

На правах рукописи

Потапов Виктор Иванович

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВТОРИЧНОМ РАФИНИРУЮЩЕМ
ПЕРЕПЛАВЕ ИХ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДАМИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Специальность 05.16.02
«Металлургия черных, цветных и редких металлов»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук



Челябинск
2005

Работа выполнена на кафедрах «Математика и вычислительная техника» и «Общая металлургия» Южно-Уральского государственного университета.

Научный консультант

заслуженный деятель науки и техники РФ,
доктор технических наук, профессор
Торопов Евгений Васильевич.

Официальные оппоненты:

заслуженный работник высшей школы РФ,
доктор технических наук, профессор
Швыдкий Владимир Серафимович;

доктор технических наук, профессор
Девятов Диляур Хасанович;

доктор технических наук, профессор
Дрозин Александр Дмитриевич.

Ведущая организация:

Научно-исследовательский институт
металлургии (г. Челябинск).

Защита состоится «12» октября 2005 г., в 14⁰⁰ часов, на заседании диссертационного совета Д 212.298.01 при Южно-Уральском государственном университете (ЮУрГУ) по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, ЮУрГУ, тел.: (351) 267-91-23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Ваш отзыв на автореферат в 2-х экземплярах, заверенных гербовой печатью организации, просим присыпать по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, ЮУрГУ ученый совет университета, тел. (351) 267-91-23.

Автореферат разослан «1» сентября 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор



Мирзаев Д.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Металлургия — базовая отрасль промышленности, где высокотемпературное оборудование является основным потребителем энергетических и сырьевых ресурсов. Поэтому особую актуальность приобретает проблема экономии используемых ресурсов путем углубления фундаментальных научных исследований теплофизических процессов и выработки на их основе новых технологических решений, совершенствования действующих пирометаллургических установок, внедрения методов их интенсификации и управления.

Расширяются инвестиции по финансированию автоматизированных и экологически чистых электросталеплавильных комплексов. Выплавка стали в России в 2003 г. составила 62,7 млн. т, на 2010 г. прогнозируется 70...72 млн. т. Производство электростали от этого объема составляет 16,70%.

Особое место в производстве высококачественных сталей и сплавов, применяемых в перспективных машиностроительных технологиях, занимают вторичные рафинирующие переплавы (ВРП): вакуумно-дуговой (ВДП), электрошлаковый (ЭШП), плазменно-дуговой (ПДП), электронно-лучевой (ЭЛП); эти процессы являются конечными в технологической цепи производства стали. Именно в результате этих переплавных процессов формируется микроструктура, производится рафингирование и доводка стали до требуемых потребительских свойств. Технологические режимы рафинирующих переплавов определяются теплофизическими процессами, необходимость рассмотрения которых диктуется тем, что формирование слитка является агрегатным превращением при высоких градиентах температуры как в самом слитке, так и элементах переплавных печей.

В связи с наметившимся увеличением производства качественной электростали возникла необходимость теоретического обоснования вновь создаваемых промышленных процессов, оптимизации существующих технологических режимов, синтеза систем управления им. Рафинирующие переплавы требуют особого теоретического обоснования, так как они обеспечивают особые качественные характеристики выплавляемым сталям и сплавам. За последние годы явно ощущается дефицит в теоретических разработках этих процессов. В настоящее время нет обобщающей математической модели теплофизических процессов рафинирующих переплавов, позволяющей рассматривать процессы теплообмена с движущимися средами в широком диапазоне изменения начальных и граничных условий, параметров технологических режимов. Разработке теоретического обоснования вторичных рафинирующих переплавов, получению обобщающих математических моделей теплофизических процессов в них посвящена данная работа.

Работа выполнялась в соответствии с научно-техническими направлениями и программами ЮУрГУ, Министерства образования и науки РФ, с отраслевыми планами Министерства черной металлургии. При исследовании теплофизических процессов в распределенных системах была выполнена работа по научному направлению «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», тема: Математическое описание теплофизических процессов в

противоточных теплообменных аппаратах. Вывод уравнений. Численное решение (№ 270).

По научному направлению «Металлургия черных, цветных и редких металлов» выполнены темы: Математическое моделирование и управление процессов тепло- и массообмена в тунNELьной печи (№ 286). Исследование методами математического моделирования зависимости качества слитков от диаметра электрода и температурного поля ВДП (№ 79/98). Математическое моделирование зависимости качества слитков ВДП от термонапряжений (№ 81/96). Исследование особенностей кристаллизации поверхностной зоны слитков (№ МТ 2844–85).

Работа «Математическое моделирование теплофизических процессов при ЭШП» выполнялась при поддержке гранта Президента Российской Федерации МД 101.2003.08.

Объектами исследования являются пиromеталлургические печи для получения высококачественных, жаростойких сталей и сплавов. Вакуумные дуговые печи (ВДП), электрошлаковые (ЭШП), вакуумные двухэлектродные (ВДЭП), плазменные дуговые (ПДП) в сфере металлургического производства образуют целую отрасль специальной металлургии.

Постановка задач, направленных на совершенствование тепловой работы изучаемых печей в значительной степени определяется спецификой протекающих в них технологических процессов. ЭШП, ВДП, ВДЭП являются высокоеффективными рафинирующими процессами, так как они повышают общую чистоту металла, снижают содержание в нем вредных примесей, устраняются ликвационные и усадочные дефекты, повышают служебные характеристики металла. Однако номенклатура сталей и сплавов, производимых для отраслей новой техники настолько широка и многообразна, а уровень требований к применяемому материалу настолько высок, что металлурги вынуждены продолжать поиски новых технологических режимов, процессов, обеспечивающих возможность производства сталей и сплавов новых, более сложных композиций, более эффективных условий энергосбережения и интенсификации рассматриваемых металлургических процессов. Решение этих задач требует глубокого изучения сущности протекающих в них теплофизических процессов, создания научных методов их развития.

Эффективное решение этих задач можно получить только на основе фундаментальных исследований методами математического моделирования теплофизических процессов, протекающих в переплавных печах, с применением современной вычислительной техники при надежной адаптации полученных решений к экспериментальным и производственным данным.

Разработка математических моделей теплообмена в переплавных печах и обоснование новых технических и технологических решений, оптимизация систем управления имеют существенное значение для ускорения научно-технического прогресса в спецметаллургии.

Целью работы является повышение эффективности работы высокотемпературных металлургических переплавных установок на основе результатов математического моделирования теплофизических процессов.

Основные задачи исследования:

Теоретическое обобщение методов анализа, расчета теплофизических процессов по всем зонам переплавных установок в целом:

– разработка и совершенствование инженерных методов расчета высокоэнергетических установок в направлении учета движения в них сред и теплообмена между ними;

– создание многомерных математических моделей сложного теплообмена между жидкотяжелыми теплоносителями в металлургических переплавных печах;

– получение эффективных алгоритмов численного моделирования теплообменных процессов, устойчивых и быстродействующих при реализации;

– расчетно-теоретическое исследование влияния элементов конструкций и режимных параметров на показатели теплообмена в высокотемпературных металлургических печах с целью выявления рациональных условий их эффективной эксплуатации;

– проведение экспериментальных теплотехнических исследований переплавных процессов на промышленных установках с целью выявления особенностей их работы, получения необходимых параметров для построения математических моделей и оценки их адекватности;

– разработка и внедрение эффективных тепловых режимов, конструкций, методов управления работой действующих и вновь проектируемых переплавных металлургических установок на основе результатов математического моделирования высокотемпературного теплообмена.

Методы исследования. В работе использовались теоретические методы, включающие научный анализ теории тепломассообмена, математическое моделирование с применением современных средств вычислительной техники, экспериментальные исследования в лабораторных и промышленных условиях согласно действующим стандартам с привлечением современных методик и средств измерений основных теплотехнических параметров.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием современных методов исследований в области тепло- и массообмена, базирующихся на фундаментальных законах сохранения массы, энергии, импульса, уравнениях математической физики, теории подобия, методов решения сеточных уравнений, теории динамики сплошных сред.

Использованием методов математического моделирования, численных и натурных экспериментов, доказательством существования и устойчивости разностных схем. Обоснованность подтверждается:

- экспериментальной проверкой полученных математических моделей;
- сопоставлением теоретических результатов с опытными лабораторными и промышленными экспериментами;
- внедрением результатов математического моделирования в производство.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту. Теоретическое обобщение теплофизических процессов в объектах многослойной структуры (ОМС) на основе которого:

1. Разработаны новые и усовершенствованы существующие инженерные расчеты сложного теплообмена в многослойных по радиальной и продольной координатам системах между движущимися средами в переплавных металлургических печах ВДП, ЭШП, ВДЭП, включающие в себя:

- методику расчета теплообмена с учетом градиента скоростей в средах;
- методику расчета теплообмена с учетом потока тепла в направлении оси движения, обусловленного турбулентной и молекулярной теплопроводностью в жидкокометаллических средах;
- методику вычисления частотных и переходных характеристик процесса теплопередачи для использования их в системах управления;
- методику выбора разностных схем при решении смешанных систем дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, описывающих теплообмен в ОМС;
- доказательство устойчивости рассматриваемых разностных схем;
- методику расчета зависимости глубины конической части жидкой ванны от силы тока и диаметра электрода.

2. Впервые разработаны принципиально новые математические модели теплофизических процессов в высокотемпературных металлургических установках как объектах многослойной структуры:

- математическая модель теплофизических процессов при ВДП;
- математическая модель теплообмена в установках ВДЭП;
- математическая модель теплообмена при ЭШП.

3. На основе разработанных моделей теплофизических процессов как базовых получен целый комплекс функциональных математических моделей по оптимизации переплавных процессов с целью увеличения выхода товарного металла:

- математическая модель оптимального управления вывода усадочной раковины в головной части слитка;
- математическая модель формирования кристаллической структуры поверхностных слоев слитка;
- математическая модель зависимости толщины снимаемой стружки слитка от среднего расстояния в зазоре между дендритами;
- математическая модель формирования мелкодисперсной кристаллической структуры слитка с вращением жидкокометаллической ванны.

4. Впервые получены расчетные оценки термоусадочных характеристик в формируемым слитках в любой момент времени наплавления и любой точке с целью прогноза образования трещин, назначения параметров технологических режимов для дальнейшего передела слитков (ковка, прокатка). Получены условия зависания слитка на контактном пояске в кристаллизаторе.

5. Комплексы программ для компьютерного обеспечения алгоритмов численного математического моделирования.

Личное участие автора в получении представленных научных результатов

Все приведенные в диссертации основные положения, теоретические результаты и выводы получены лично автором или при непосредственном участии и под его научным руководством. Автору принадлежит постановка проблем и решение задач исследования, обработка и обобщение полученных результатов, личное творческое участие и руководство всеми этапами реализации численных методов на ЭВМ, физических лабораторных и промышленных экспериментов. Некоторые задачи решались при участии П.В. Ефимова, М.С. Бугаева, Л.М. Пучкова, Г.А. Хасина. Большое влияние на формирование проблемы и некоторую помощь в ее решении оказали профессор Б.Н. Девятов, профессор Н.Д. Демиденко, профессор Е.В. Торопов.

Практическая значимость и реализация результатов работы

1. Разработаны и реализованы научно-обоснованные методы инженерных расчетов теплофизических процессов в коаксиальных трубчатых аппаратах с движущимися средами, включающая математические модели тепломассообмена, основанные на системах дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, законов сохранения массы, энергии и импульса. Все расчеты представлены в виде алгоритмов с программным компьютерным обеспечением.

2. Рассчитаны оптимальные режимы тепломассообменных процессов в тунNELьных печах по сушке пористых материалов и внедрены на ЛПК г. Красноярска.

3. Разработаны и внедрены в производство оптимальные режимы технологии переплавных процессов при ВДП на Златоустовском металлургическом заводе.

Полученные математические модели теплофизических процессов в ОМС и предложенные на их основе технологические решения позволили:

– оптимизировать технологию вакуумной дуговой плавки, в результате чего удалось:

- при оптимальных значениях силы тока и диаметра электрода увеличить производительность переплава на 7...13% в пределах того же качества металла слитка;
- рассчитать оптимальные режимы вывода усадочной раковины, реализация которых позволила повысить на 5% выход годного сплава;
- снизить энергозатраты на 14%;
- получить вакуумный дуговой металл с большей кристаллической однородностью;

– спрогнозировать влияние термонапряжений на формирование поверхностных слоев слитка;

– расширить теоретические представления о динамике теплофизических процессов в ОМС с капиллярно-пористой структурой.

Переданы в производство программные комплексы «ТЕПЛО 8», «ШЛАК», «ТЕПЛО 9».

4. Получены расчетные зависимости между температурными полями газожидкостной системы в теплообменных аппаратах холодильной установки, что

позволило сократить на 20% число отказов в ее работе. Результаты внедрены на ООО «Завод сложной бытовой техники ПОЛЮС-М».

5. Разработана математическая модель формирования кристаллической структуры поверхностных слоев слитка и программный комплекс «Кристалл Слой» переданы ОАО ЗМК, ОАО «Завод Булат». Использование компьютерного расчета момента доливки «холодного» металла сокращает время на подготовку производства металла. В результате улучшается качество поверхностных слоев, увеличивается выход годного металла на 2...3%.

6. Результаты исследования некоторых теплофизических процессов апробированы в учебном процессе, опубликовано учебное пособие «Математические модели теплофизических процессов при вакуумном дуговом переплаве» для студентов, обучающихся по специальностям 110300 – «Теплофизика, автоматизация и экология промышленных печей», 110100 – «Металлургия черных металлов». Учебное пособие объемом 10,23 печатных листов издано с грифом УМО по образованию в области металлургии.

Апробация работы и публикации

Основные результаты работы доложены и обсуждены на Международных, Всесоюзных, Российских конференциях, симпозиумах и совещаниях:

Второй Межвузовской конференции по автоматизации химических производств, Москва, 1968; Вузовской конференции по итогам научно-исследовательских работ, Красноярск, СТИ, 1969; Межвузовской конференции по автоматизации химических производств, СТИ, 1971; Научно-технической конференции молодых ученых, Красноярск, СТИ, 1976; IX научно-технической конференции «Неразрушающие методы контроля», Киев, 1976; IV Всесоюзной конференции «Современные проблемы электрометаллургии стали», Челябинск, ЧПИ, 1980; Научно-технической конференции «Совершенствование машиностроительных материалов, конструкций машин и методов обработки деталей», ЧПИ, ЧГТУ, ЮУрГУ, 1978, 1980, 1995, 1996, 2000; Второй Всероссийской ФАМ конференции, Красноярск, ИВМ СО РАН, 2003; VI Международной конференции ВМТ г. Курск, 2003; III, IV Международной конференции «Математическое моделирование в образовании, науке, производстве» г. Тирасполь, 2003, 2005; III Региональной научно-технической конференции, г. Магнитогорск, 2004; XII Международной конференции «Современные проблемы электрометаллургии стали», г. Челябинск, 2004; Международной научно-технической конференции «Компьютерное моделирование – 2004», Санкт-Петербург, 2004; Всероссийской научно-технической конференции «Теплофизика технологических процессов» г. Рыбинск, 2005; II Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» г. Самара, 2005.

По материалам диссертационной работы опубликовано 42 печатных работы, 1 монография, 1 коллективная монография.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести разделов, выводов. Основное содержание изложено на 314 страницах машинописного текста, включая 28 таблиц и 56 иллюстраций. В списке литературы приведено 219 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обосновывается актуальность проблемы, цель и содержание поставленных задач, определяется объект исследования – теплофизические процессы при производстве спецсталий, жаропрочных и легированных сплавов с определенными технологическими свойствами. Сформулированы актуальность темы, научная новизна и практическая значимость работы, положения выносимые на защиту, а также приведено краткое содержание работы по разделам.

В первой главе приведен критический анализ работ связанных с математическим моделированием теплофизических процессов за последние три десятилетия в области металлургических переплавных переделов металла – вакуумного дугового переплава (ВДП), электрошлакового переплава (ЭШП), вакуумного двухэлектродного переплава (ВДЭП).

Можно отметить что исследования теплофизических процессов на основе уравнений Навье–Стокса в работах Полежаева В.И., Пасконова А.М., Чудова Л.А., Тарунина Е.Л., Недопекина Ф.В., Бородина В.С., Лисиенко В.Г. значительно продвинуты. Созданы алгоритмы, комплексы программ, математические модели процессов тепломассопередачи в замкнутых пространствах, обусловленных свободной конвекцией, гидродинамическим течением с числом $Re \ll 10^3$, обтеканием тел различной формы, формированием слитков, отливок.

Проведенный анализ существующих теоретических исследований теплофизических процессов позволяет сделать следующие выводы:

1) остаются недостаточно изученными процессы тепломассопередачи в объектах с движущимися противотоком или прямотоком средами. Тепломассоперенос в таких объектах определяется конвективной тепловой или концентрационной составляющей с турбулентным режимом движения. Как правило, это высокоинтенсивные процессы, протекающие при высоких температурах и больших скоростях движения сред.

2) математический аппарат для моделирования тепломассопереноса, основанный на уравнениях Навье–Стокса соответствует процессам, протекающим при небольших числах Рейнольдса, Прандтля. Это является основным ограничением применимости теории, основанной на приближениях Навье–Стокса, Буссинеска, Прандтля, к моделированию противоточных высокоинтенсивных процессов тепломассообмена в печах вторичного рафинирующего переплава;

3) отсутствует единая теория тепломассопереноса в объектах с многослойной структурой (ОМС) и движущимися в них средами, осложненной фазовыми переходами, большими градиентами скоростей, температур, концентраций. Многослойность структуры таких объектов определяется самой геометрией печей для переплава металлов ВДП или ЭШП с водоохлаждаемым кристаллизатором которые состоят из коаксиальных слоев: стенки водоохлаждаемой рубашки, охлаждающая среда (вода, газ), стенка кристаллизатора, зазор между стенкой кристаллизатора и слитком, слиток и электрод. В подвижных слоях

перемещаются среды – вода, расходуемый электрод, наплавляемый слиток, жидкometаллическая ванна, шлаковая ванна. Между движущимися средами происходит обмен энергией с изменением температурных полей, в средах протекают фазовые переходы - из жидкого состояния в газообразное, из твердого в жидкое, из жидкого в твердое. Источник энергии, дуги или шлаковая ванна, движется по объекту с определенной скоростью.

В этом плане математическое моделирование теплофизических процессов в ОМС, инженерное оформление переплавов в печах ВДП, ЭШП, ЭЛП, ПДП было рассмотрено в работах Девятова Д.Х., Белянчикова Л.Н., Медовара Б.Н., Демиденко Н.Д., Клюева М.М., Лакомского В.И., Роцина В.Е., Шведа Ф.И.

Недостаточная изученность теплофизики процессов в ОМС – переплавных печах не позволяет рассчитать распределение потоков энергии, подводимой дугой или шлаковой ванной, в электроде, жидкой ванне, слитке, кристаллизаторе, охлаждающей воде, которые определяют качество металла, производительность переплава, расход энергии.

Разработка математических моделей теплофизических процессов в объектах с многослойной структурой для вторичных рафинирующих переплавных процессов, распределенных в пространстве и времени с движущимися противотоком средами, теплообменом между ними, фазовыми переходами, электрогидродинамическими явлениями, термонапряженными состояниями, и экспериментальным исследованием посвящена данная работа.

Эти установки составляют направление в области электрометаллургии и по своему назначению, свойствам, структуре образуют целый класс объектов, которые имеют характерные особенности:

а) движущийся с определенной скоростью по аппарату или неподвижный источник энергии, под действием которого осуществляется плавление расходуемых электродов. Управление скоростью движения или мощностью источника энергии (дуги, шлаковой ванны) позволяет получать металл нужной кристаллической структуры и химического состава;

б) для отвода тепла, подводимого источником энергии, в структуре объекта существует теплообменное устройство;

в) геометрия аппаратов имеет коаксиальную послойную структуру по радиусу;

г) каждый коаксиальный слой представляет собой определенную среду, которая движется с определенной скоростью или неподвижна;

д) одна среда, как правило, в центральной части объекта, представляет послойную структуру по длине аппарата; например, в водоохлаждаемом кристаллизаторе можно выделить слои по его длине: слиток твердый, жидкometаллическая ванна, шлаковая ванна, электрод. Эти слои перемещаются по аппарату, между ними происходит теплообмен, наблюдаются фазовые переходы и другие теплофизические процессы в вакууме или при обычном давлении.

Если в объекте взаимодействуют две и более среды, то каждую из этих сред: жидкость, твердое тело, газ можно рассмотреть как сплошную среду. При таком подходе состояние потока однофазной однородной среды характеризуется макроскопическими параметрами — температурой, давлением и скоростью,

значения которых должны быть определены в каждой точке потока в каждый момент времени. При этом предполагается, что физические свойства среды (плотность, теплоемкость, коэффициенты вязкости и теплопроводности), зависящие в общем случае от температуры и давления, известны. Поэтому состояние потока жидкости полностью определено, если известны поля температуры θ , давления p и скорости w .

Для определения трех неизвестных (θ , p и w) необходимо иметь три уравнения. Такие уравнения получаются из основных законов физики — закона сохранения массы, закона сохранения количества движения и закона сохранения энергии, записанных применительно к движущейся среде.

Для двумерного осесимметричного движения вязкой несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами эта система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{q_v}{\rho c_p} + \frac{\mu}{\rho c_p} \Phi_0; \\ \frac{dw_x}{d\tau} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_x}{\partial r} \right); \\ \frac{dw_r}{d\tau} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{w_r}{r} \right); \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} &= 0; \\ q_v &= q_v(x, r, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_r \frac{\partial}{\partial r}$; x и r — осевая и радиальная координаты, а w_x и w_r — составляющие скорости в направлении этих координат.

Уравнения (1) дополняются соответствующими начальными и граничными условиями. Если в процессе конвективного теплообмена участвуют две и более взаимодействующие среды, то уравнения (1) записываются для каждой среды, а в правой части уравнений энергии вводятся слагаемые, характеризующие теплообмен между средами.

На основе фундаментальных законов сохранения энергии, массы, импульса, заложенных в уравнениях (1), получено математическое описание теплофизических процессов ВРП с осевым расположением движущихся электродов, подвижным источником энергии (дугой, шлаковой ванной), наплавляемым слитком, движущимися средами — охлаждающей водой, жидкокометаллической, шлаковой ванной. Схематично эти ВРП изображены на рис. 1.

Печи ЭШП и ВДП по длине можно разделить на 4 участка (рис. 1):

- зона слитка $0 < x < z$;
- зона жидкой ванны $z \leq x < c$;
- зона шлака — дуги $c < x < d$;
- зона электрода $d < x < l$.

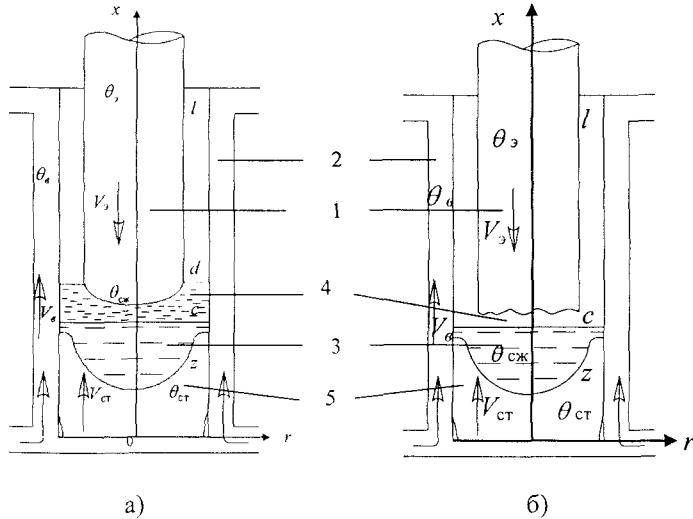


Рис. 1. Схема ВРП с осевым расходуемым электродом и подвижным источником энергии: а — ЭШП, б — ВДП: 1 — расходуемый электрод; 2 — водоохлаждаемый кристаллизатор; 3 — жидкотитанническая ванна; 4 — шлаковая ванна, дуга; 5 — слиток

При адаптации уравнений (1) к условиям ВРП приняты допущения: теплофизические параметры воды, стенки кристаллизатора, электрода, слитка не зависят от температуры, отсутствует диссипация энергии; теплообмен аппарата ВРП с внешней средой не учитывается; ввиду цилиндрической формы печей рассматривается осесимметрическая задача.

Итак, с учетом принятых допущений, уравнение энергии для области

$D_1 = \{x, r, \tau : 0 < x \leq z, 0 < r < R, 0 < \tau \leq \tau_k\}$ запишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_e}{\partial \tau} + w_e \frac{\partial \theta_e}{\partial x} = K_{e,c} (\theta_c - \theta_e) + a_e \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = K_{c,e} (\theta_e - \theta_c) + K_{c,cm} (\theta_{cm} - \theta_c) + a_c \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta_{cm}}{\partial \tau} + w_{cm} \frac{\partial \theta_{cm}}{\partial x} = K_{cm,c} (\theta_c - \theta_{cm}) + a_{cm} \frac{\partial^2 \theta_{cm}}{\partial x^2} + a_{cm} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{cm}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{cm}}{\partial r^2} \right); \end{cases} \quad (2)$$

$D_2 = \{x, r, \tau : z \leq x < c, 0 < r < R, \tau > 0\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} + w_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} = K_{s,c} (\theta_c - \theta_s) + a_s \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = K_{c,s} (\theta_s - \theta_c) + K_{c,cx} (\theta_{cx} - \theta_c) + a_c \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta_{cx}}{\partial \tau} + w_{cx} \frac{\partial \theta_{cx}}{\partial x} = K_{cx,c} (\theta_c - \theta_{cx}) + a_{cx} \frac{\partial^2 \theta_{cx}}{\partial x^2} + a_{cx} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{cx}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{cx}}{\partial r^2} \right); \end{cases} \quad (3)$$

$D_3 = \{x, r, \tau : c < x < d, 0 < r < R, \tau > 0\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} + w_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} = K_{s,c} (\theta_c - \theta_s) + a_s \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = K_{c,s} (\theta_s - \theta_c) + K_{c,u} (\theta_u - \theta_c) + a_c \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta_u}{\partial \tau} + w_u \frac{\partial \theta_u}{\partial x} = K_{c,u} (\theta_u - \theta_c) + a_u \frac{\partial^2 \theta_u}{\partial x^2} + a_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta_u}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_u}{\partial r^2} \right); \end{cases} \quad (4)$$

$D_4 = \{x, r, \tau : d < x < l, 0 < r < R, \tau > 0\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} + w_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} = K_{s,c} (\theta_c - \theta_s) + a_s \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = K_{c,s} (\theta_s - \theta_c) + K_{c,z} (\theta_z - \theta_c) + a_c \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta_z}{\partial \tau} - w_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = K_{z,c} (\theta_c - \theta_z) + a_z \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} + a_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial r^2} \right). \end{cases} \quad (5)$$

Системы уравнений (2)–(5) запишем в векторном виде соответственно для каждой области.

Для области D_1 :

$$L(\theta') = \theta'_r + K_1 \theta' + V_1 \theta'_x + A_1 \theta'_{xx} + B_1 (\theta'_r/r + \theta'_{rr}), \quad (6)$$

$$\theta^i = \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_k \\ \theta_i \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} k_{b,c} & -k_{b,c} & 0 \\ -k_{c,b} & k_{c,b} + k_{c,ct} & -k_{c,ct} \\ 0 & -k_{ct,c} & k_{ct,c} \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} w_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{ct} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_b & 0 & 0 \\ 0 & -a_c & 0 \\ 0 & 0 & -a_{ct} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{ct} \end{pmatrix}$$

Для области D_2 :

$$L(\theta'') = \theta''_r + K_2 \theta'' + V_2 \theta''_x + A_2 \theta''_{xx} + B_2 (\theta''_r/r + \theta''_{rr}), \quad (7)$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_{\text{в, в}} & -k_{\text{в, в}} & 0 \\ -k_{\text{в, в}} & k_{\text{в, в}} + k_{\text{в, вж}} & -k_{\text{в, вж}} \\ 0 & -k_{\text{вж, в}} & k_{\text{вж, в}} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} w_{\text{в}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{\text{вж}} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_{\text{в}} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{\text{в}} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{\text{вж}} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{\text{вж}} \end{pmatrix}$$

Для области D_3 :

$$L(\theta''') = \theta'''_r + K_3 \theta''' + V_3 \theta'''_x + A_3 \theta'''_{xx} + B_3 (\theta'''_r/r + \theta'''_{rr}), \quad (8)$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} k_{\text{в, в}} & -k_{\text{в, в}} & 0 \\ -k_{\text{в, в}} & k_{\text{в, в}} + k_{\text{в, вш}} & -k_{\text{в, вш}} \\ 0 & -k_{\text{в, вш}} & k_{\text{в, вш}} \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} w_{\text{в}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{\text{вш}} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\alpha_{\text{в}} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{\text{в}} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{\text{вш}} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{\text{вш}} \end{pmatrix}$$

Для области D_4 :

$$L(\theta''') = \theta'''_r + K_4 \theta''' + V_4 \theta'''_x + A_4 \theta'''_{xx} + B_4 (\theta'''_r/r + \theta'''_{rr}), \quad (9)$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} k_{\text{в, в}} & -k_{\text{в, в}} & 0 \\ -k_{\text{в, в}} & k_{\text{в, в}} + k_{\text{в, вж}} & -k_{\text{в, вж}} \\ 0 & -k_{\text{вж, в}} & k_{\text{вж, в}} \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} w_{\text{в}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_{\text{вж}} \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -\alpha_{\text{в}} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{\text{в}} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{\text{вж}} \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{\text{вж}} \end{pmatrix}$$

Систему уравнений (6)–(9) дополним начальными условиями:

$$\theta^i(x, r, 0) = \varphi^i(x, r), \varphi^i = [\varphi_{\text{в}} \varphi_{\text{вж}} \varphi_{\text{вш}}]^T, i = 1, 2, 3, 4; \quad (10)$$

$$z(0, r) = z_0, z_0 = [0, 0, Z(r)]^T; \quad \Delta(0, r) = \Delta_0, \quad \Delta_0 = [0, 0, \Delta(r)]^T,$$

условиями на подвижной границе фазового перехода “слиток твердый – слиток жидккий”

$$\rho_{cm} q z_r = \lambda_{cm} [\theta_{cm}(z - 0, \tau)]_x - \lambda_{cвж} [\theta_{cвж}(z + 0, \tau)]_x, \quad (11)$$

на подвижной границе “шлак – электродр”

$$\rho_w q \Delta_r = \lambda_w [\theta_w(c + \Delta - 0, \tau)]_x - \lambda_s [\theta_s(c + \Delta + 0, \tau)]_x, \quad (12)$$

условиями на границах областей D_i :

$$\begin{aligned}
& \theta'(0, r, \tau) = \psi'(r, \tau); \quad \psi' = [\psi_v \quad \psi_c \quad \psi_{cm}]^T; \quad \theta_x''(l, r, \tau) = 0; \\
& \lambda_{cm}[\theta_{cm}(0, r, \tau)]_x = \alpha_{cm,c}[\theta_{cm}(0, r, \tau) - \theta_c]; \\
& \theta_{cm}(z=0, r, \tau) = \theta_{cж}(z+0, r, \tau) = T_{ш}; \quad \theta_{cж}(c, r, \tau) = T_{ш}; \\
& \theta_r''(x, 0, \tau) = [0]^T, \quad \theta'' = [\theta_{cm} \quad \theta_{cж} \quad \theta_{ш} \quad \theta_z]^T; \quad \Lambda[\theta'''(x, R, \tau)]_x = \alpha[\theta'''(x, R, \tau) - \theta_c]; \\
& \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{ct} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{cж} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{ш} \end{bmatrix}; \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{ct,c} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{cж,c} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{ш,c} \end{bmatrix}; \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\theta'''(d, r, \tau) = T_{ш}; \quad \theta_{ш}(c + \Delta - 0, r, \tau) = \theta_{ш}(c + \Delta + 0, r, \tau) = T_{пл}; \quad \theta_{шл} = 0,24I^2R_{шл};$$

$$k_{2,4} = \frac{\sigma p_4}{\rho_4 c_4 S_4} \frac{(\theta_3 + 273)^4 - (\theta_c + 273)^4}{\theta_3 - \theta_c}; \quad k_{ij} = \frac{\alpha_{ij} p_i}{\rho_i c_i S_i}.$$

В уравнениях (2)–(13) приняты обозначения:

индексы в, с, ст, скж, ш, э соответствующих параметров относятся к воде, стенке, слитку твердой фазы, слитку жидкой фазы, шлаковой ванне, электроду; при $i=1$, $j=ст$; $i=2$, $j=скж$; $i=3$, $j=ш$; $i=4$, $j=э$; θ_v , θ_c , $\theta_{ст}$, $\theta_{скж}$, $\theta_{ш}$, θ_3 — соответствующие температуры сред, ^0C ; ρ_i , c_i , λ_i , a_i — соответственно плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$; удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{град})$; коэффициенты теплопроводности, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$; температуропроводности i -й среды, $\text{м}^2/\text{с}$; α_{ij} , p_i , S_i — соответственно коэффициент теплоотдачи между i -й и j -й средами, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$, периметр раздела, м; площадь поперечного сечения i -й среды, м^2 ; w_i — скорость движения i -й среды, $\text{м}/\text{с}$; x , r , τ , z , Δ , c — соответственно текущие координаты по длине, м; радиус аппарата, м; время, с; координата подвижной границы в слитке, м; координата подвижной границы в электроде и граница между электродом и жидкой ванной, м; $T_{пл}$, $T_{ш}$ — соответственно температуры плавления металла и шлаковой ванны, ^0C ; q — теплота кристаллизации, $\text{Дж}/\text{кг}$; φ_i , ψ_i , ξ_i — известные распределения температур по соответствующим координатам; m — номер коаксиального слоя для слитка; σ — коэффициент лучеиспускания; D_k — диаметр кристаллизатора; D_e — диаметр электрода.

Термодинамические соотношения, замыкающие эту систему, такие, как зависимость коэффициента теплоотдачи от режима течения воды, коэффициента излучения и др., взяты из опубликованных экспериментальных данных, полученных разными авторами.

Представим математическое описание в безразмерном виде, для этого в соответствии с теоремой подобия перейдем к безразмерным переменным. Системы дифференциальных уравнений представляющие собой соотношение между безразмерными комплексами, описывают более широкий класс процессов, чем решение, найденное для размерных переменных. Математическое описание (2)–(5), (10)–(13) в безразмерном виде будет иметь вид:

Для области D_1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta_s}{\partial F_{O_s}} + Pe_s \bar{W}_s \frac{\partial \Theta_s}{\partial X} = \mathbf{K}_{s,c}^s (\Theta_c - \Theta_s) + \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta_c}{\partial F_{O_c}} = \mathbf{K}_{c,s}^s (\Theta_s - \Theta_c) + \mathbf{K}_{c,cm}^c (\Theta_{cm} - \Theta_c) + \frac{\partial^2 \Theta_c}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta_{cm}}{\partial F_{O_{cm}}} + Pe_{cm} \bar{W}_{cm} \frac{\partial \Theta_{cm}}{\partial X} = \mathbf{K}_{cm,c}^{cm} (\Theta_c - \Theta_{cm}) + \frac{\partial^2 \Theta_{cm}}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial \Theta_{cm}}{R \cdot \partial R} + \frac{\partial^2 \Theta_{cm}}{\partial R^2} \right). \end{cases}$$

Для области D_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta_s}{\partial F_{O_s}} + Pe_s \bar{W}_s \frac{\partial \Theta_s}{\partial X} = \mathbf{K}_{s,c}^s (\Theta_c - \Theta_s) + \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta_c}{\partial F_{O_c}} = \mathbf{K}_{c,s}^s (\Theta_s - \Theta_c) + \mathbf{K}_{c,c\infty}^c (\Theta_{c\infty} - \Theta_c) + \frac{\partial^2 \Theta_c}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta_{c\infty}}{\partial F_{O_{c\infty}}} + Pe_{c\infty} \bar{W}_{c\infty} \frac{\partial \Theta_{c\infty}}{\partial X} = \mathbf{K}_{c\infty,c}^{c\infty} (\Theta_c - \Theta_{c\infty}) + \frac{\partial^2 \Theta_{c\infty}}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial \Theta_{c\infty}}{R \cdot \partial R} + \frac{\partial^2 \Theta_{c\infty}}{\partial R^2} \right). \end{cases}$$

Для области D_3 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta_s}{\partial F_{O_s}} + Pe_s \bar{W}_s \frac{\partial \Theta_s}{\partial X} = \mathbf{K}_{s,c}^s (\Theta_c - \Theta_s) + \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta_c}{\partial F_{O_c}} = \mathbf{K}_{c,s}^s (\Theta_s - \Theta_c) + \mathbf{K}_{c,u}^c (\Theta_u - \Theta_c) + \frac{\partial^2 \Theta_c}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta_u}{\partial F_{O_u}} + Pe_u \bar{W}_u \frac{\partial \Theta_u}{\partial X} = \mathbf{K}_{cu}^u (\Theta_u - \Theta_c) + \frac{\partial^2 \Theta_u}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial \Theta_u}{R \cdot \partial R} + \frac{\partial^2 \Theta_u}{\partial R^2} \right). \end{cases}$$

Для области D_4 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta_s}{\partial F_{O_s}} + Pe_s \bar{W}_s \frac{\partial \Theta_s}{\partial X} = \mathbf{K}_{s,c}^s (\Theta_c - \Theta_s) + \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta_c}{\partial F_{O_c}} = \mathbf{K}_{c,s}^s (\Theta_s - \Theta_c) + \mathbf{K}_{c,s}^c (\Theta_s - \Theta_c) + \frac{\partial^2 \Theta_c}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta_s}{\partial F_{O_s}} + Pe_s \bar{W}_s \frac{\partial \Theta_s}{\partial X} = \mathbf{K}_{s,c}^s (\Theta_c - \Theta_s) + \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial \Theta_s}{R \cdot \partial R} + \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial R^2} \right). \end{cases}$$

Начальные и граничные условия:

$$\text{при } \tau = 0 \quad F_{O_i} = 0; \quad \Theta^i \left(\frac{x}{D_k}, \frac{r}{D_k}, 0 \right) = \bar{\varphi}^i \left(\frac{x}{D_k}, \frac{r}{D_k} \right) = \varphi^i(X, R); \quad \psi^i = [\psi_s, \psi_c, \psi_i]^T$$

$$(i = 1, 2, 3, 4); \quad 0 \leq x \leq z, \quad \left(z = \frac{z(r)}{d} \right), \quad 0 \leq R \leq \frac{1}{2};$$

$$z(0; R) = z_o; \quad z_o = [0, 0, z(R)]^T; \quad \Delta(0; R) = \Delta_o; \quad \Delta_o = [0, 0, \Delta(R)]^T;$$

$$\Theta\left(0, \frac{r}{D_k}, \tau\right) = \bar{\psi}'\left(\frac{r}{D_k}, \tau\right) = \bar{\psi}'(R, \tau), \quad \bar{\psi}' = [\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_c, \bar{\psi}_{cm}]^T;$$

$$\Theta_{cm}(Z=0, R, \tau) = \Theta_{c\infty}(Z+0, R, \tau) = \bar{T}_{ns}, \quad \bar{T}_{ns} = \frac{T_{ns}}{\theta_{ax}}, \quad Z = \frac{z}{D_k};$$

$$\Theta_{c\infty}(C=0, R, \tau) = \Theta_u(C+0, R, \tau) = \bar{T}_u, \quad \bar{T}_u = \frac{T_u}{\theta_{ax}}, \quad C = \frac{c}{D_k};$$

$$\Theta''(D, R, \tau) = \bar{T}_u, \quad D = \frac{d}{D_k}; \quad \Theta_u(C=0, R, \tau) = \Theta_s(C+0, R, \tau) = \bar{T}_{ns}, \quad C = \frac{c+\Delta}{D_k};$$

$$\Theta_u = 0,24I^2R_u; \quad \frac{\partial Z}{\partial F_{O_{cm}}} = \frac{c_p\theta_{ax}}{q} \left([\Theta_{cm}(Z=0, \tau)]_x - \frac{\lambda_{c\infty}}{\lambda_{cm}} [\Theta_{c\infty}(Z+0, \tau)]_x \right); \quad ..$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial F_{O_u}} = \frac{c_p\theta_{ax}}{q} \left([\Theta_u(C=0, \tau)]_x - \frac{\lambda_u}{\lambda_s} [\Theta_s(C+0, \tau)]_x \right);$$

$$[\Theta_{cm}(0, R, \tau)]_x = \text{Nu}[\Theta_{cm}(0, R, \tau) - \Theta_c]; \quad \left[\Theta\left(x, \frac{1}{2}, \tau\right) \right]_r = \text{Nu} \left[\Theta\left(x, \frac{1}{2}, \tau\right) - \Theta_c \right],$$

$$\text{Nu} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{cm,c} \cdot D_k}{\lambda_{cm}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{c\infty,c} \cdot D_k}{\lambda_{c\infty}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_{u,c} \cdot D_k}{\lambda_u} \end{bmatrix}; \quad \Theta_r(x, 0, \tau) = [0], \quad \Theta = [\Theta_{cm}, \Theta_{c\infty}, \Theta_u, \Theta_s];$$

$$\Theta'_x(L, R, \tau) = 0, \quad L = \frac{l}{D_k},$$

где $X = \frac{x}{D_k}$; D_k — диаметр кристаллизатора; $R = \frac{r}{D_k}$; $\Theta_i = \frac{\theta_i}{\theta_{ax}}$; θ_{ax} —

температура воды на входе; $\bar{W}_i = \frac{w_i}{w_0}$, w_0 — скорость воды на входе; $F_{O_i} = \frac{a_i \cdot \tau}{D_k^2}$ —

число Фурье; $Pe_i = \frac{w_0 \cdot D_k}{a_i}$ — число Пекле; $K_i = \frac{\text{Nu}_i \cdot P_i \cdot D_k}{S_i}$, $\text{Nu}_i = \frac{\alpha_i \cdot D_k}{\lambda_i}$ —

число Нуссельта.

В последние годы получили распространение следующие установки ВРП — вакуумно-дуговой двухэлектродный (ВДЭП) и плазменнодуговой (ПДП) переплавы. В этих ВРП электроды (заготовки) расположены радиально, источник энергии (дуга, плазмотрон) неподвижен; в работе получено описание теплофизических процессов в этих печах.

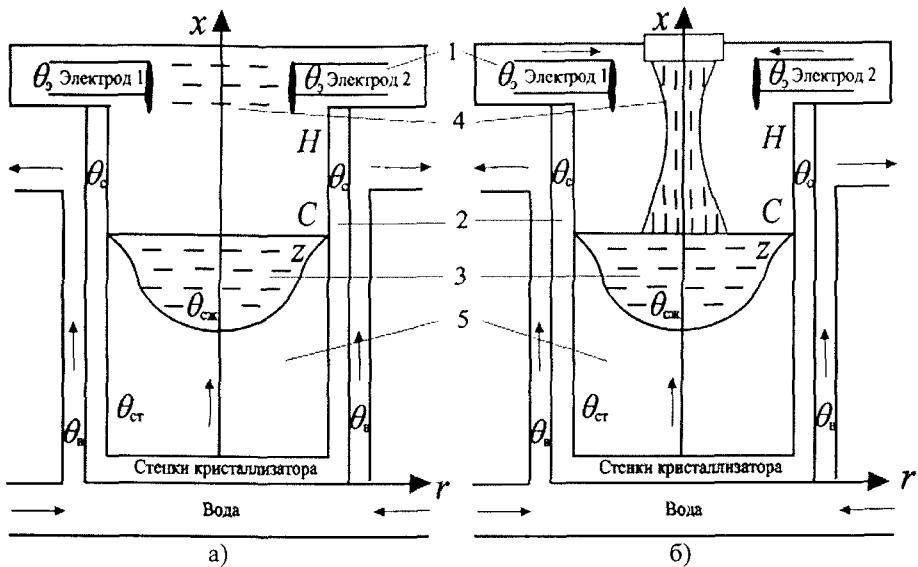


Рис. 2. Схема ВРП с радиальными электродами (заготовками) и неподвижным источником энергии, а — ВДЭП, б — ПДП: 1 — электроды, заготовки; 2 — водоохлаждаемый кристаллизатор; 3 — жидкокометаллическая ванна; 4 — источник энергии (дуга, плазмотрон); 5 — слиток

В установках ВДЭП, ПДП удается сочетать высокую производительность переплава, пониженный расход электроэнергии, возможность обеспечить нужную кристаллическую структуру слитка. При этом можно управлять скоростью подачи металла в изложницу, температурными полями, перемешиванием металла в радиальном направлении путем вращения кристаллизатора или жидкокометаллической ванны. Слитки характеризуются отсутствием внутренних напряжений, мелкозернистой структурой, повышенной дисперсностью дендритной структуры.

В данной работе решается двумерная задача по определению динамических характеристик аппарата ВДЭП с учетом фазовых переходов в охлаждаемой изложнице. При этом весь аппарат условно разделен на 4 участка: зона затвердевшего слитка при $0 < X < Z(r)$, жидкой ванны при $Z(r) < X < C$, вакуума при $C < X < H$ и двух электродов при $H < X < H + d$. Схематично эти зоны изображены на рис. 2, координаты границ зон изменяются по времени.

В работе приводится описание каждой зоны аппарата уравнениями сохранения, следующими из (1) при допущениях: теплофизические параметры воды, стенок кристаллизатора, электродов и слитка не зависят от температуры, отсутствуют диссиляция энергии и внутренние источники. Электрическая дуга между электродами рассматривается как источник энергии на границе «вакуум — жидккая ванна», теплообмен аппарата с внешней средой не учитывается.

Ввиду цилиндрической формы частей аппарата рассматривается осесимметричная задача, с учетом принятых допущений, относительно вектор-функции θ :

$\theta' = [\theta_b, \theta_c, \theta_{cr}]^T$ – для первой зоны, $\theta'' = [\theta_b, \theta_c, \theta_{ck}]^T$ – для второй зоны, $\theta''' = [\theta_b, \theta_c, 0]^T$ – для третьей зоны, $\theta'''' = [0, 0, \theta_r]^T$ – для четвертой зоны, можно написать уравнения энергии соответственно для всех четырех зон аппарата.

Для первой зоны

$$L(\theta') = \theta'_r + K_1 \theta' + V_1 \theta'_x + A_1 \theta'_{xx} + B_1 (\theta'_r/r + \theta'_{rr}), \quad (14)$$

здесь, K_i, V_i, A_i, B_i — матрицы коэффициентов для i -й зоны,

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_{b,c} & -k_{b,c} & 0 \\ -k_{c,b} & k_{c,b} + k_{c,cr} & -k_{c,cr} \\ 0 & -k_{cr,c} & k_{cr,c} \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} w_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{cr} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_b & 0 & 0 \\ 0 & -a_c & 0 \\ 0 & 0 & -a_{cr} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{cr} \end{pmatrix}$$

при $\tau > 0, 0 < x < z, 0 < r < R$.

Для второй зоны

$$L(\theta'') = \theta''_r + K_2 \theta'' + V_2 \theta''_x + A_2 \theta''_{xx} + B_2 (\theta''_r/r + \theta''_{rr}), \quad (15)$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_{b,c} & -k_{b,c} & 0 \\ -k_{c,b} & k_{c,b} + k_{c,ck} & -k_{c,ck} \\ 0 & -k_{ck,c} & k_{ck,c} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} w_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{ck} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -a_b & 0 & 0 \\ 0 & -a_c & 0 \\ 0 & 0 & -a_{ck} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{ck} \end{pmatrix}$$

при $\tau > 0, z < x < c, 0 < r < R$.

Для третьей зоны

$$L(\theta''') = \theta'''_r + K_3 \theta''' + V_3 \theta'''_x + A_3 \theta'''_{xx} + B_3 (\theta'''_r/r + \theta'''_{rr}), \quad (16)$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} k_{b,c} & -k_{b,c} & 0 \\ -k_{c,b} & k_{c,b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} w_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -a_b & 0 & 0 \\ 0 & -a_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при $\tau > 0, c < x < H, 0 < r < R$.

Для четвертой зоны

$$L(\theta''') = \theta''''_r + K_4 \theta'''' + V_4 \theta''''_x + A_4 \theta''''_{xx} + B_4 (\theta''''_r/r + \theta''''_{xx}), \quad (17)$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{pmatrix}$$

при $\tau > 0, 0 < r < R, H < x < H + d/2$.

Системы дифференциальных уравнений (14)–(17) дополнены начальными условиями:

$$\begin{aligned} \theta'''(x, r, 0) &= \phi'''(x, r); & \phi'''(x, r) &= [0, 0, \phi_s(x, r)]^T; \\ \theta''(x, r, 0) &= \phi''(x, r); & \phi''(x, r) &= [\phi_u, \phi_c, 0]^T; \\ Z(0, r) &= Z_0; & Z_0 &= [0, 0, Z(r)]^T; \\ \theta_{ct}(x, r, 0) &= \theta_{ck}(x, r, 0) = T_{nn} \end{aligned} \quad (18)$$

и условиями на подвижной границе фазового перехода:

$$\rho_{ct} q Z_r = \lambda_{ct} [\theta_{ct}(z-0, r, \tau)]_x - \lambda_{ck} [\theta_{ck}(z+0, r, \tau)]_x \quad (19)$$

и на границах других зон аппарата:

$$\begin{aligned} \theta'_r(x, R, \tau) &= [0]; \\ \theta_s(x, 0, \tau) &= T_{nn}; \\ \theta'(0, r, \tau) &= \psi(r, \tau); \quad \psi = [\psi_u, \psi_c, \psi_{ct}]^T; \\ \lambda_{ct} [\theta_{ct}(0, r, \tau)]_x &= \alpha_{ct, tc} [\theta_{ct}(0, r, \tau) - \theta_c]; \\ \theta_{ct}(z-0, r, \tau) &= \theta_{ck}(z+0, r, \tau) = T_{nn}; \\ \theta_{ck}(c, r, \tau) &= T_{nob}; \\ \theta_r(x, 0, \tau) &= [0]; \quad \theta = [\theta_{ct}, \theta_{ck}, \theta_s]^T; \\ \Lambda[\theta(x, R, \tau)]_r &= \Re[\theta(x, R, \tau) - \theta_c]; \\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{ct} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{ck} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Re = \begin{pmatrix} \alpha_{ct, c} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{ck, c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Во второй главе рассматривается динамика теплообмена в ОМС, осложненного гидродинамическими особенностями движения сред — радиальными профилями скоростей и потоком тепла, обусловленного теплопроводностью. Описываемые теплообменные процессы протекают в переплавных металлургических печах и в некоторых ядерных энергетических установках, когда одна из сред является жидкотяжелой.

Рассмотрено два случая, когда анализируется динамика теплообмена с учетом профиля скоростей в средах и с учетом продольного потока тепла.

При постоянстве физических свойств сред, отсутствии внутренних источников, стабилизированном течении сред, уравнения (1) для n сред (слоев) записывается в матричной форме относительно вектор-функции $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ в виде

$$L(\theta) = \theta_r + w\theta_x + k\theta = 0, \quad (21)$$

$$\text{где } w = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \pm w_{r+1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \pm w_n \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & \dots & \dots & 0 \\ -k_{21} & (k_{21} + k_{23}) & -k_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -k_{nn-1} \\ & & & & k_{nn} \end{bmatrix},$$

с начальными и граничными условиями:

для прямотока:

$$\theta(x, 0) = \theta(x); \quad \theta(0, \tau) = \theta_{bx}(\tau); \quad (22)$$

для противотока:

$$\theta_i(0, x) = \theta_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\theta_j(0, \tau) = \theta_{jbx}(\tau) \quad (j = 1, 2, \dots, r);$$

$$\theta_k(l, \tau) = \theta_{kbx}(\tau) \quad (k = r + 1, \dots, n).$$

Решение гиперболической системы уравнений (21) численными методами представляет сложную проблему. Причиной тому является негладкость решений данных уравнений. Несмотря на то, что при конечно-разностной аппроксимации исключается возможность существования разрывов в решениях, все же, как показывает практические расчеты, наибольшее расхождение между точным и численным решениями наблюдается именно вблизи точек разрыва. Поэтому для улучшения сходимости в этих точках приходится уменьшать шаг дискретизации задачи, что приводит к неустойчивости алгоритма.

В связи с этим при моделировании на компьютере процессов, описываемых уравнениям (21), был выбран метод центральных разностей, который обеспечивает устойчивое решение.

Исходная система операторов (21) в дискретной форме имеет вид

$$\sum_{j=1}^n [\alpha''_{ij} \theta_j(\xi + 1, \tau + 1) + \alpha'''_{ij} \theta_j(\xi, \tau + 1)] = \sum_{j=1}^n [\alpha''_{ij} \theta_j(\xi + 1, \tau) + \alpha'_{ij} \theta_j(\xi, \tau)] \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

где α_{ij} коэффициенты, выражющиеся через параметры системы.

Начальные и граничные условия преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \theta_i(\xi, 0) &= \varphi_i(\xi) \quad (\xi = 0, 1, \dots, L - 1), \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ \theta_i(0, \tau) &= \psi_i(\tau) \quad (\tau = 0, 1, \dots, m), \quad (i = 1, 2, \dots, r); \\ \theta_j(L, \tau) &= \psi_j(\tau) \quad (\tau = 0, 1, \dots, m), \quad (j = r + 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (24)$$

При этом выполнены условия согласования:

$$\varphi_i(0) = \psi_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, r);$$

$$\varphi_j(L) = \psi_j(0) \quad (j = r + 1, \dots, n).$$

Для решения системы (23) был применен метод прямой и обратной прогонки, в основе которого лежит обобщенный метод Гаусса.

После определения значений функций на временном слое $\tau + 1$, через значения функций на предыдущем слое, повторяем операцию, т.е. определяем значения функции на $\tau + 2$ слое и т.д. Компьютерное моделирование процесса теплопередачи рассматривалось применительно к противоточным системам. Как известно, точного аналитического решения данной задачи не получено даже для случаев, когда процесс описывается двумя уравнениями. Поэтому при численном решении задачи необходимо было полученные результаты сопоставить с экспериментальными данными.

В связи с этим при создании математической модели процесса ставились две задачи: первая — получение теоретических характеристик по уравнениям (21) и вторая — получение динамических характеристик на физической модели с последующим сравнением их с теоретическими.

Решение первой задачи осуществлялось на компьютере, при этом по полученному методу решения уравнений (21) была составлена программа расчета. С помощью компьютера исследовались различные варианты процессов при варьировании скорости и направления движения сред. Результаты моделирования показали, что совпадение теоретически рассчитанной средней массовой температуры с экспериментальными данными значительно лучше при введении градиента скорости потока среды, что было учтено при решении практических задач.

В третьей главе приводятся результаты численного моделирования теплофизических процессов в ОМС.

Физическая постановка этой задачи, а также нелинейный характер уравнений (2)–(13), приводят к тому, что рассматриваемая задача, как правило, не имеет гладкого решения, а содержит особенности.

Численное решение с использованием разностных схем допускает сквозной счет гладких решений и разрывов по одному алгоритму. Для достижения этой цели в уравнения введены старшие производные с малым параметром — искусственной «турбулентной теплопроводностью» в среде для воды. Такой прием, который моделирует реальный физический процесс, аналогичен введению «искусственной вязкости».

Особенность решения задачи переплава заключается в том, что в начале переплава имеется только электродная зона, затем по мере наплавления появляется зона жидкой ванны, в которой протекает кристаллизация с подвижной границей фазового перехода и образованием третьей зоны. Для упрощения было принято, что на дне кристаллизатора имеется затравка жидкого металла.

Решение дифференциальных уравнений в областях D_i , заменяется их решением в точках разностной сетки D . В качестве сетки D рассмотрена совокупность точек пересечения прямых $x = mh$, $r = u\Delta r$, $\tau = n\Delta \tau$ в области D_i , где $m = 0, 1, \dots, F$; $u = 1, 2, \dots, k$; $n = 0, 1, \dots$; $h > 0$, $\Delta r > 0$, $\Delta \tau > 0$.

Используя разностные аналоги производных, аппроксимируем дифференциальные уравнения (2)–(9) явной разностной схемой вида:

$$\begin{aligned} (\Delta \tau)^{-1} [\theta(mh, u\Delta r, (n+1)\Delta \tau) - \theta(mh, u\Delta r, n\Delta \tau)] &= \pm w(2h)^{-1} [\theta((m+1)h, u\Delta r, n\Delta \tau) - \\ &- \theta((m-1)h, u\Delta r, n\Delta \tau)] + ah^{-2} [\theta((m+1)h, u\Delta r, n\Delta \tau) - 2\theta(mh, u\Delta r, n\Delta \tau) + \\ &+ \theta((m-1)h, u\Delta r, n\Delta \tau)] + a(2u\Delta r^2)^{-1} [\theta(mh, (u+1)\Delta r, n\Delta \tau) - \theta(mh, (u-1)\Delta r, n\Delta \tau)] + \\ &+ a(\Delta r)^{-2} [\theta(mh, (u+1)\Delta r, n\Delta \tau) - 2\theta(mh, u\Delta r, n\Delta \tau) + \theta(mh, (u-1)\Delta r, n\Delta \tau)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Дискретизация граничных и начальных условий (10)–(13) проведена аналогично.

Систему (25) запишем в виде:

$$\theta_{m,u}^{n+1} = \theta_{m,u}^n + \Delta \tau \left\{ \pm w_u (2h)^{-1} (\theta_{m+1,u}^n - \theta_{m-1,u}^n) + ah^{-2} (\theta_{m+1,u}^n - 2\theta_{m,u}^n + \theta_{m-1,u}^n) + \right.$$

$$+ k_{u,u-1} (\theta_{m,u-1}^n - \theta_{mu}^n) + k_{u,u+1} (\theta_{m,u+1}^n - \theta_{mu}^n) \}. \quad (26)$$

Решение системы (26) проведено путем расщепления ее на систему k уравнений:

$$\begin{aligned} \theta_{m,1}^{n+1} &= \theta_{m,1}^n + \Delta \tau \left\{ \pm w_1 (2h)^{-1} (\theta_{m+1,1}^n - \theta_{m-1,1}^n) + ah^{-2} (\theta_{m+1,1}^n - 2\theta_{m,1}^n + \theta_{m-1,1}^n) + \right. \\ &+ k_{1,0} (\theta_{m,0}^n - \theta_{m,1}^n) + k_{1,2} (\theta_{m,2}^n - \theta_{m,1}^n) \}; \\ \theta_{m,u}^{n+1} &= \theta_{m,u}^n + \Delta \tau \left\{ \pm w_u (2h)^{-1} (\theta_{m+1,u}^n - \theta_{m-1,u}^n) + ah^{-2} (\theta_{m+1,u}^n - 2\theta_{m,u}^n + \theta_{m-1,u}^n) + \right. \\ &+ k_{u,u-1} (\theta_{m,u-1}^n - \theta_{m,u}^n) + k_{u,u+1} (\theta_{m,u+1}^n - \theta_{m,u}^n) \}; \\ \theta_{m,k}^{n+1} &= \theta_{m,k}^n + \Delta \tau \left\{ \pm w_k (2h)^{-1} (\theta_{m+1,k}^n - \theta_{m-1,k}^n) + ah^{-2} (\theta_{m+1,k}^n - 2\theta_{m,k}^n + \theta_{m-1,k}^n) + \right. \\ &\quad \left. + k_{k,k-1} (\theta_{m,k-1}^n - \theta_{m,k}^n) + k_{k,k+1} (\theta_{m,k+1}^n - \theta_{m,k}^n) \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $u = 1, 2, \dots, k$.

Выбор числа коаксиальных слоев проводился с учетом конструктивных особенностей аппарата. При $u = 1$ $\theta_{m,1}^n$ соответствует θ_b в уравнениях (2)–(5), при $u = 2$ $\theta_{m,2}^n - \theta_k$. При $u = 3, 4, \dots, 11$, $m = 0, 1, \dots, f$ θ_{mu}^n соответствует температурам коаксиальных слоев слитка, а при $u = 4, 5, \dots, 11$, $m = f + 1, \dots, F$ — электрода.

Теплопередача между коаксиальными слоями в слитке и электроде характеризуется коэффициентами k_{ij} . Параметры, определяющие теплопередачу на границе «вода – стенка», имеют вид:

$$k_{1,0} = \frac{\alpha_1 P_1}{\rho_1 c_1 S_1};$$

для всех трех зон аппарата, теплопередача на границе «стенка – слиток»

$$k_{1,2} = \frac{\alpha(mh) P_2}{\rho_2 c_2 S_2},$$

где $\alpha(mh)$ — коэффициент теплоотдачи, зависящий от координаты x , вследствие зазора между слитком и стенкой кристаллизатора. Теплопередача в электродной зоне на границе «стенка кристаллизатора – электрод» определяется законом Стефана – Больцмана

$$k_{1,4} = \frac{\sigma P_4}{\rho_4 c_4 S_4} \frac{(\theta_{m,4}^n + 273)^4 - (\theta_{m,2}^n + 273)^4}{\theta_{m,4}^n - \theta_{m,2}^n} \quad (m = f + 1, \dots, F; \quad n = 1, 2, \dots).$$

Разработан алгоритм численного решения исходных уравнений (2)–(13) с использованием схемы расщепления. Блок-схема приведена на рис. 3.

В блоках 9, 10 представлены процедуры расчета температуры $\theta(m, u, n)$ для каждого коаксиального слоя u . Процедура представляет собой расчет температуры по общему уравнению системы

$$\begin{aligned} \theta_{m,u}^{n+1} &= \theta_{mu}^n + \Delta \tau \left\{ \pm w(2h)^{-1} (\theta_{m+1,u}^n - \theta_{m-1,u}^n) + ah^{-2} (\theta_{m+1,u}^n - 2\theta_{m,u}^n + \theta_{m-1,u}^n) + \right. \\ &+ k_{u,u-1} (\theta_{m,u-1}^n - \theta_{m,u}^n) + k_{u,u+1} (\theta_{m,u+1}^n - \theta_{m,u}^n) \}; \end{aligned}$$

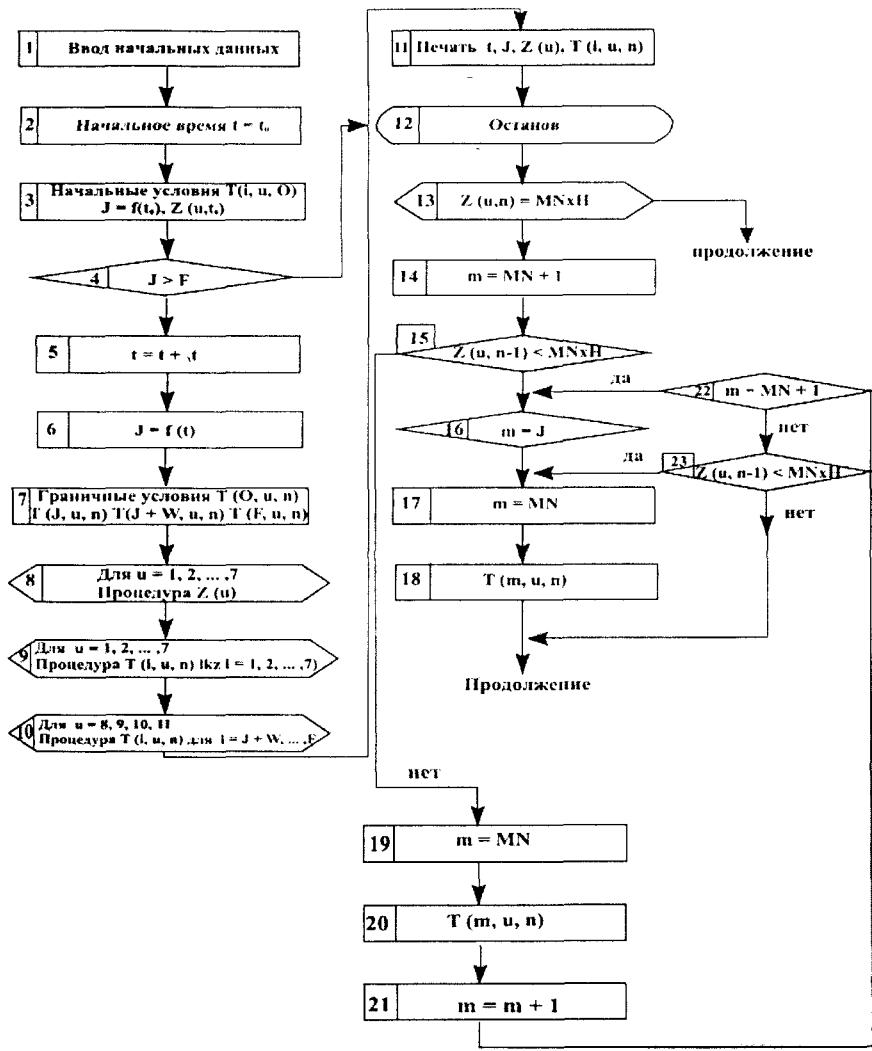


Рис. 3. Блок-схема алгоритма расчета температурных полей в печи ВДП

где для одного значения u , в процедуре рассчитываются последовательно температуры $\theta_{m,u}^{n+1}$ для $m = 0, 1, \dots, J$ в процедуре 8 для слитковой зоны аппарата, и для $m = J + W, \dots, F$ в процедуре блока 9 для электродной зоны. Температура в узловых точках $(m+1, u)$ и (m, u) таких, что $mh < Z_u^n < (m+1)h$ пересчитывалась в каждый момент времени $t = nt$. Это обусловлено тем, что подвижная граница Z_u^n фазового перехода, имея постоянную температуру, оказывалась с течением времени на различных расстояниях от смежных узловых точек $(m+1, u)$ и (m, u) . Поэтому температура в этих точках считалась по неявной разностной схеме с использованием переменных шагов дискретизации по оси X .

Расчет температур в точках, смежных с точкой Z_u^n , осуществлялся по двум формулам в зависимости от того, перешла подвижная граница Z_u^n узловую точку за момент времени $\Delta\tau$ или нет (блок 15). Если перешла, то расчет осуществлялся по формуле

$$\theta(m, u, n) = \theta_z - \frac{Z_u^n - mh}{Z_u^n - (m-1)h} (\theta_z - \theta(m-1, u, n))$$

блока 18, в противном случае — по формуле

$$\theta(m, u, n) = \left\{ \theta(m, u, n-1) + \tau [k_{u,u-1} \theta(m, u-1, n) + k_{u,u+1} \theta(m, u+1, n-1) + 2a((H_x \theta_x + H_y \theta_z)/(H_x H_y (H_x + H_y)))] \right\} / \left\{ 1 + \Delta\tau [k_{u,u-1} + k_{u,u+1} + 2a / (H_x H_y)] \right\}$$

блока 20. Здесь $H_x = h$, $H_y = mh - Z_u^n - Z_u^m$, $\theta_x = \theta(m+1, u, n)$, $\theta_y = \theta_z$, если рассматриваемая смежная точка имеет координату, большую чем Z_u^n , и в противном случае $H_x = Z_u^n - mh$, $H_y = h$, $\theta_x = \theta_z$, $\theta_y = \theta(m-1, u, n)$, где θ_z — температура в точке Z_u^n . Индексное число MN , используемое в блок-схеме, равно m при условии, что $mh < Z_u^n < (m+1)h$.

Доказана устойчивость разностной схемы (27). Для этого введено в рассмотрение соотношение между пространственными шагами разностной сетки Δr и h в виде

$$\Delta r = h/p.$$

С учетом принятого соотношения между шагами разностной сетки систему (27) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \theta_{m,u}^{n+1} = & \theta_{m,u}^n \left[1 - \frac{2a\Delta\tau}{h^2} - \frac{2a\Delta\tau p^2}{h^2} \right] + \theta_{m-1,u}^n \left[\frac{w\Delta\tau}{2h} + \frac{a\Delta\tau}{h^2} \right] + \theta_{m+1,u}^n \left[-\frac{w\Delta\tau}{2h} + \frac{a\Delta\tau}{h^2} \right] + \\ & + \theta_{m,u-1}^n \left[-\frac{ap\Delta\tau}{2rh} + \frac{ap^2\Delta\tau}{h^2} \right] + \theta_{m,n+1}^n \left[\frac{ap\Delta\tau}{2rh} + \frac{ap^2\Delta\tau}{h^2} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

С вводом обозначения

$$R = \frac{w\Delta\tau(p^2 + 1)}{h}, \quad (29)$$

доказывается, что система устойчива при $R \leq 1$.

С учетом (29) система (28) приводится к виду

$$\theta_{m,u}^{n+1} = \theta_{m,u}^n \left[1 - R \frac{2a}{hw} \right] + \frac{R}{2(1+p^2)} \left[\left(1 + \frac{2a}{hw} \right) \theta_{m-1,u}^n + \left(-1 + \frac{2a}{hw} \right) \theta_{m+1,u}^n + \left(-\frac{ap}{rw} + \frac{2ap^2}{hw} \right) \theta_{m,u-1}^n + \left(\frac{ap}{rw} + \frac{2ap^2}{hw} \right) \theta_{m,u+1}^n \right].$$

Убедимся в справедливости оценки

$$|\theta_{m,u}^{n+1}| \leq \left[1 - R \left(\frac{2a}{hw} \right) \right] \max |\theta_{m,u}^n| + \frac{R}{2(1+p^2)} \left[\left(1 + \frac{2a}{hw} \right) \max |\theta_{m-1,u}^n| + \left(1 - \frac{2a}{hw} \right) \max |\theta_{m+1,u}^n| + \left(-\frac{ap}{rw} + \frac{2ap^2}{hw} \right) \max |\theta_{m,u-1}^n| + \left(\frac{ap}{rw} + \frac{2ap^2}{hw} \right) \max |\theta_{m,u+1}^n| \right]. \quad (30)$$

Действительно, при $2a \leq hw$ и $R \leq 1$ имеем:

$$1 - R \frac{2a}{hw} \geq 0, \quad 1 + \frac{2a}{hw} > 0, \quad 1 - \frac{2a}{hw} > 0,$$

$$\frac{ap}{rw} + \frac{2ap^2}{hw} > 0, \quad -\frac{ap}{rw} + \frac{2ap^2}{hw} > 0.$$

Тогда (30) запишется так:

$$|\theta_{m,u}^{n+1}| \leq \left[1 - R \frac{2a}{hw} + \frac{R}{2(p^2+1)} \left(2 + \frac{4ap^2}{hw} \right) \right] \max (|\theta_{m,u}^n|, |\theta_{m+1,u}^n|, |\theta_{m-1,u}^n|, |\theta_{m,u-1}^n|, |\theta_{m,u+1}^n|) \leq (1 - R + R) \max |\theta_{m,u}^n| = \max |\theta_{m,u}^n|. \quad (31)$$

Из неравенства (31), выражающего условия принципа максимума, следует устойчивость решаемой системы (27). В результате исследования по устойчивости системы (27) получены ограничения на шаги дискретизации h , Δr , $\Delta \tau$, в виде:

$$\Delta r = \frac{h}{p}; \quad \Delta \tau \leq \frac{h^2}{2a(p^2+1)}; \quad \Delta \tau \leq \frac{h}{w(p^2+1)}. \quad (32)$$

Численные эксперименты решения системы (27) показали обоснованность полученных соотношений (32). Например, при $h = 0,12$ м, $\Delta r = 0,052$ м, $p = 2,3$, $w_1 = 100$ м/ч, получаем $\Delta \tau = 0,7$ с. Т.е. при выбранных параметрах решение системы (27) будет устойчивым, если температура в каждом узле (m, u) аппарата пересчитывается через 0,7 секунды. Полученный результат отражает, видимо, и тот факт, что теплообмен в аппарате интенсивен.

На рис. 4 приведены графики изменения температуры стенки кристаллизатора на высоте 960 мм по мере наплавления слитка. Из рисунка видно, что формы экспериментальной и расчетной кривой близки друг к другу, соответствие вполне удовлетворительное.

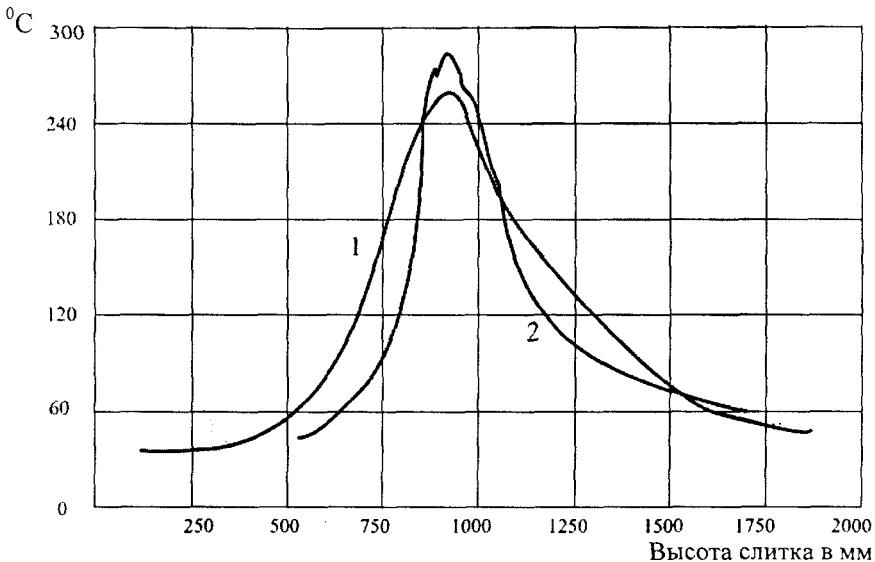


Рис. 4. Температура стенки кристаллизатора; кривые: 1 — расчетная, 2 — экспериментальная

На рис. 5 представлены некоторые результаты по моделированию формы жидкой ванны; видно, что расхождение кривых незначительное.

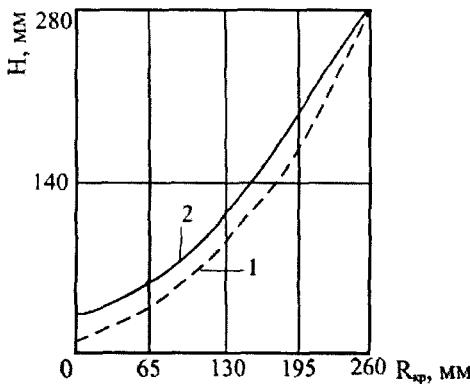


Рис. 5. Форма жидкой ванны; кривые: 1 — расчетная, 2 — экспериментальная

В четвертой главе приводятся результаты оптимизации параметров переплавных процессов в ОМС с помощью методов математического моделирования.

На основе математической модели переплава, полученной в этой работе, решен целый комплекс задач: определено наилучшее сочетание основных параметров переплава — силы тока, диаметра электрода, глубины конической части ванны при сохранении нужного качества металла; выявлено влияние скорости охлаждающей воды и стенки кристаллизатора на температурное поле слитка и жидкой ванны; дана методика расчета толщины снимаемой с боковой поверхности слитка стружки при зачистке его в зависимости от сформировавшейся кристаллической структуры металла; решена задача оптимального управления вывода усадочной раковины в головной части слитка; получена модель электромагнитного перемешивания жидкокометаллической ванны в температурном поле; получена модель формирования поверхностных слоев слитка в зависимости от температуры заливаемого металла; получены условия оптимального управления теплообменом по расходу одной из сред.

На основе компьютерного моделирования получена методика расчета рационального сочетания основных параметров переплава.

На рис. 6, 7 приведено изменение глубины ванны со временем наплавления для трех значений силы тока и диаметра электродов при диаметре кристаллизатора 0,52 м. Глубина конической части ванны уменьшается со снижением силы тока, влияние диаметра электрода противоположно по знаку. Это создает предпосылки для улучшения качества слитка. Однако скорость кристаллизации (средняя) несколько уменьшается с увеличением диаметра электрода.

На рис. 8 представлено изменение глубины конической части жидкой ванны в зависимости от силы тока и от диаметра электрода. Как показано ранее, с увеличением диаметра электрода глубина конической ванны уменьшается и, поэтому увеличение ее с увеличением силы тока можно компенсировать увеличением диаметра электрода. На рис. 8 показано пунктирной линией, как увеличить силу тока и диаметр электрода, сохранив глубину конической части ванны, например 350 мм. Согласно графику, получается, что диаметр электрода можно увеличить до $D_e = 400$ мм и силу тока до $I = 12,8$ кА.

Исследовалось влияние скорости движения охлаждающей воды на теплофизику процесса переплава. Изменение скорости воды при постоянстве других параметров для некоторого существующего ВРП в диапазоне от 1,5 до 3 раз приводит к допустимым технологическим режимам. Однако изменение скорости воды в большем диапазоне сразу приводит к неустойчивым тепловым режимам, которые существенно влияют на процесс кристаллизации металла и могут даже привести к взрывоопасному состоянию переплавной установки. Поэтому и с теоретической точки зрения и практической параметр скорость воды является одним из важнейших определяющих устойчивость теплофизических процессов ВРП и выбирать его значение следует в совокупности с другими теплофизическими, геометрическими параметрами всего процесса в целом. Решение такой задачи возможно только с помощью компьютерного моделирования проведенного в данной работе.

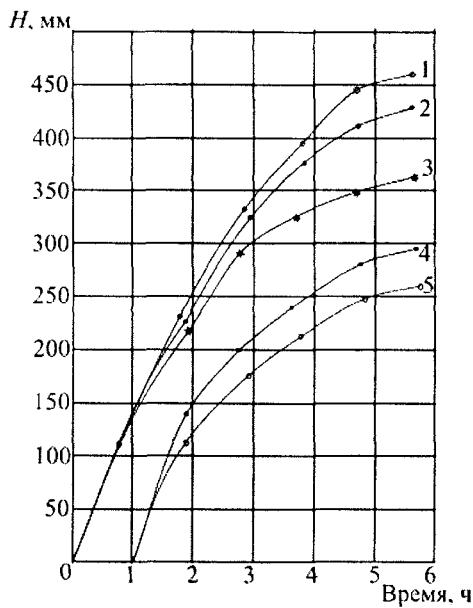


Рис. 6. Зависимость глубины ванны H от времени наплавления и диаметра электрода. Кривые 1, 5 для диаметра электрода $D_e = 0,44$ м; 2, 4 — для $D_e = 0,40$ м; 3 — для $D_e = 0,30$ м; кривые 1, 2, 3 для полной глубины ванны; 4, 5 — для конической части, $D_k = 0,52$ м

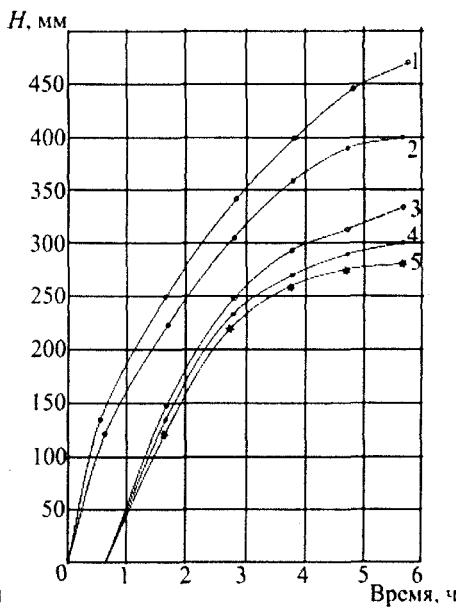


Рис. 7. Зависимость глубины ванны H от времени наплавления и тока. Кривые 1, 3 для силы тока $I = 12$ кА; 2, 4 — для $I = 11$ кА; 5 — для $I = 10$ кА . Причем, кривые 1, 2, соответствуют полной глубине ванны, а 3, 4, 5 — конической части, $D_k = 0,52$ м, $D_e = 0,4$ м

Расчеты с варьированием толщины стенки кристаллизатора, показали слабую зависимость температурных полей слитка и формы жидкой ванны. По крайней мере, увеличение толщины стенки с 19 мм до 38 мм не привело к различимым результатам.

Поэтому при проектировании печи ВРП толщину стенки целесообразно выбирать из экономических соображений или соображений прочности.

Численное моделирование динамики формирования геометрии жидкокристаллической ванны в двумерном пространстве и времени впервые позволило подтвердить апериодический характер процесса теплообмена и кристаллизации в поверхностных слоях слитка, затухающего к центру слитка.

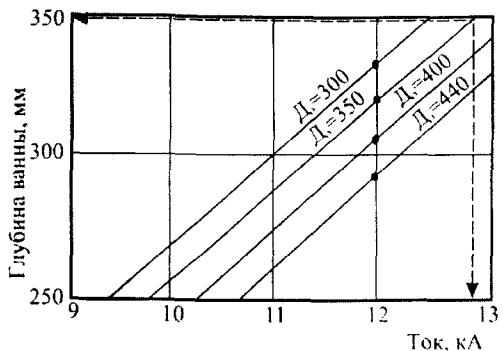


Рис. 8. Зависимость глубины конической части ванны от силы тока I и от диаметра электрода

Скорость продвижения фронта кристаллизации и температурный градиент определяют макро- и микроструктуру металла. Вычисленные по основной модели характеристики позволили получить данные о междендритном расстоянии. Как было установлено в работе, увеличение диаметра электрода и силы тока при сохранении глубины ванны позволяют сформировать лучшую дендритную структуру слитка.

Установлено также, что наиболее высокие механические свойства металла слитка имеет в зоне столбчатых, а также в зоне различно ориентированных кристаллов. Такую структуру обеспечивает больший диаметр электрода и сила тока. Поэтому увеличение по радиусу ширины этих зон увеличит выход годного. При этом естественно следует уменьшить зону кристаллов, образующих боковую поверхность слитка, характеризующуюся малым расстоянием между осями дендритов. Большую часть этой зоны снимают при обдирке слитка.

На рис. 9 приведена зависимость между толщиной стружки и междендритным расстоянием.

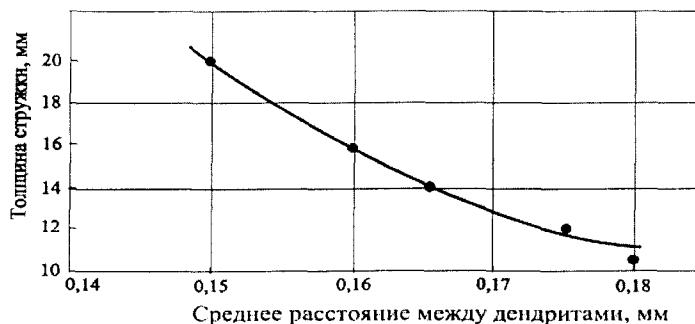


Рис. 9. Зависимость толщины стружки от среднего расстояния в зазоре между дендритами

По математической модели рассчитываются температурные градиенты, скорость кристаллизации, средние междендритные расстояния λ и по графику на рис. 9 определяется толщина снимаемой стружки, и соответственно, выход годного.

Для увеличения выхода годного, связанного с головной частью слитка, проведено моделирование режимов вывода усадочной раковины.

Экспериментальные исследования показывают, что снижение нормы обрези в головной части слитка диаметром 380 мм возможно со 120 до 50 мм в результате выбора рационального режима вывода усадочной раковины; это позволяет увеличить на 9,2% выход годного металла.

Задача отыскания рациональных режимов вывода усадочной раковины становится еще более актуальной при ведении основного периода плавки на повышенной силе тока, так как при этом увеличивается глубина жидкой ванны и, значит, величина усадочных дефектов.

Поиск оптимальных режимов вывода усадочной раковины, конечно, возможен только на основе адаптированной математической модели процесса. Дополнив математическую модель ВРП дифференциальным уравнением движения фазовой границы $Z_2(r, \tau)$ в направлении от верха слитка, а также соответствующими граничными условиями, получили математическую модель выведения усадочной раковины. За начальные условия модели (дифференциальных уравнений) приняты условия конца основного периода плавки.

В результате решения сформулированной задачи установлено, что наилучшей стратегией изменения силы тока I при выведении усадочной раковины в течение одного часа, является следующая: резкое снижение силы тока с рабочих значений $I = 11$ кА до $I_0 = 2,5$ кА, при котором отсутствует наплавление слитка. Далее, выдержка при силе тока $I_0 = 2,5$ кА в течение 53 минут с последующим снижением силы тока до нуля. Осуществление такого управления, позволяет вывести усадочную раковину до расстояния 50 мм от верха слитка в условиях, когда при обычном режиме это расстояние составляет 150 мм.

Теоретические исследования данной работы по выведению усадочной раковины и экспериментальные исследования, проведенные на металлургическом заводе, позволили снизить нормы головной технологической обрези слитков и увеличить выход годного на 5%.

Для повышения дисперсности кристаллической структуры металла большое значение имеет создание новых принципов воздействия на жидкий и кристаллизующийся металл. Электромагнитное перемешивание жидкого металла является более эффективным по сравнению с другими методами. В работе проведено компьютерное моделирование этого процесса.

По найденному температурному полю в жидкой ванне и ее форме, определяемой подвижной границей $Z(r)$ проанализирована динамика поля скоростей слоев при вращении ванны индукционной машиной. Получены зависимости поля скоростей слоев от температуры.

Для детального изучения теплофизических процессов формирования поверхностных слоев слитка проведены специальные исследования. На основе полученной математической модели проанализированы термодинамические условия формирования кристаллической структуры поверхностных слоев слитка. В полученной математической модели ВДП рассмотрен случай, когда источник энергии (дуга) снят, и скорость наплавления слитка достаточно большая. Это соответствует заливке горячего металла в кристаллизатор (изложницу). В этом варианте процесса на формирование структуры металла оказывает воздействие величина перегрева заливаляемого металла θ_n , скорость продвижения фронта кристаллизации V_{kp} , ширина двухфазной зоны и ряд других.

Решаемая задача формирования структуры поверхностного слоя слитка представлена двумя частями: первая — тепловая задача, вторая — термодинамическая, связанная с формированием структуры поверхностного слоя металла.

На первом этапе необходимо было решить тепловую задачу для определения распределения температур и величины градиентов вдоль радиуса кристаллизатора. Решалась осесимметричная задача с учетом подвижной границы раздела, «твёрдая фаза — жидкость» и выделения теплоты кристаллизации.

В результате дискретизации по радиусу r получена система одномерных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} + V_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = K_{i,i-1}(\theta_{i-1} - \theta_i) + K_{i,i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) + a_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{W_i}{c_i \rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (33)$$

Особенностью решения системы (33) является то, что для подробного изучения поверхностных слоев слитка применялась неравномерная дискретизация по радиусу. А именно, станка кристаллизатора и основной слиток по радиусу имеют шаг $\Delta r_i = 1$ см с тридцатью узлами разбиения, а поверхностный слой слитка в 40 мм разбит на 40 узлов, т.е. $\Delta r_i = 1$ мм. В местах перехода к другому шагу дискретизации применялись формулы дискретизации уравнений по неравномерной схеме, что отражалось на особенностях расчета формулы коэффициентов $K_{i,i+1}$ в двух местах сопряжений.

По полученным результатам тепловой задачи оценен средний размер зерна в поверхностном слое с использованием классической теории зародышеобразования.

После ряда преобразований без учета гомогенного зародышеобразования получили скорость зародышеобразования J и средний размер зерна \bar{r} в виде

$$J \approx 10^{30} \exp\left(\frac{-\Delta F}{2K\theta}\right), \quad \bar{r} = \left(\frac{\nu_i}{4J}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (34)$$

где ΔF — изменение свободной энергии на один атом при образовании зародыша критического размера; K — постоянная Больцмана, $K = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; ν_i — частота атомных скачков, $10^{-7} \dots 10^{-8}$ с⁻¹.

Можно полагать, что одним из управляемых параметров, от которых зависит структура поверхностного слоя и в определенной мере внутренних слоев слитка,

является температура заливки металла θ_n . Реализуя прерывистую заливку металла с изменяемой температурой в изложницу, можно управлять структурой слитка. На первом этапе заливается сильно перегретый металл ($\theta_n = 80\dots100^\circ\text{C}$) с массой 80...90% от полной массы слитка. В этом случае наблюдаются большие градиенты температур и большие скорости зарождения вблизи стенок изложницы и можно ожидать получение мелкозернистого поверхностного слоя. Кроме того, сильно перегретый металл лучше «смачивает стенки изложницы», что должно уменьшить количество механических дефектов в поверхностном слое. Через некоторое время t_1 , которое определяется требованием образования поверхностного слоя нужной толщины δ_1 , в изложницу добавляется «холодный» металл с перегревом 0...15 °C над температурой ликвидуса.

Величину промежутка времени t_1 от первой заливки до добавления «холодного» металла (вторая заливка) можно определить, имея зависимость толщины закристаллизованного слоя от времени $z = z(\tau)$ для различных температур перегрева θ_n . Задавая нужную толщину поверхностного слоя $\delta_1 = z(\tau)$, по кривой зависимости $z = z(\tau)$ можно определить требуемое время t_1 .

Согласно описанному варианту модели теплообмена системы “изложница – слиток” с использованием кинетики зародышеобразования на компьютере были рассчитаны значения текущих температур ϑ системы, градиентов G по радиусу слитка, ширины двухфазной зоны DX , скорости зародышеобразования J на единицу объема двухфазной зоны, значения z — координаты фронта кристаллизации в зависимости от времени τ для различных значений температуры перегрева жидкого металла θ_n .

На рис. 10 представлена зависимость величины градиентов температуры G от расстояния от стенки изложницы z для различных температур перегрева заливаемого металла θ_n . Точки минимума на кривых можно принять за точку перехода от мелкозернистого поверхностного слоя (ПС) к слою со столбчатой структурой.

В некоторый момент времени градиент G достигает своего минимального значения, причем с увеличением температуры перегрева металла θ_n точка минимума смещается влево. Т.е. при одном и том же времени t_1 после заливки толщина ПС меньше для больших температур.

В работе предлагается за величину протяженности ПС принимать толщину закристаллизованного слоя к моменту достижения градиентом G локального минимума.

На рис. 11 представлена зависимость толщины закристаллизованного слоя $z(\tau)$ от времени τ , прошедшем после заливки для различных температур θ_n . Видно, что скорость кристаллизации со временем заметно уменьшается. Для одного и того же времени τ скорость кристаллизации и толщина закристаллизованного слоя тем больше, чем меньше температура θ_n .

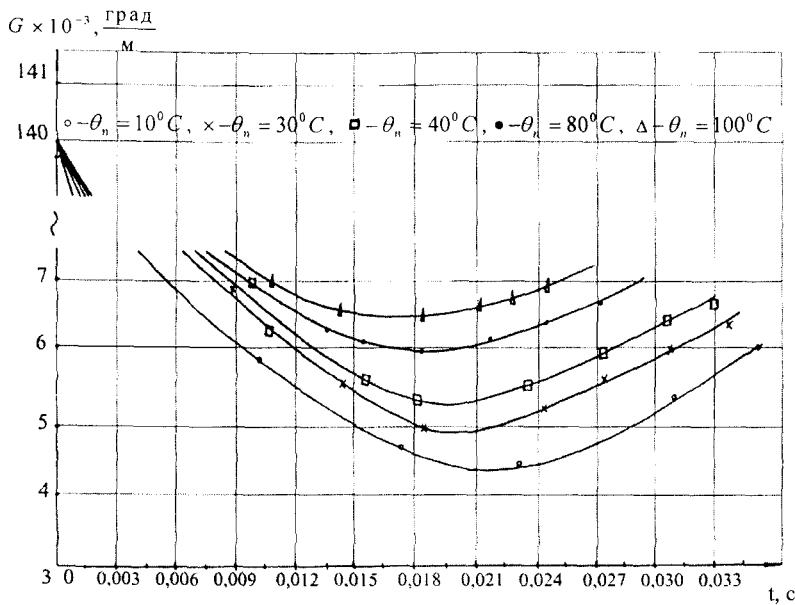


Рис. 10. Зависимость градиента G на границе раздела фаз от расстояния от стенки изложницы

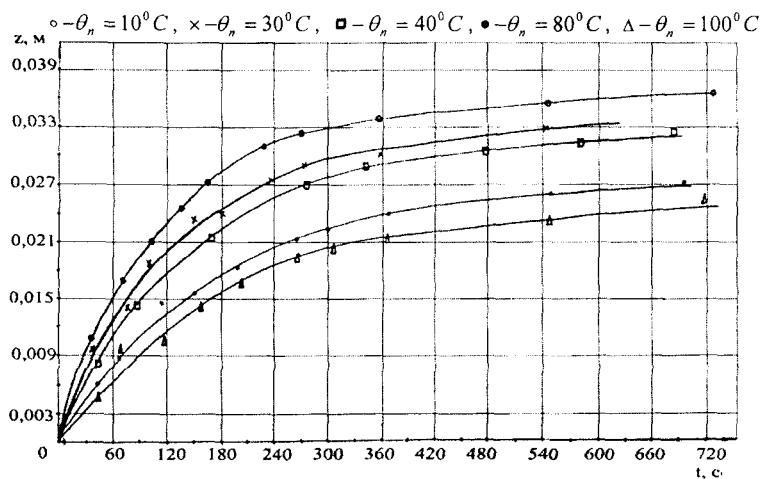


Рис. 11. Зависимость толщины закристаллизованного слоя z от времени для различных θ_n

Учитывая вышесказанное, можно заключить, что, если из технологических соображений нужно получить столбчатую структуру металла и качественный поверхностный слой, то нужно заливать металл при более высокой температуре θ . В этом случае уменьшается ширина двухфазной зоны и значительно уменьшается вязкость металла, что улучшит структуру поверхностного слоя.

Если необходимо получить удовлетворительный поверхностный слой и более развитую равноосную структуру внутренних слоев слитка, можно применить прерывистую заливку: в начале надо заливать металл при $\theta_1 = 1560 \dots 1590^{\circ}\text{C}$, затем доливать «холодный» металл с $\theta_2 = 1510^{\circ}\text{C}$.

В пятой главе рассматривается задача создания математической модели термоапрессированного состояния металла с целью прогнозирования и улучшения его качества.

Математическую модель напряженно-деформированного состояния слитка ВРП можно записать в виде трех систем дифференциальных уравнений, а именно, уравнений равновесия, уравнений совместности деформаций и определяющих уравнений упруговязкопластической среды. В системе (35) первые два уравнения при невыполнении условия текучести Мизеса представляют определяющие уравнения упруговязкой среды:

$$\left\{ \begin{array}{l} l'_{ik} = \left[\frac{s_{ik}}{2g} \right]' + \frac{1}{2\eta} s_{ik} \\ \sigma_0 = 3k(\varepsilon_0^E - \alpha\Delta\theta) \end{array} \right\} - \text{уравнение термоапрессии упруговязкой среды;} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} - \text{уравнение равновесия;} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\gamma_{rz}}{\partial r\partial z} \\ \frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r}[\varepsilon_r - \varepsilon_\theta] \end{array} \right\} - \text{уравнение совместности деформаций.} \end{math>}(35)$$

Система дифференциальных уравнений дополняется начальными условиями:

$$s_{ik} = 0 \text{ при } t = 0$$

и граничными условиями:

$$\tau_{rz} = 0, \quad \sigma_r = 0 \text{ при } r = R \text{ для любых } r, t,$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad \sigma_z = 0 \text{ при } z = 0, z = H, \text{ для любых } r, t.$$

Такой выбор граничных условий обусловлен тем, что на свободных поверхностях слитка не приложены внешние силы.

Система (35) состоит из восьми дифференциальных уравнений различного типа с восемью неизвестными $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}$. Т.е. система определена

полностью, но ее решение аналитическими или приближенными методами затруднительно.

Для решения вводится в рассмотрение потенциальная функция ψ такая, что

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad W = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Тогда компоненты деформации выражаются через ψ в виде

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \dot{\gamma}_{rz} = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{3} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{3} \nabla^2 \psi.\end{aligned}\quad (36)$$

Введение потенциальной функции ψ позволило свести задачу нахождения компонент деформации к отысканию одной неизвестной ψ из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3k}{2g} - 1 \right) \nabla^2 \psi \right] \right\} + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{3k}{2g} \alpha \Delta T \right].$$

После упрощений это уравнение приводится к виду

$$\nabla^2 \psi = \alpha \Delta \theta \cdot \frac{9k}{4g + 3k}.$$

Решение данного уравнения в некоторой области D заменено численным решением разностного аналога этого уравнения в точках разностной сетки, наложенной на область D .

В качестве разностной сетки взята совокупность точек пересечения прямых: $z = mh$, $r = u\Delta r$, $t = n\Delta t$ в области D , где $m = 0, 1, \dots, F$; $u = 1, 2, \dots, k$; $n = 0, 1, \dots$; $h > 0$, $\Delta r > 0$, $\Delta t > 0$.

В дискретной форме это уравнение приводится к виду

$$\psi_{m,u} = \psi_{m,u+1} \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \right) + \psi_{m,u-1} \left(\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right) + \frac{(\psi_{m+1,u} + \psi_{m-1,u})}{h^2} - \frac{9k\alpha\Delta\theta}{(4g + 3k)}, \quad (37)$$

где для краткости введены обозначения $\psi_{m,u}$ вместо $\psi(mh, u\Delta r)$.

Если считать значения $\psi_{m\pm 1, u\pm 1}$ известными, то формула (37) позволяет рассчитать и значения $\psi_{m,u}$. Для проведения вычислений по (37) для $m = 1, 2, \dots, F-1$; $u = 2, \dots, k-1$ должны заранее иметь значения функции ψ при $m = 0$, $m = FU$, $u = 1$, $u = k$, т.е. $\psi_{0,U}$, $\psi_{F,U}$ и $\psi_{m,1}$, $\psi_{m,k}$. Эти значения подбираются таким образом, чтобы на границах области D удовлетворялись граничные условия:

$$\sigma_{0,u} = 0; \tau_{0,u} = 0; \sigma_{F,u} = 0; \tau_{F,u} = 0.$$

Так как при вычислении $\psi_{m,u}$ значения $\psi_{m\pm 1, u\pm 1}$ также неизвестны, то формула (37) для всех m, u применяется многократно до тех пор, пока значения функции ψ для одних и тех же m, u не совпадут с требуемой точностью. Т.е. фактически уравнение (37) решается итерационным методом.

После вычисления значений функций ψ в точках сетки области D определены компоненты деформации по формулам (36) при использовании разностных аппроксимаций в тех же точках сетки области D .

Далее для нахождения компонентов напряжений используется та же разностная сетка на области D и разностные аналоги производных вида

$$\sigma_{ik} = [\sigma_{ik}(mh, u\Delta r, (n+1)\Delta t - \sigma_{ik}(mh, u\Delta r, n\Delta t))]/\Delta t.$$

Используем для краткости записи $\sigma_{m,u}^n$ вместо $\sigma_{ik} = (mh, u\Delta r, n\Delta t)$, тогда разностный аналог уравнения примет вид

$$\sigma_{m,u}^{n+1} = f(\psi_{m,u}) \cdot 2g\Delta t + \sigma_{m,u}^n \left(1 - \frac{g}{\eta} \Delta t \right), \quad (38)$$

где через $f(\psi_{m,u})$ обозначены найденные ранее значения функции $\psi_{m,u}$.

Итак, в каждый момент времени $t = n\Delta t$ вычисляются функции ψ по формуле (37), компоненты деформации – по (36), компоненты напряжений – по (38). При переходе к следующему моменту времени $t = (n+1)\Delta t$ при расчетах по указанным формулам используются соответствующие значения, найденные в предыдущий момент времени. Эта модель является частью общей модели, где решалась тепловая задача формирования слитка ВДП.

Математическая модель, разработанная в данной работе, позволяет проанализировать динамику напряжений в различных точках слитка и с минимальными затратами прогнозировать зависимость качества металла от термонапряжений. Получены зависимости распределения интенсивности напряжений по толщине корочки, на которой зависит слиток; получены условия зависания слитка на пояске и образования микротрецин.

В шестой главе приводятся результаты проведенных промышленных экспериментов на установках ВДП, которые позволили разработать математические модели, адекватные физическим процессам, оценить влияние основных технологических параметров на качество выпускаемого металла.

Исследовалась кристаллическая структура, физико-механические свойства, качество металла. Проведено исследование физических свойств металла и зависимость их от температуры; проведены эксперименты по исследованию ползучести при одноосном растяжении металла; проведено свыше пятидесяти промышленных плавок с их анализом и фиксацией всех параметров процесса.

На основе полученных экспериментальных данных разработаны адекватные математические модели теплофизических процессов, которые позволили оптимизировать, управлять ВРП путем создания лучших тепловых режимов кристаллизации металла.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. Развитие перспективных металлургических процессов – вторичных рафинирующих переплавов, которые существенно улучшают качество металлов и сплавов, используемых в машиностроительных технологиях высокого уровня, вызывает необходимость разработки теоретических основ этих процессов.

Использование методов математического моделирования как основы научных исследований позволило создать теоретическую основу теплофизических процессов вторичных рафинирующих переплавов для улучшения качества стали и

сплавов, полученных традиционными методами выплавки. Проанализированы конструктивные особенности переплавных установок, имеющих различные модификации. У всех агрегатов выделены главные составляющие части, участвующие в процессе переплава – электрический источник энергии, заготовка (расходуемый электрод) и приемник переплавленного металла (кристаллизатор). Технологические режимы рафинирующих переплавов в этих объектах определяются теплофизическими процессами, так как формирование слитка является агрегатным превращением при высоких температурах и градиентах температуры, как в самом слитке, так и в элементах печей.

2. На основе фундаментальных законов сохранения массы, энергии, импульса получены математические описания теплофизических процессов при вторичных рафинирующих переплавах, представляющие собой многомерные системы дифференциальных уравнений в частных производных. Отличительной особенностью полученных математических описаний является то, что в них учтена динамика теплопереноса между всеми движущимися средами в аппарате — источником энергии, переплавным электродом, наплавляемым слитком в твердой и жидкой фазах, охлаждающей водой и стенкой кристаллизатора. В уравнениях описаны фазовые переходы, зависящие от времени, радиуса, длины аппарата, определяющие форму жидкокристаллической ванны, от которой зависит микроструктура металла и его качество.

3. Нелинейный характер полученных в работе многомерных уравнений и физические условия развития процесса задачи свидетельствуют о том, что реализация их возможна только численными методами. Разработан численный алгоритм решения уравнений теплофизических процессов для осесимметричных случаев при соосном положении электрода и радиальном расположении двух электродов.

4. Основу численного метода составляет разработанная разностная схема, аппроксимирующая дифференциальную систему операторов со вторым порядком относительно шагов по пространственным координатам в каждой из областей D_i , на которые разбивается весь объем переплавной установки. Области D_i имеют подвижные границы, координаты которых изменяются в соответствии со скоростью движения источника энергии (скоростью переплава), а также при неподвижном источнике.

Впервые доказана устойчивость разностной схемы, принятой для аппроксимации дифференциальных операторов. Получены ограничения на шаги

$$\text{дискретизаций } \Delta\tau, \Delta r, h \text{ в виде } \Delta r = \frac{h}{p}; \quad \Delta\tau \leq \frac{h^2}{2a(p^2 + 1)}; \quad \Delta\tau \leq \frac{h}{w(p^2 + 1)}.$$

Необходимые условия устойчивости доказаны с использованием принципа максимума при допущении монотонного изменения рассчитываемой температуры $\theta_{m,n}^{n+1}$ и снижения ее в узлах по продольной координате x . Достаточность устойчивости подтверждена численным экспериментом.

5. Как установлено, переплавные установки с движущимися в них средами, математическое описание которых осложнено фазовыми переходами, большими

градиентами скоростей и температур, образуют класс аппаратов ОМС. Поэтому предложено выделить базис программных модулей для данного класса аппаратов и данного класса задач в рамках определенной области численных методов. Полученные программные модули составляют программный комплекс по моделированию теплофизических процессов в переплавных электропечах. Разработана блок-схема алгоритмов численной реализации теплофизических процессов в электропечах ВДП, ЭШП, ВДЭП. Алгоритмы описаны на языке ТУРБО ПАСКАЛЬ.

6. На основе математического моделирования разработана методика расчета основных технологических параметров переплава: силы тока и диаметра расходуемого электрода. В результате расчетов на компьютере было установлено: чтобы увеличить или, по крайней мере, не снизить производительность переплавного агрегата, необходимо вести плавку на повышенных значениях силы тока или плотности тока. Рассчитано, что увеличение диаметра электрода на 0,1 м требует опережающего увеличения силы тока не менее, чем на 1,2 кА. Разработана инженерная методика расчета оптимального сочетания трех параметров переплава: силы тока, диаметра электрода, глубины конической части жидкотяжелой ванны. Полученная методика позволяет в конкретном случае вести процесс производительнее на 7% и гарантирует качество металла в центральной части слитка.

7. Установлена зависимость глубины жидкотяжелой ванны от скорости охлаждающего теплоносителя и толщины стенки кристаллизатора. Теоретические расчеты позволяют сделать вывод, что скорость охлаждающего теплоносителя и глубина ванны находятся в обратной зависимости — увеличение скорости охлаждающей воды уменьшает глубину ванны, например, при неизменных других параметрах увеличение скорости движения воды с 0,04 м/с до 0,1 м/с глубина ванны уменьшается на 0,035 м. Расчеты по варьированию толщины стенки кристаллизатора показали слабую зависимость температурных полей и формы ванны от этого показателя, по крайней мере, увеличение толщины стенки с 19 мм до 38 мм не привело к сильно различимым результатам.

8. Выявлены дополнительные возможности увеличения выхода годного дорогостоящего металла в увеличении длины слитка, а также сокращении потерь металла в виде обрези и стружки. Полученная в данной работе математическая модель позволяет рассчитывать двумерные температурные градиенты, скорость продвижения фронта кристаллизации и расстояния между дендритными осями. На основании этих теплофизических величин рассчитывается толщина стружки, снимаемой с боковой поверхности слитка. Экспериментальные данные, полученные на промышленных агрегатах, позволили учесть влияние гарнисажной пленки как на теплообмен, так и на толщину стружки. Решена задача отыскания рациональных режимов вывода усадочной раковины, для этого базовая математическая модель была дополнена дифференциальным уравнением движения фазовой границы в направлении от верха слитка. Управление движением двух фазовых границ снизу и сверху ванны производится током переплава. В результате моделирования получена наилучшая стратегия изменения

силы тока при выведении усадочной раковины в течение одного часа: резкое снижение силы тока с рабочего значения 11 кА до 2,5 кА, при котором отсутствует наплавление слитка, далее выдержка при 2,5 кА в течение 53 минут с последующим снижением силы тока до нуля. Реализация такого управления размерами усадочной раковины и толщиной снимаемой стружки позволило сократить потери металла в виде обрези и стружки на 5%.

9. Математическое моделирование с использованием программного комплекса теплофизических процессов в ОМС, проведенное в данной работе, позволило теоретически обосновать формирование кристаллической структуры поверхностных слоев слитка, начиная с момента контакта расплава со стенкой кристаллизатора или изложницы. При движении жидкотермической среды на границе «среда – стенка» решающим условием кристаллизации сплава является динамика температурного поля как по времени, так и по радиусу и длине аппарата.

Численный эксперимент показал, что процесс зародышеобразования имеет периодический характер. При моделировании формы жидкой ванны также выявлен периодический характер формирования границы, особенно в пристеночных слоях. Колебательный характер изменения границы ванны и скорости зародышеобразования затухает на внутренних слоях. Предположение о колебательности процесса кристаллизации высказывали и другие авторы, но доказательство этого факта и его теоретическое обоснование впервые получено в данной работе.

10. Впервые реализовано моделирование динамических режимов термоусадочных явлений в многомерном пространстве. Математическое описание термонапряженного деформированного состояния слитка для осесимметричного пространства представляет собой систему дифференциальных операторов в частных производных высокого порядка, включающую: уравнения равновесия, уравнения совместности деформаций, определяющие уравнения упруговязкопластической среды, уравнения, описывающие теплообмен в движущихся средах. Введение потенциальной функции позволило несколько сократить размерность системы.

Разработан алгоритм численного решения полученной системы операторов. По результатам математического моделирования установлены зависимости напряжений по радиусу и высоте слитка в каждый момент наплавления слитка. Впервые получены оценки этих величин в критических термонапряженных точках контактного пояска твердого слитка.

В результате анализа действующих сил в корочке контактного пояска слитка у стенки кристаллизатора установлено, что ведение переплава с большим диаметром электрода приводит к уменьшению угловых напряжений σ_ϕ и радиальных деформаций Δr при конкретных значениях x , увеличению высоты пояска, улучшению условий удержания слитка на контактном пояске, уменьшению задиров и надрывов на поверхности слитка. В случае зависания

слитка на контактном поиске возникают продольные растягивающие напряжения за счет веса слитка, в 1,5 раза превышающие продольные термоапрессии.

11. Для проверки на адекватность полученных в работе математических моделей проведена серия промышленных экспериментов вакуумного дугового переплава.

Изучение тепловой работы кристаллизатора на промышленной установке позволило оценить тепловые потоки по показаниям термопар, а тем самым определить коэффициенты конвективной теплоотдачи и параметры излучения. Значения этих параметров были использованы в математических моделях.

Для установления влияния основных факторов на температуру стенки кристаллизатора – силы тока и диаметра электрода, эти величины варьировались в требуемых пределах. При переплаве электрода увеличенного диаметра температура стенки достигает 250 °C, а при переплаве обычных электродов диаметром до 300 мм не превышает 200 °C. Увеличение диаметра электрода приводит к повышению температуры стенки в зоне твердого слитка при $D_3 = 380$ мм на 5 °C, при $D_3 = 450$ мм на 15...18 °C. При изменении скорости охлаждающей воды в 60 раз от 0,025 до 1,48 м/с длина участка высокого температурного напора сужается с 1400 мм до 250 мм.

Из всей затраченной на переплав металла энергии полезные затраты составляют 66,9...72,9%, потери на нагрев электрода 0,4...1,2%, потери на излучение с электрода 5,8...11,3%, потери на излучение с ванны 6,4...16,3%, с током утечки 6,9...14,8%.

Проведена оценка глубины и формы жидкой ванны. Для фиксации ванны вводились специальные реагенты FeS , Pb , FeW . В результате этого были оценены температурные градиенты и скорости кристаллизации в поверхностных слоях слитка. Так в одном из экспериментов при расстоянии от края слитка 15 мм, скорость кристаллизации составила 0,03 мм/с, температурный градиент 34,3 К/мм, расстояние между первичными осьми 0,175 мм. Эти экспериментальные оценки процесса кристаллизации использовались при настройке математических моделей в главе IV.

В результате внедрения полученных в работе теоретических разработок удалось: получить металл с большей кристаллической однородностью; увеличить производительность переплава на 7...13%; увеличить выход годного металла в результате оптимизации технологических процессов в головной части и боковой поверхности слитка на 5% на тонну металла, что приводит к снижению энергозатрат на 14%. Результаты подтверждены актами внедрения.

Совокупность решений теплофизических задач в печах вторичного рафинирующего переплава полученных в данной работе может служить научной основой развития и совершенствования теплофизических процессов в переплавных установках в направлении оптимизации технологии и повышения качества металла.

Основное содержание диссертации изложено в статьях, монографиях и трудах конференций:

1. Потапов В.И., Ефимов П.В., Девятов Б.Н. Влияние продольного смешения теплоносителей на динамику процесса теплообмена// Автоматизация химических производств. — 1968. — Вып. 3 — С. 17–26.
2. Девятов Б.Н., Потапов В.И., Ефимов П.В. Анализ динамических характеристик трубчатых аппаратов с учетом осевого перемешивания сред// Автоматизация химических производств. — 1969. — Вып. 6. — С. 41–46.
3. Потапов В.И., Девятов Б.Н. Динамические характеристики и оптимальное управление распределенными процессами тепло-массообмена с учетом осевого смешения сред// Изв. СОАН СССР. — 1970. — Вып. 2. — № 8. — С. 110–115.
4. Потапов В.И., Девятов Б.Н. О моделировании на ЦВМ распределенных процессов в трубчатых аппаратах// Автоматизация химических производств. — 1973. — Вып. 2. — С. 53–62.
5. Потапов В.И., Девятов Б.Н. Моделирование на ЦВМ системы управления распределенными технологическими процессами с учетом профилей скоростей в потоках сред// Изв. СОАН СССР. — 1975. — № 8. — С. 94–97.
6. Анализ динамики температурного поля в капиллярнопористом теле послойной структурой/ В.И. Потапов, Б.Н. Девятов, Б.С. Чудинов, О.Г. Савицкая// Изв. СОАН СССР, вып. 3. — 1975. — № 13. — С. 69–74.
7. Анализ с помощью ЦВМ структуры послойных объектов/ Потапов В.И., Ваганов Е.А., Исаев А.С., Ефимов П.В.// Изв. СОАН СССР. — 1975. — Вып. 2. — № 8. — С. 98–103.
8. Потапов В.И. Теплообмен при фильтрации жидкости в капиллярнопористом теле с переменными параметрами системы// ИФЖ, 1977. — т. 33. — № 2 — С. 298–307.
9. Потапов В.И., Бугаев М.С. Моделирование на ЦВМ динамики теплообмена вакуумного дугового переплава// ИФЖ. — 1980. — т. 39. — № 4. — С. 758–759.
10. Исследование температурных полей при вакуумном дуговом переплаве/ Г.А. Хасин, М.С. Бугаев, В.И. Потапов, Л.М. Пучков, В.А. Дятлов// Изв. вузов. Черная металлургия. — 1981. — №4. — С. 56–59.
11. О математическом моделировании процесса формирования поверхностных слоев слитка/ Г.А. Хасин, М.С. Бугаев, В.И. Потапов и др./ Изв. вузов. Черная металлургия, 1987. — № 8 — С. 133–135.
12. Особенности кристаллизации поверхностных слоев слитков// Хасин Г.А., Потапов В.И., Ерманович Н.А. и др./ Сталь. — 1988. — №4. — С. 34–36.
13. Математическое моделирование электромагнитного перемешивания жидкокометаллической ванны/ В.И. Потапов, А.Н. Суров, И.В. Чуманов, Д.А. Пятыгин. — Челябинск: Вестник ЮУрГУ, 2003. — № 2, серия «Металлургия». — Вып. 3. — С. 40–42.
14. Потапов В.И. Уравнения тепломассообмена с учетом смешения сред// Девятов Б.Н. и др. Динамика распределенных технологических процессов

Распределенный контроль, распределенное управление. — Красноярск: Наука, 1976. — С. 24–29.

15. Потапов В.И. Расчет переходных процессов методом конечных разностей// Девятов Б.Н. и др. Динамика распределенных технологических процессов. Распределенный контроль, распределенное управление. — Красноярск: Наука 1976. — С. 62–70.

16. Потапов В.И. Математические модели теплофизических процессов при вакуумном дуговом переплаве: Монография. — Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2003. — 174 с.

17. Потапов В.И. Математические модели теплофизических процессов в объектах многослойной структуры: Монография. — Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2004. — 270 с.

18. Хорькова Т.С., Потапов В.И. Общие нелинейные уравнения противоточных теплообменных процессов// Материалы научно-технической конференции. — Красноярск: СТИ, 1969. — С. 20–24.

19. Математическое описание процессов тепло- и массообмена в туннельной сушилке/ В.И. Потапов, Г.А. Доррер, П.В. Ефимова, В.Н. Севастьянов// Материалы научно-технической конференции. — Красноярск: СТИ, 1969. — С. 301–305.

20. Ефимов П.В., Потапов В.И. Задача оптимального контроля в системе управления туннельной сушилкой// Материалы научно-технической конференции. — Красноярск: СТИ, 1969. — С. 306–309.

21. Потапов В.И. Определение параметра, характеризующего осевое перемешивание сред в технологических аппаратах по частотным и переходным характеристикам// Материалы научно-технической конференции. — Красноярск: СТИ, 1969. — С. 310–313.

22. Потапов В.И. Об одном методе решения систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка// Материалы научно-технической конференции. — Красноярск: СТИ, 1970. — С. 95–98.

23. Потапов В.И. О диффузии примесей в трубчатых аппаратах со значительными поперечными градиентами скоростей// Материалы научно-технической конференции. — Красноярск: СТИ, 1970. — С. 99–103.

24. Потапов В.И., Ефимов П.В., Ефимова Л.В. Применение ЭВМ при гамма-дефектоскопии скрытых пороков// Межвузовский сборник научных трудов. — Красноярск: 1976. С. 18–21.

25. Потапов В.И., Медведев А.В., Ефимов П.В. и др. Распознавание скрытых пороков методом радиационной дефектоскопии// В кн.: Применение вычислительной техники в автоматизированных системах обработки информации. — Новосибирск: Наука, 1977. — С. 126–129.

26. Потапов В.И., Пучков Л. М., Бугаев М.С. Математическое моделирование процесса теплообмена при вакуумном дуговом переплаве// Современные проблемы электрометаллургии стали: Тез. Доклада на IV Всесоюзной научной конференции. — Челябинск: ЧПИ, 1980. — С. 121–123.

27. Хасин Г.А., Бугаев М.С., Потапов В.И. Моделирование на ЦВМ режимов вывода усадочной раковины в слитках ВДП// Современные проблемы электрометаллургии стали: Тез. Доклада на IV Всесоюзной научной конференции — Челябинск: ЧПИ, 1980. — С. 123–125.
28. Потапов В.И. О моделировании дендритной структуры слитка ВДП// Совершенствование машиностроительных материалов, конструкций машин и методов обработки деталей. — Челябинск: ЧПИ, 1984. — С. 109–111.
29. Комаров О.А., Потапов В.И. О компьютерной оптимизации систем управления// В кн.: Сб. науч. тр. Златоустовский филиал. — Челябинск: ЧГТУ, 1996.— С. 134–136.
30. Потапов В.И. Математическое моделирование теплофизических процессов при вакуумном дуговом переплаве// Материалы II Всероссийской ФАМ 2003 конференции. — Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003. — С. 130–136.
31. Потапов В.И. Математическая модель волнового процесса кристаллизации металла// Материалы VI Международной конференции ВМТ. — Курск: 2003. — С. 112–115.
32. Потапов В.И, Сергеев Ю.В., Рябинин Т.В. Математическое моделирование массообмена в пористом электродре// Материалы VI Международной конференции ВМТ. — Курск: 2003. — С. 119–122.
33. Потапов В.И., Чуманов И.В., Пятыгин Д.А. О оптимальной скорости вращения расходуемого электрода при электрошлаковом переплаве. Международный сборник научных трудов. Современные технологии и материаловедение. — Магнитогорск: МГТУ, 2004. — С. 165–167.
34. Потапов В.И., Терещенко Ю.А., Тарасова О.Ю. Устойчивость разностной схемы системы операторов, описывающих теплообмен переплавных процессов// Тез. III Международной конференции «Математическое моделирование в образовании, науке, производстве». — Тирасполь: 2003. — С. 135–136.
35. Потапов В.И. Теплофизические процессы в электрометаллургических печах и повышение их эффективности на основе методов математического моделирования// Современные проблемы электрометаллургии стали: Материалы XII Международной конференции. — Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2004. — С. 153–156.
36. Исследование теплофизических процессов, протекающих при формировании расходуемых электродов для электрошлакового переплава с использованием металлизированных окатышей/ В.И. Чуманов, В.И. Потапов, И.В. Чуманов, В.В. Вотинов// Современные проблемы электрометаллургии стали: Материалы XII Международной конференции. — Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2004. — С. 157–159.
37. Потапов В.И., Бугаев М.С. Математическое моделирование термонапряженного состояния наплавляемого слитка вакуумного дугового переплава. Электронный журнал «Исследовано в России» (<http://zhurnal.ape.relazn.ru/articles/2004/012/pdf>).
38. Потапов В.И. Программные модули математических моделей теплофизических процессов в электропечах /Новые программные средства для

предприятий Урала: Сб. тр. регион. научно-техн. конф. — Магнитогорск: МГТУ, 2004. — Вып. 3. — С. 56–57.

39. Потапов В.И., Андрианова Р.А., Сучилина Т.В. Математическое моделирование теплофизических процессов при вакуумном двухэлектродном переплаве /Компьютерное моделирование 2004// Труды 5-й международной научно-технической конференции. — СПб.: Изд-во «Нестор», 2004. — Ч. 1 — С. 123–124.

40. Теплофизические процессы при электрошлаковом переплаве/ В.И. Потапов, Е.В. Торопов, А.Н. Суров, Р.А. Андрианова// Материалы Всероссийской науч.-тех. конф. «Теплофизика технологических процессов». — Рыбинск: Изд-во РГАТА, 2005. — С. 91–93.

41. Potapov V.I. Mathematical modeling of thermal physics processes under plasma remelting// Materials of the IV International Conference «Mathematical modeling in education, science and manufacturing 2005». — Tiraspol, 2005. — P. 209–210.

42. Математическое моделирование теплофизических процессов при электрошлаковом переплаве трубчатых электродов/ В.И. Потапов, В.Е. Рошин, Е.В. Торопов и др./// Труды второй всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». — Самара: Изд-во САМ ГТУ, 2005. — Ч. 2. — С. 208–211.