa$  можно обеспечить неравенства

$$\frac{F}{2\pi} |I_5| \leq \frac{\varepsilon}{12} \|\nabla U\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \frac{F}{2\pi} |I_6| \leq \frac{\varepsilon}{12} \|\nabla U\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall U \in \mathbf{H}_s(\Omega). \quad (33)$$

Для получения оценки величины  $|I_7|$  воспользуемся неравенствами Ладыженской и Юнга:

$$\begin{aligned} |I_7| &\leq \frac{1}{\rho^2} \left( \int_{\Omega'} \eta^{3/2} r dr d\varphi dz \right)^{2/3} \left( \int_{\Omega} U_2^6 r dr d\varphi dz \right)^{1/3} \leq \\ &\leq \frac{(48)^{1/3}}{\rho^2} \|U_2\|_{H^1(\Omega)} \left( \int_{\Omega'} \eta^{3/2} r dr d\varphi dz \right)^{2/3}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\rho = \text{dist}(\Gamma_1, \{0\})$ , а область  $\Omega'$  есть пересечение области  $\Omega$  и слоя  $|z| < \kappa^2$ . Теперь заметим, что функция  $\varsigma_\kappa(t)$  допускает оценку сверху,  $\varsigma_\kappa \leq a/\kappa$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ , а величина  $\gamma_\kappa$  оценивается снизу,  $\gamma_\kappa \geq b \ln(1/\kappa)$  (можно взять  $a = 2$ ,  $b = 1$ ). Отсюда и из определения (18) функции  $\eta$  получается неравенство

$$\int_{\Omega'} \eta^{3/2} r dr d\varphi dz \leq C_2 \frac{\delta \kappa^{1/2}}{[\ln(1/\kappa)]^{3/2}}, \quad (35)$$

где постоянная  $C_2 > 0$  зависит лишь от области  $\Omega$ , а величина  $\delta$  фиксирована. Учитывая неравенства (26), (27) и выбирая параметр  $\kappa$  достаточно малым, мы приходим к оценке

$$\frac{F}{2\pi} |I_7| \leq \frac{\varepsilon}{12} \|\nabla \mathbf{U}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbf{H}_s(\Omega). \quad (36)$$

Суммируя неравенства (33) и (34), мы заключаем справедливость второго неравенства (27), откуда следует оценка (24). Вместе с соотношением (23) и неравенством (22), эта оценка позволяет получить искомую априорную оценку нормы  $\|\nabla \mathbf{U}\|_{L^2(\Omega)}$ , исходя из равенства (20). Это завершает доказательство Леммы 2.

## 7. Заключительные замечания

Прямым следствием оценки интеграла Дирихле решения задачи (1) – (3) является

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия Леммы 2. Тогда существует обобщенное решение  $\mathbf{v}$ ,  $p$  задачи (1) – (3), в котором  $\mathbf{v} \in W^{1,2}(\Omega)$ ,  $\nabla p \in L^2(\Omega)$ , и справедлива оценка (19).

Доказательство Теоремы следует стандартным схемам, изложенным в [3, 4, 5]; оно здесь не приводится. Вопрос о единственности решений стационарных задач для уравнений Навье – Стокса очень сложен. Это подтверждается следующим примером. Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  – круговое кольцо,  $r_1 < r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < r_2$ . На границе  $\Omega$  задаются условия  $u = (2\pi r_i)^{-1} F$ ,  $v = 0$ ,  $r = r_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $F = \text{const}$ , а  $u$  и  $v$  – радиальная и окружная компоненты вектора скорости в полярной системе координат. Тогда задача протекания имеет решение  $u = (2\pi r)^{-1} F$ ,  $v = 0$ . Оно описывает радиальное течение, порожденное источником или стоком интенсивности  $F$ , расположенным в начале координат. Теорема единственности решения задачи протекания сквозь круговое кольцо доказана лишь в случае малых чисел Рейнольдса  $Re = F/\nu$ . Для произвольных значений параметра  $Re$  удается доказать только изолированность этого решения [15].

Что касается гладкости обобщенного решения задачи (1) – (3), то она повышается с повышением гладкости поверхностей  $\Gamma_i$  и определенных на них функций  $\mathbf{a}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Так, если поверхности  $\Gamma_i$  принадлежат классу Гёльдера  $C^{2+\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) и  $\mathbf{a}_i \in C^{2+\alpha}(\Gamma_i)$ , то справедливы включения  $\mathbf{u} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $\nabla p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  [3].

Результаты работы допускают обобщение на случай симметричных в смысле п. 5 решений задачи протекания, в которых число связных компонент границы  $N > 2$ . Однако обременительное условие положительности потоков (в рассмотренном в статье случае это условие  $F > 0$ ) снять не удастся. Здесь уместно провести аналогию с другими задачами, в которых течения, порожденные источниками и стоками, имеют разные качественные свойства. Это хорошо проявляется в решении классической задачи об автомодельном течении в плоском диффузоре [16]. Другой пример демонстрирует рассмотренная в [17] задача об осесимметричном течении в области, ограниченной поверхностью вращения и пересекающей ее осью симметрии, на которой сосредоточены источники или стоки с постоянной линейной плотностью  $F$ . Случай  $F > 0$  соответствует источникам, а случай  $F < 0$  – стокам. Теорема существования решения соответствующей задачи протекания доказана при выполнении



одностороннего неравенства  $F < 2\pi\nu$ . Оно накладывает ограничение на интенсивность источников, в то время как интенсивность стоков может быть любой.

Следующая гипотеза представляется вполне правдоподобной. Пусть течение имеет две плоскости симметрии, которые пересекают каждую связную компоненту границы области течения. Пусть входные данные задачи протекания удовлетворяют условиям, указанным в формулировке Леммы 2. Тогда задача протекания имеет, по крайней мере, одно обобщенное решение.

*Автор выражает признательность К. Пилецкасу и М.В. Коробкову за внимание к работе и полезные обсуждения.*

## Литература / References

1. Leray J. Etude de diverses equations integrales non lineaires problemes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures Appl.*, 1933, vol. 12, no. 9, pp. 1–82.
2. Hopf E. Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik. *Math. Ann.*, 1941, vol. 117, no. 1, pp. 764–775.
3. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – 2-е изд. – М.: Наука, 1970. [Ladyzhenskaya O.A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Math. Appl., vol. 2. N.Y., London, Paris, Gordon and Breach Science Publ, 1969. 224 p.]
4. Fujita H. On the Existence and Regularity of the Steady-State Solutions of the Navier – Stokes Equations. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1*, 1961, vol. 9, pp. 59–102.
5. Finn R. On the Steady-State Solutions of the Navier – Stokes Equations. III. *Acta Math.*, 1961, vol. 105, no. 3-4, pp. 197–244. DOI: 10.1007/BF02559590
6. Fujita H., Morimoto H. A Remark on the Existence of the Navier – Stokes Flow with Non-Vanishing Outflow Condition. *Nonlinear Waves (Sapporo, 1995)*, *GAKUTO Intern. Ser. Math. Sci. Appl.*, *Gakkotosho, Tokyo*, 1997, vol. 10, pp. 53–61.
7. Задача протекания для уравнений Навье – Стокса / М.В. Коробков, К. Пилецкас, В.В. Пухначев, Р. Руссо // Успехи математических наук. – 2014. – Т. 69, № 6 (420). – С. 115–176. [Korobkov M.V., Pileckas K., Pukhnachev V.V., Russo R. The Flux Problem for the Navier – Stokes Equations]. *Russian Math. Surveys*, 2015, vol. 69, no. 6, pp. 1065–1122. DOI: 10.1070/RM2014v069n06ABEH004928]
8. Takeshita A. A Remark on Leray's Inequality. *Pacific J. Math.*, 1993, vol. 151, no. 1, pp. 151–158. DOI: 10.2140/pjm.1993.157.151
9. Сазонов, Л.И. О существовании стационарного симметричного решения двумерной задачи о протекании жидкости / Л.И. Сазонов // Математические заметки. – 1993. – Т. 54, № 6. – С. 138–141. [Sazonov L.I. On the Existence of a Stationary Symmetric Solution of the Two-Dimensional Fluid Flow Problem. *Math. Notes*, 1993, vol. 54, no. 6, pp. 1280–1283. DOI: 10.1007/BF01209092]
10. Fujita H. On Stationary Solutions to Navier – Stokes Equations in Symmetric Plane Domains under General Outflow Condition. *Navier – Stokes equations: theory and numerical methods (Varenna, 1997)*, *Pitman Res. Notes Math. Ser.* Longman, Harlow, 1998, vol. 388, pp. 16–30.
11. Pukhnachev V.V. Viscous Flows in Domains with a Multiply Connected Boundary. *New Directions in Mathematical Fluid Mechanics, Adv. Math. Fluid Mech.*, Basel, Birkhauser Verlag, 2010, pp. 333–348.
12. Пухначев, В.В. Симметрии в уравнениях Навье – Стокса / В.В. Пухначев // Успехи механики. – 2006. – Т. 4, № 1. – С. 6–76. [Pukhnachev V.V. [Symmetries in the Navier – Stokes equations]. *Uspekhi mekhaniki*, 2006, vol. 4, no. 1, pp. 6–76 (in Russian)]

13. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. *Application of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1998. DOI: 10.1007/978-94-017-0745-9
14. Amick Ch.J. Existence of Solutions to the Nonhomogeneous Steady Navier – Stokes Equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 1984, vol. 33, no. 6, pp. 817–830. DOI: 10.1512/iumj.1984.33.33043
15. Fujita H., Morimoto H., Okamoto H. Stability Analysis of Navier – Stokes Flows in Annuli. *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 11, pp. 659–678. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19970725)20:11<959::AID-MMA895>3.0.CO;2-D
16. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – 4-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. [Kochin N.E., Kibel' I.A., Rose N.V. *Theoretical Hydromechanics, part 2*. N.Y., Interscience Publ., 1964. 569 p.]
17. Pukhnachev V.V. Singular Solutions of Navier – Stokes Equations. *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, vol. XV: Advances in Mathematical Analysis of Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Amer. Math. Soc.*, 2014, vol. 232, pp. 193–218.

Владислав Васильевич Пухначев, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН; профессор, кафедра «Теоретическая механика», Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), pukhnachev@gmail.com

*Поступила в редакцию 30 марта 2015 г.*

---

**MSC 76D05****DOI: 10.14529/mmp150208**

## **Three Dimensional Flux Problem for the Navier – Stokes Equations**

**V.V. Pukhnachev**, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk State Univesersity, Novosibirsk, Russian Federation, pukhnachev@gmail.com

Solvability of the flux problem for the Navier – Stokes equations has been proven by J. Leray (1933) under an additional condition of zero flux through each connected component of the flow domain boundary. He used arguments from contradiction was by contradiction and did not give a priori estimate of solution. This estimate was obtained by E. Hopf (1941) under the same condition concerning fluxes. The following problem is open up to now: if exists a solution of the flux problem, when only the necessary condition of total zero flux is satisfied? For small fluxes values, solvability of three dimensional problem was established independently by H. Fujita and R. Finn (1961). H. Fujita and H. Morimoto (1995) proved existence theorem for flows, which are close to potential ones). M.V. Korobkov, K. Pileckas and R. Russo (2011 – 2015) gave the positive solution of the flux problem for planar and axially symmetric flows without restrictions on the flux values. The present paper is devoted to consideration of flux problem in the domain of a spherical layer type. We obtained an a priori estimate of solution under following additional conditions: the flow has a symmetry plane; the flux through the inner domain boundary is positive. This estimate implies solvability of the problem.

*Keywords: flux problem; symmetric solutions; virtual drain.*

*Received Mart 30, 2015*