

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

М.А. Сагадеева, Л.М. Фаткуллина, О.В. Уфимцева

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: sagadeevama@susu.ru

Основной целью данной статьи является доказательство сходимости численного решения нестационарной системы леонтьевского типа с начальными-конечными условиями. Нестационарные системы леонтьевского типа возникают при исследовании динамических балансовых моделей экономики. Отметим, что нестационарность системы описывается с помощью скалярной функции, на которую умножена одна из матриц системы. Также подчеркнем, что отличительной чертой систем леонтьевского типа является вырожденность матрицы при производной по времени, что обусловлено тем, что некоторые виды ресурсов экономических систем невозможно запасти. В данной статье вместо стандартного начального условия используется начальное-конечное условие, которое для экономических систем может интерпретироваться как учет показателей не только в начальный момент времени, но и показателей, которые будут достигнуты в конечный момент времени. Ранее решение такой задачи было изучено и описано с помощью контурных интегралов. Однако, для больших систем такой вид решения не очень удобен, поэтому в данной статье предлагается описание численного решения без использования контурных интегралов, а также исследуется сходимость данного численного решения.

Ключевые слова: относительно регулярные матрицы; задача Коши; задача Шоултера–Сидорова; аппроксимации разрешающих потоков матриц; сходимость численного решения.

Введение

При построении математических моделей экономических систем и процессов широко используются балансовые модели [1,2]. Использование динамических моделей позволяет описать процесс изменения экономических показателей, установить непосредственную взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития и тем самым приблизить анализ на основе экономико-математической модели к реальным условиям развития экономической системы. Кроме того отметим, что реальные модели обычно имеют большую размерность.

Рассмотрим в \mathbf{R}^n динамическую балансовую модель в виде нестационарной системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t), \quad (1)$$

где L, M – квадратные матрицы порядка n , причем $\det L = 0$. Здесь $a : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ – скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимовлияния значений исследуемой системы, а матрица M – (L, p) -регулярна (т.е. существует $\mu \in \mathbf{C}$ такая, что $\det(\mu L - M) \neq 0$, и бесконечно удаленная точка является полюсом матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$ порядка $p \in \mathbf{N}_0$, здесь и далее $\mathbf{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbf{N}$). Вектор-функция $f : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ описывает внешние воздействия на систему. Отметим, что условие вырожденности системы $\det L = 0$ является одной из отличительных черт систем леонтьевского типа, описывающих балансовые модели экономики, так как ресурсы определенного типа запасти нельзя [2]. Кроме того заметим, что балансовые модели зачастую имеют нестационарный вид, т.е. матрицы, входящие в систему (1), зависят от времени [3].

Системы леонтьевского типа являются конечномерным аналогом уравнений соболевского типа [4–6]. Данное исследование проведено в рамках теории вырожденных разрешающих семейств операторов [5]. Нестационарные уравнения соболевского типа впервые были рассмотрены в работе [7], далее для исследования таких уравнений было предложено использовать вырож-

денные потоки операторов, которые являются аналогами разрешающих (полу)групп операторов [5] в стационарном случае. Разрешающие потоки матриц для нестационарных систем леонтьевского типа рассмотрены в работе [8].

При решении прикладных задач возникают ситуации, когда часть условий на искомую вектор-функцию нам известна в начальный момент времени, а остальные условия, в силу учета особенностей моделируемого процесса, нам известны в конечный момент времени. В таком случае адекватно рассматривать начально-конечные условия [9] для систем леонтьевского типа. Начально-конечную задачу будем рассматривать в следующем виде:

$$P_0(x(0) - x_0) = 0, \quad P_T(x(T) - x_T) = 0, \quad (2)$$

где P_0, P_T – матрицы, с помощью которых задаются условия в начальный и конечный моменты времени, а векторы $x_0, x_T \in \mathbf{R}^n$ описывают желаемые значения системы в начальный и конечный моменты времени соответственно. Начально-конечные условия могут быть применены при изучении различных математических моделей (см., например, [10–13]). Отметим, что начально-конечные условия являются обобщением [14] условий Шоуолтера–Сидорова [15], которые при исследовании вырожденных операторно-дифференциальных уравнений являются более естественными, так как снимают необходимость проверять согласование начальных данных [16].

Основной целью данной статьи является построение численного решения задачи (1), (2) без использования контурных интегралов, а также исследование сходимости этого решения. Численные решения начальных задач для систем леонтьевского типа исследуются, например, в работах [16–18].

Статья кроме введения, заключения и списка литературы содержит две части. В первой приводится необходимая информация для описания решений начальных задач для систем леонтьевского типа, для которых разрешающие семейства матриц описаны с помощью предельных переходов. Во второй части приводится основной результат статьи, а именно построено численное решение начально-конечной задачи (1), (2) и показана его сходимость к точному решению.

Решение начальных задач для нестационарной системы леонтьевского типа

Пусть L, M – квадратные матрицы порядка n , причем $\det L = 0$. Рассмотрим в \mathbf{R}^n нестационарную систему леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t), \quad (3)$$

где $a : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ – скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимодействия значений исследуемой системы, вектор-функция $x : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ искомая.

Будем называть матрицу M (L, p) -регулярной, если существует $\mu \in \mathbf{C}$ такая, что $\det(\mu L - M) \neq 0$, и бесконечно удаленная точка является полюсом матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$ порядка $p \in \mathbf{N}_0$. Этот термин является аналогом термина «регулярный пучок матриц $\mu L - M$ » К. Вейерштрасса [19].

Лемма 1 [8]. Пусть матрица M (L, p) -регулярна ($p = \overline{0, n-1}$). Тогда существуют проекторы, задаваемые с помощью матриц

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((L - \frac{1}{k} M)^{-1} L \right)^{p+1}, \quad Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(L (L - \frac{1}{k} M)^{-1} \right)^{p+1}.$$

Определение 1. Вектор-функция $x \in C^1([0; T]; \mathbf{R}^n)$ называется *решением* (3), если подстановка этой вектор-функции в уравнение (3) делает его верным тождеством. Решение $x = x(t)$ уравнения (3) будем называть *решением задачи Коши*

$$x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

для уравнения (3) (коротко, задачи (3), (4)), если оно удовлетворяет условию Коши (4) при некотором $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Определение 2. Вектор-функция $x \in C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ называется *решением* (1), если подстановка этой вектор-функции в уравнение (1) делает его верным тождеством при некоторой вектор-

функции $f : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$. Решение $x = x(t)$ уравнения (1) будем называть решением задачи Шоултера–Сидорова

$$P(x(t_0) - x_0) = 0 \tag{5}$$

для уравнения (1) (коротко, задачи (1), (5)), если оно удовлетворяет условию (5) при некотором $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Используя аппроксимации Хилле–Уиддера–Поста [20] для матриц разрешающего потока [8], получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 1 [8]. Пусть матрица M обратима и (L, p) -регулярна ($p = \overline{0, n-1}$), а функция $a \in C^{p+1}([0, T]; \mathbf{R}_+)$. Тогда для любой вектор-функции $f : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, такой что $Qf \in C([0; T]; \mathbf{R}^n)$ и $(E_n - Q)f \in C^{p+1}([0; T]; \mathbf{R}^n)$, а также для любого начального значения $x_0 \in \mathbf{R}^n$ существует единственное решение $x \in C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ задачи Шоултера–Сидорова (1), (5), которое имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} & \left[\left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_0^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right. \\ & \left. + \int_0^t \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^p f(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{q=0}^p \left(M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) L \right)^q M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{f(t)}{a(t)} \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Если дополнительно выполнено условие согласования

$$\begin{aligned} & \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) x_0 = \\ & = - \sum_{q=0}^p \left(M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) L \right)^q M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{f(t)}{a(t)} \Bigg|_{t=0}, \end{aligned}$$

то функция (6) является единственным решением задачи Коши (4) для уравнения (1).

Здесь и далее через E_n обозначена единичная матрица размера n . Отметим, что условие обратимости матрицы M в теореме 1 не является ограничительным, так как при проведении замены в системе (1) всегда можно добиться его выполнения (подробнее см. в [8]).

2. Численное решение начально-конечной задачи для нестационарной системы леонтьевского типа

Пусть L, M – квадратные матрицы порядка n , такие что $\det L = 0$, а матрица M (L, p) -регулярна ($p = \overline{0, n-1}$). Для постановки начально-конечной задачи обычно применяются спектральные проекторы [9–14], которые задаются с помощью контурных интегралов. Однако в конечномерном случае такое задание матриц-условий можно упростить. Именно, представим матрицу P из леммы 1 в виде суммы двух матриц $P = P_0 + P_T$, причем эти матрицы P_0, P_T описывают проекторы в \mathbf{R}^n , т. е. обладают теми же свойствами, что и матрица P . С помощью этих матриц задаются начально-конечные условия

$$P_0(x(0) - x_0) = 0, \quad P_T(x(T) - x_T) = 0 \tag{7}$$

с $x_0, x_T \in \mathbf{R}^n$ описывающие желаемые значения в начальный и конечный моменты времени для нестационарной системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t), \quad (8)$$

где $a : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ – скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимодействия значений исследуемой системы, вектор-функция $f : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ описывают внешние воздействия на систему. Отметим, что аналогично матрицам P_0, P_T существуют соответствующие им матрицы Q_0, Q_T , для которых также выполнено равенство $Q = Q_0 + Q_T$ для матрицы Q из леммы 1.

Определение 3. Решение $x \in C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ уравнения (8) назовем решением начально-конечной задачи (7), (8), если оно дополнительно удовлетворяет этому условию (7).

Сформулируем теорему о виде решения начально-конечной задачи для нестационарной системы леонтьевского типа.

Теорема 2. Пусть матрица M обратима и (L, p) -регулярна ($p = \overline{0, n-1}$), а функция $a \in C^{p+1}([0, T]; \mathbf{R}_+)$. Тогда для любой вектор-функции $f : [0; T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, такой что $Qf \in C([0; T]; \mathbf{R}^n)$ и $(E_n - Q)f \in C^{p+1}([0; T]; \mathbf{R}^n)$, а также для любых значений $x_0, x_T \in \mathbf{R}^n$ существует единственное решение $x \in C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ начально-конечной задачи (7), (8), которое имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} & \left[\left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_0^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k P_0 x_0 + \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_t^T a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k P_T x_T + \right. \\ & + \int_0^t \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} Q_0 f(s) ds - \\ & \left. - \int_t^T \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(r) dr \right)^{-1} L \right)^k \left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} Q_T f(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{q=0}^p \left(M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) L \right)^q M^{-1} \left(E_n - \left(\left(L - \frac{1}{k} M \right)^{-1} L \right)^{p+1} \right) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{f(t)}{a(t)} \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Справедливость данного утверждения следует из применения теоремы 1 к задаче (7), (8).

В теореме 2 через $x(t)$ обозначено точное решение задачи (7), (8), а через $x_k(t)$ – приближенное численное решение этой задачи.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда приближенное решение $x_k(t)$ начально-конечной задачи (7), (8) сходится к точному решению $x(t)$ этой задачи, причем выполнено неравенство $\|x_k(t) - x(t)\| \leq \text{const}/k$.

Доказательство. Для того, чтобы показать справедливость данного утверждения, представим решение (9) в виде $x(t) = x^1(t) + x^2(t) + x^3(t) + x^4(t) + x^0(t)$, где $x^i(t)$ – предел соответствующего слагаемого из (9). Покажем сходимость каждого из слагаемых $x_k^i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$).

При достаточно больших k для первых двух слагаемых решения имеют место неравенства

$$\|x_k^1(t) - x^1(t)\| \leq C_1/k, \quad \|x_k^2(t) - x^2(t)\| \leq C_2/k \quad (C_1, C_2 \text{ не зависят от } k),$$

которые справедливы в силу результатов из [21] для аппроксимации матриц разрешающих полугрупп. Аналогично для третьего и четвертого слагаемого, используя оценки интегралов и результатов о сходимости из [21], получим неравенства вида

$$\|x_k^3(t) - x^3(t)\| \leq C_3/k, \quad \|x_k^4(t) - x^4(t)\| \leq C_4/k,$$

где C_3, C_4 также не зависят от k . Последнее слагаемое в решении также подчинено подобной оценке.

В силу всех этих оценок мы получаем утверждение следствия.

Заключение. В дальнейшем планируется применить полученные результаты при исследовании конкретных моделей леонтьевского типа, а также для проведения вычислительных экспериментов. Кроме того, в дальнейшем можно будет перейти к исследованию многоточечных начально-конечных условий для систем леонтьевского типа.

Литература

1. McConnell, C.R. Economics: Principles, Problems, and Policies / C.R. McConnell, S.L. Brue, S.M. Flynn. – New York: McGraw-Hill, 2009. – 786 p.
2. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997. – 477 с.
3. Pospelov, I.G. Intensive Quantities in an Economy and Conjugate Variables / I.G. Pospelov // *Mathematical Notes*. – 2013. – Vol. 94, № 1. – P. 146–156.
4. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998. – 438 с.
5. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск, 2003. – 179 с.
6. Al'shin, A.V. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations / A.V. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Greyter Berlin, 2011. – 648 p.
7. Сагадеева, М.А. Исследование устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / М.А. Сагадеева. – Челябинск, 2006. – 120 с.
8. Keller, A.V. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy / A.V. Keller, M.A. Sagadeeva // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. – 2020. – Vol. 325. – P. 263–277.
9. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.
10. Zagrebina, S.A. A Multipoint Initial-Final Value Problem for a Linear Model of Plane-Parallel Thermal Convection in Viscoelastic Incompressible Fluid / S.A. Zagrebina // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2014. – Т. 7, № 3. – P. 5–22.
11. Свиридюк, Г.А. Уравнения Осколкова на геометрических графах как математическая модель дорожного движения / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, А.С. Конкина // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 148–154.
12. Sviridyuk, G.A. Multipoint Initial-Final Problem for One Class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive «White Noise» / G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyeva, S.A. Zagrebina // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 103–117.
13. Загребина, С.А. Уравнения Хоффа на графе с многоточечным начально-конечным условием / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2019. – Т. 6, № 2. – С. 54–63.
14. Загребина, С.А. Некоторые обобщения задачи Шоултера–Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5–23.
15. Свиридюк, Г.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

16. Келлер, А.В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоултера–Сидорова и численные решения / А.В. Келлер // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, Вып. 2. – С. 30–43.

17. Бурлачко, И.В. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / И.В. Бурлачко, Г.А. Свиридюк // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1677–1683.

18. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.

19. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.

20. Сагадеева, М.А. Аппроксимации вырожденных C_0 -полугрупп / М.А. Сагадеева, А.Н. Шулёпов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 133–137.

21. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 237 с.

Поступила в редакцию 13 апреля 2021 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 30–36

DOI: 10.14529/mmph210205

NUMERICAL SOLUTION TO THE INITIAL-FINAL PROBLEM FOR NON-STATIONARY LEONTIEF-TYPE SYSTEMS

M.A. Sagadeeva, L.M. Fatkullina, O.V. Ufimtseva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: sagadeevama@susu.ru

The main purpose of the paper is to prove the convergence of a numerical solution to a non-stationary Leontief-type system with an initial-final condition. Non-stationary Leontief-type systems are used in the study of dynamic balance models of the economy. Nonstationarity of systems is described using a scalar function, which is multiplied by one of the matrices of the system. The distinctive feature of Leontief-type systems is the matrix singularity at the derivative with time, which is due to the fact that some types of resources of economic systems cannot be stored. In the article, the initial-final condition is used instead of the standard initial condition, which for economic systems can be interpreted as taking into account indicators not only at the initial moment of time, but also indicators that will be achieved at the final moment of time. Previously, the solution of such a problem was studied and described using contour integrals. However, this type of solution is not very convenient for large-dimensional systems, so this article proposes a description of the numerical solution without the use of contour integrals, and also examines the convergence of this numerical solution.

Keywords: relatively regular matrices; Cauchy problem; Showalter–Sidorov problem; approximations of resolving matrix flows; convergence of the numerical solution.

References

1. McConnell C.R., Brue S.L., Flynn S.M. *Economics: Principles, Problems, and Policies*. New York, McGraw-Hill, 2009, 786 p.

2. Leontief W.W. *Input-Output Economics*. Oxford, Oxford University Press, 1986, 477 p.

3. Pospelov I.G. *Intensive Quantities in an Economy and Conjugate Variables*. Mathematical Notes, 2013, Vol. 94, no. 1, pp. 146–156. DOI: 10.1134/S0001434613070134

4. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker Inc., 2003, 239 p. DOI: 10.1201/9780203911433

5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator*. Utrecht; Boston, VSP, 2003. DOI: 10.1515/9783110915501

6. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations*. Series in Nonlinear Analysis and Applications. Walter de Gruyter & Co., Berlin De Gruyter Berlin Walter de Gruyter & Co., Berlin De Gruyter Berlin, 2011, 648 p. DOI: 10.1515/9783110255294

7. Sagadeeva M.A. *Issledovanie ustoychivosti resheniy lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* (Investigation of Solutions Stability for Linear Sobolev Type Equations. Cand. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 2006, 120 p. (in Russ.).

8. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy. In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M., Tomilov Y. (eds). *Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2020, Vol. 325, pp. 263–277. DOI: 10.1007/978-3-030-46079-2_15

9. Zagrebina S.A. The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 2, pp. 5–24. (in Russ.).

10. Zagrebina S.A. A Multipoint Initial-Final Value Problem for a Linear Model of Plane-Parallel Thermal Convection in Viscoelastic Incompressible Fluid. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 5–22. DOI: 10.14529/mmp140301

11. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Konkina A.S. The Oskolkov Equations on the Geometric Graphs as a Mathematical Model of the Traffic Flow. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 148–154. (in Russ.) DOI: 10.14529/mmp1503010

12. Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint Initial-Final Problem for one class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive “White Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, Vol. 11, no. 3, pp. 103–117. DOI: 10.14529/mmp180308

13. Zagrebina S.A., Soldatova E.A. The Hoff Equations on a Graph with the Multipoint Initial-Final Value Condition. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, Vol. 6, no. 2, pp. 54–63. DOI: 10.14529/jcem190205

14. Zagrebina S.A., Keller A.V. Some Generalizations of the Showalter–Sidorov Problem for Sobolev-type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematica Modelling, Programming & Computer Software”*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 5–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150201

15. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Zadacha Showalter–Sidorova kak fenomen uravneniy sobolevskogo tipa. (The Showalter–Sidorov problem as a Phenomena of the Sobolev type Equations). *Bulletin of Irkutsk State University. Series: “Mathematics”*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

16. Keller A.V. The Leontief Type Systems: Classes of Problems with the Showalter–Sidorov Initial Condition and Numerical Solving. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 2, pp. 30–43. (in Russ.).

17. Burlachko I.V., Sviridyuk G.A. An Algorithm for Solving the Cauchy Problem for Degenerate Linear Systems of Ordinary Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, Vol. 43, no. 11, pp. 1613–1619.

18. Sviridyuk G.A., Brychev S.V. Numerical Solution of Systems of Equations of Leontief Type. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2003, Vol. 47, no. 8, pp. 44–50. (in Russ.).

19. Gantmacher F.R. *The Theory of Matrices*. AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society, 2000, 660 p.

20. Sagadeeva M.A., Shulepov A.N. The Approximations for Degenerate C_0 -Semigroup. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, Vol. 6, no. 2, pp. 133–137. (in Russ.).

21. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa: dis. ... d-ra. fiz.-mat. nauk* (Numerical Investigation of the Optimal Control Problem for Leontief Type Models. Dr. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 2011, 237 p.

Received April 13, 2021