УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph210203

ОБ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННОГО ТИПА

А.М. Лайпанова
Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: aida7@list.ru

Как известно, уравнениями смешанного типа называются уравнения в частных производных, которые принадлежат разным типам в разных частях рассматриваемой области. Например, в одной части области уравнение может принадлежать эллиптическому, а в другой – гиперболическому типу; эти части разделены линией перехода, на которой уравнение вырождается в параболическое или не определено.

В 1923 г. итальянский математик Ф. Трикоми рассмотрел краевую задачу для одного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа (впоследствии названного его именем) в области, ограниченной в верхней полуплоскости ляпуновской кривой, а в нижней – выходящими из концов этой кривой характеристиками уравнения; краевые условия при этом ставились на кривой и на одной из характеристик. Решение должно было быть непрерывным в замыкании области, непрерывно дифференцируемым внутри нее и дважды непрерывно дифференцируемым в верхней (эллиптической) и нижней (гиперболической) подобластях; для первых производных решения допускались особенности интегрируемого порядка вблизи концов кривой. Ф. Трикоми доказал существование и единственность решения поставленной задачи в указанном классе; при доказательстве существования он свел задачу к сингулярному интегральному уравнению.

В данной статье исследован аналог задачи Трикоми для одного смешанного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка со спектральным параметром. Доказаны единственность и существование решения поставленной задачи. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование решения – методом редукции к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого вытекает из единственности решения задачи.

Ключевые слова: гиперболо-параболическое уравнение; задача Трикоми; уравнение смешанного типа; краевая задача; интегральные уравнения.

В современной концепции уравнений в частных производных (УрЧП) большое значение имеет изучение уравнений смешанного типа.

Поставим задачу. Исследуем следующее уравнение:

$$\begin{cases} u_{xxx} - u_y - \lambda_1 u = 0, y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u = 0, y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ_1, λ_2 – числовые параметры в некоторой конечной области D плоскости (x, y), образованной следующими линиями: 1) в полуплоскости $y > 0$ отрезками AA_1, BB_1, A_1B_1, лежащими на прямых $x = 0, x = 1, y = h,$ $A(0,0), A_1(0,h), B(1,0), B_1(1,h)$; 2) в полуплоскости $y < 0$ двумя характеристиками уравнения (1): $AL: x = -y,$ $BL: x - y = 1$, исходящими из определенной точки $L\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ [1].

Область D разделена на две части: $D_1 = D \cap (y > 0)$ – это параболическая часть смешанной области D; $aD_2 = D \cap (y < 0)$ – гиперболическая подобласть области D.

Задача 1. Требуется отыскать функцию $u(x,y)$, обладающую указанными свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup AA_1) \cap C^{(3,1)}_{x,y}(D_1) \cap C^2(D_2)$;

2) $u(x, y)$ является регулярным для уравнения (1) решением в области D;

3) $u(x,y)$ отвечает требованиям краевых условий:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(1,y)=\varphi_2(y),\ u_x(1,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \tag{2}$$

$$u(x,-x)=\psi(x),\ 0\le x\le \frac{1}{2}, \tag{3}$$

где $\psi(x)-$ функция, непрерывная совместно со второй производной, при этом $\psi(0)=\varphi_1(0);\ \varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \varphi_3(y)-$ данные непрерывные функции [1].

Определение. В области D для уравнения (1) *регулярным* решением вышеуказанной задачи называется всякая функция

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup AA_1)\cap C^{(3,1)}_{x,y}(D_1)\cap C^2(D_2),$$

удовлетворяющая краевым требованиям (2) и (3).

Предположим, что:

$$\lambda_1\ge(-\lambda_2)^{\frac{3}{2}},\ \lambda_1\ge-\lambda_2^3+3\lambda_2\pi^2,\lambda_1>0.$$

Можно ввести новую некоторую неизвестную функцию

$$v(x,y)=\exp(-\rho x)u(x,y), \tag{4}$$

где $\rho=\text{const}>0$.

Уравнение (1) в итоге станет таким:

$$0=L_0(\upsilon)=\begin{cases}\upsilon_{xxx}-\upsilon_y+3\rho v_{xx}+3\rho^2\upsilon_x+(\rho^3-\lambda_1)\upsilon, y>0,\\ \upsilon_{xx}-\upsilon_{yy}+2\rho\upsilon_x+(\rho^2+\lambda_2)\upsilon, y<0,\end{cases} \tag{5}$$

Теорема. *Если* $u(x,y)$ *есть регулярное решение однородной задачи 1, то при соблюдении требований 1) или 2) решение* $u(x,y)$ *в области* D *тождественно равно нулю [1].*

Доказательство. Потребуем на концах интервала $x=0$ и $x=1$ выполнения следующего дополнительного условия:

$$\lim_{x\to0+}u(x,0)\left[u_{xx}(x,0)+\rho u_x(x,0)\right]=\lim_{x\to1-0}u(x,0)\left[u_{xx}(x,0)+\rho u_x(x,0)\right]=0 \tag{6}$$

Перейдем в области D_2 к характеристическим координатам $\xi=x+y$, $\eta=x-y$. Тогда уравнение (5) при $y<0$ станет

$$L_0(\upsilon)=\upsilon_{\xi\eta}+\frac{\rho}{2}(\upsilon_\xi+\upsilon_\eta)+\frac{\rho^2+\lambda_2}{4}\upsilon=0\,, \tag{7}$$

а область D_2 будет отображена с областью $\Delta=\{(\xi,\eta)\,|\,0<\xi<\eta<\}1$.

Рассмотрим тождество

$$0=4\upsilon L_0(\upsilon)=(2\upsilon\upsilon_\eta+\rho\upsilon^2)_\xi+(2\upsilon\upsilon_\xi+\rho\upsilon^2)_\eta+(\rho^2+\lambda_2)\upsilon^2-4\upsilon_\xi\upsilon_\eta\,. \tag{8}$$

Выразим из уравнения (7) υ_ξ и в правой части (8) изменим последний член:

$$-4\upsilon_\xi\upsilon_\eta=(\frac{4}{\rho}\upsilon_\eta^2)_\xi+(2\upsilon_\eta+\frac{\rho^2+\lambda_2}{2\rho}\upsilon)^2-\frac{(\rho^2+\lambda_2)^2}{4\rho^2}\upsilon^2\,.$$

Тождество (8) перепишем в виде, учитывая последнее равенство:

$$0=4\upsilon L_0(\upsilon)=(2\upsilon\upsilon_\eta+\rho\upsilon^2+\frac{4}{\rho}\upsilon_\eta^2)_\xi+(2\upsilon\upsilon_\xi+\rho\upsilon^2)_\eta+\ (2\upsilon_\eta+\frac{\rho^2+\lambda_2}{2\rho}\upsilon)^2+\frac{(\rho^2+\lambda_2)^2(3\rho^2-\lambda_2)}{4\rho^2}\upsilon^2\,. \tag{9}$$

Взяв точку (x,x) ($0\le x\le1$) на прямой $\eta=\xi$, проведем через эту точку характеристику $\eta=x$ уравнения (7).

Через Δ_x «отметим» область, которая ограничена отрезками прямых $\eta=x,\ \eta=\xi,\ \xi=0$. По этой области Δ_x проинтегрируем тождество (9):

$$2\int_0^x\upsilon(t,0)\upsilon_y(t,0)dt=2\int_0^x\upsilon(\xi,\xi)\left[\upsilon_\xi(\xi,\xi)-\upsilon_\eta(\xi,\xi)\right]d\xi=\frac{4}{\rho}\int_0^x\ \upsilon_\eta^2(\xi,\xi)d\xi+ \tag{10}$$

$$+\int\limits_{\Delta_x}(2\upsilon_\eta+\frac{\rho^2+\lambda_2}{2\rho}\upsilon)^2 d\xi d\eta+\rho\int\limits_0^x\upsilon^2(\xi,x)d\xi+\upsilon^2(x,x)+\frac{(\rho^2+\lambda_2)^2(3\rho^2-\lambda_2)}{4\rho^2}\int\limits_{\Delta_x}\upsilon^2 d\xi d\eta\ge 0.$$

Рассмотрим в области D_1 тождество:

$$\upsilon(\upsilon_{xxx}-\upsilon_y+3\rho\upsilon_{xx}+3\rho^2\upsilon_x+(\rho^2-\lambda_1)\upsilon)=(\upsilon\upsilon_{xx}-\frac{1}{2}\upsilon_x^2+3\rho\upsilon\upsilon_x+\frac{3}{2}\rho^2\upsilon^2)_x-$$
$$-\upsilon\upsilon_y-(3\rho\upsilon_x^2+(\lambda_1-\rho^3)\upsilon^2)\equiv 0. \qquad (11)$$

Вдоль $A(\varepsilon,h)B(1-\varepsilon,h)$ ($h,\varepsilon-$ как угодно маленькие числа, большие нуля) проинтегрируем (11) по x, а потом перейдем в полученном равенстве к пределу $h\to 0$ и $\varepsilon\to 0$. Принимая во внимание условия (6), в итоге имеем равенство

$$\int\limits_0^1\upsilon(x,0)\upsilon_y(x,0)dx=-\left\{\frac{1}{2}\upsilon_x^2(1,0)+\int\limits_0^1[3\rho\upsilon_x^2(x,0)+(\lambda_1-\rho^3)\upsilon^2(x,0)]d\right\}x. \qquad (12)$$

Из неравенств (10) и

$$\int\limits_a^b z^2(x)dx\le\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2\int\limits_a^b z'^2(x)dx,$$

из (12) имеем

$$\upsilon_x^2(1,0)+2\int\limits_0^1[3\rho+\frac{(\lambda_1-\rho^3)}{\pi^2}]\upsilon_x^2(x,0)dx\le 0.$$

В (10) и (12) положим теперь $\rho=\sqrt[3]{\lambda_1}$ или $\rho=-\lambda_2$.Тогда $\upsilon(1,0)=0,\upsilon(x,0)=\mathrm{const}$. Отсюда следует, что $\upsilon(x,y)\equiv 0.$ Из выражения (4) тогда получим, что $u(x,y)\equiv 0.$

Изучим тождество в области D_1 :

$$u(u_{xxx}-u_y-\lambda_1 u)=(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2)_x-(\frac{1}{2}u^2)_y-\lambda_1 u^2\equiv 0.$$

Это тождество интегрируем по области D_1 и с учетом того, что $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=\varphi_3(0)=0$, получим:

$$-2\int\limits_{\Omega_1}[(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2)_x-(\frac{1}{2}u^2)_y-\lambda_1 u^2]dxdy\equiv\int\limits_0^1\left[u^2(x,h)-u^2(x,0)\right]dx+$$
$$+\int\limits_0^b u_x^2(1,y)dy+2\lambda_1\int\limits_{\Omega_1}u^2(x,y)dxdy=0. \qquad (13)$$

Из-за того, что $u(x,0)=0$, из формулы (13) имеем, что $u(x,h)=0$ и $u_x(1,y)=0$, однородная $u(x,y)\equiv 0,\ \forall(x,y)\in\overline{D_1}$. Задача Дарбу $u(x,0)=0,\ u(x,-x)=0$ в области D_2 для уравнения (1) при $y<0$ имеет только тривиальное решение $u(x,y)=0$, $\forall(x,y)\in\overline{D_2}$. Значит, $u(x,y)\equiv 0$ в D.

После этого докажем существование решения задачи 1. Для этого нужно перейти к лимиту (пределу) при $y\to 0+$ в уравнении (1) и принять к сведению краевые условия (2), [1]:

$$\tau'''(x)-\lambda_1\tau(x)=v(x), \qquad (14)$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\tau(1)=\varphi_2(0),\tau'(0)=\varphi_3(0), \qquad (15)$$

где $\tau(x)=u(x,0),v(x)=u_y(x,0)$.

Применяя трёхкратное интегрирование к равенству (14) и принимая во внимание (15), составим функциональное соотношение между $\tau(x)uv(x)$, принесенное из части D_1 на $y=0$:

$$\tau(x)-\frac{\lambda_1}{2}\int\limits_0^x(x-t)^2\tau(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^x(x-t)^2v(t)dt+\frac{1}{2}\tau''(0)x^2+\varphi_3(0)x+\varphi_1(0), \qquad (16)$$

где

$$\tau''(0) = -\lambda_1 \int_0^1 (1-t)^2 \tau(t)dt - \int_0^1 (1-t)^2 \nu(t)dt - 2\varphi_3(0) - 2\varphi_1(0) + 2\varphi_2(0).$$

Заранее предполагая, что правая сторона равенства (16) известна и равна выражению $q(x)$, имеем интегральное уравнение Вольтерра второго рода для $\tau(x)$ [1]:

$$\tau(x) = q(x) + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \tau(t)dt \,. \qquad (17)$$

После обращения уравнения (17) имеем:

$$\tau(x) = q(x) + \lambda \int_0^x R(x,t) q(t)dt \,, \qquad (18)$$

где $R(x,t)$ есть резольвента ядра $(x-t)^2, \lambda = \frac{\lambda_1}{2}$.

Принимая в расчет значение $q(x)$ в (18), получаем

$$\tau(x) = \int_0^x M(x,t)\nu(t)dt + \tau''(0)[\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda}{2}\int_0^x R(x,t)t^2 dt] + \varphi_3(0)\,[x + \lambda\int_0^x R(x,t)tdt] + \varphi_1(0)[1 + \lambda\int_0^x R(x,t)dt]\,, \qquad (19)$$

где

$$M(x,t) = \frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{\lambda}{2}\int_t^x R(x,t_1)(t_1 - t)^2 dt_1]. \qquad (20)$$

Теперь принесём из гиперболической части D_2 на линию $y = 0$ функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Чтобы его получить, проанализируем для уравнения (1) при $y < 0$ решение задачи Коши $\tau(x) = u(x,0), \nu(x) = u_y(x,0)$. Следуем [2]:

$$u(x,y) = \frac{\tau(x-y) + \tau(x+y)}{2} + \frac{\sqrt{\lambda_2}\,y}{2}\int_{x-y}^{x+y} \frac{I_1(\sqrt{\lambda_2\left[y^2 - (x-\xi)^2\right]})}{\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}}\tau(\xi)d(\xi) + $$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} I_0(\sqrt{\lambda_2\left[y^2 - (x-\xi)^2\right]})\nu(\xi)d\xi, \qquad (21)$$

где $I_0(z)$ и $I_1(z)$ – функции Бесселя мнимого аргумента нулевого и первого порядков.

Если (21) удовлетворит краевому условию (3), то получится интегральное уравнение типа Вольтера

$$\tau(x) = \overline{\rho}(x) - \int_0^x \tau(\xi)\frac{x}{\xi}\frac{\partial}{\partial x} I_0(\sqrt{\lambda_2 \xi(x-\xi)})d\xi, \qquad (22)$$

где

$$\overline{\rho}(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi(0) + \int_0^x I_0(\sqrt{\lambda_2 \xi(x-\xi)})\nu(\xi)d\xi.$$

Предполагая $\overline{\rho}(x)$ известной и применяя формулу обращения для уравнение типа (22), будем иметь [1]:

$$\tau(x) = \int_0^x J_0(\sqrt{\lambda_2}(x-t))\nu(t)dt + g(x), \qquad (23)$$

где

$$g(x) = -\int_0^x \psi'\left(\frac{t}{2}\right) J_0[\lambda_2 \sqrt{x(x-t)}]dt. \qquad (24)$$

Принимая во внимание значение $\tau''(0)$, равенство (19) перезапишем так:

$$\tau(x)=\int_0^x M(x,t)v(t)dt+\int_0^1 Q(x,t)\tau(t)dt+\int_0^1 \Im(x,t)v(t)dt+\tilde{g}(x), \tag{25}$$

где

$$Q(x,t)=\lambda_1\Im(x,t);\Im(x,t)=-\frac{1}{2}(x^2+\lambda\int_0^x R(x,t)t^2dt)(1-t)^2;$$

$$\tilde{g}(x)=(\varphi_2(0)-\varphi_1(0)-\varphi_3(0))(x^2+\lambda\int_0^x R(x,t)t^2dt)+\varphi_3(0)(x+\lambda\int_0^x R(x,t)tdt+\varphi_1(0)(1+\lambda\int_0^x R(x,t)dt).$$

Из (23) и (25) «устраним» $\tau(x)$. Тогда получим для нахождения $v(x)$ интегральное уравнение первого рода:

$$\int_0^x J_0(\sqrt{\lambda_2}(x-t))v(t)dt=\int_0^x M(x,t)v(t)dt+\int_0^1 \tilde{Q}(x,t)v(t)dt+h(x), \tag{26}$$

$$\tilde{Q}(x,t)=\Im(x,t)+\int_t^1 Q(x,t_1)J_0(\sqrt{\lambda_2}(t_1-t))dt_1;\ h(x)=\int_0^1 Q(x,t)g(t)dt+\tilde{g}(x)-g(x).$$

Так как в смысле гладкости резольвента $R(x,t)$ поступает также, как ядро $(x-t)^2$, то учитывая свойства заданных функций $\varphi_i(y), i=\overline{1,3}, \psi(x)$, функции $M(x,t),Q(x,t)$ непрерывны совместно с частными производными первого порядка по аргументам x ut; $h(x)$ непрерывна вместе с производной в областях своего определения, притом что $M(x,x)=0, J_0(0)=1$.

Найдя производную по аргументу x от уравнения (26), приходим к смешанному интегральному уравнению. Обратим его, как интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$v(x)=\int_0^1 \Gamma(x,t)v(t)dt+h_1(x), \tag{27}$$

где ядро $\Gamma(x,t)$ и его правая часть $h_1(x)$ выражаются в терминах резольвенты $R(x,t)$ ядра $(x-t)^2$ и данных функций $\varphi_i(y), i=\overline{1,3}, \psi(x)$, при том $\Gamma(x,t)\in C([0,1]\times[0,1]), h_1(x)\in C[0,1]$.

Как видно, выражение (27) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Из единственности решения исходной задачи вытекает разрешимость этого уравнения. Таким образом, функцию $v(x)$ можно определить из уравнения (27). Далее, найдя функцию $v(x)$, в области D_2 по формуле (21) определим решение $u(x,y)$ задачи, а в D_1 как решение уравнения (1) при $y>0$ с краевыми условиями (2) и $u(x,0)=\tau(x)$.

Решение задачи (1) и (2), $u(x,0)=\tau(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, согласно [1]:

$$u(x,y)=u_0(x,y)-\frac{\lambda_1}{\pi}\int_0^1 d\xi\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)z(\xi,\eta)d\eta, \tag{28}$$

$$u_0(x,y)=\frac{1}{\pi}\Bigg\{\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+\int_0^1 G_{\xi}(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\Big\}\xi,$$

где $G(x,y\xi,\eta)$ есть функция Грина краевой задачи (1), (2), $u(x,0)=\tau(x)$ уравнения

$$u_{xxx}-u_y=0. \tag{29}$$

Эта вышеупомянутая функция Грина $G(x,y\xi,\eta)$ описывается посредством фундаментальных решений (29):

$$u(x,y\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{3}}}f\left(\dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right), y>\eta,\\ 0, y\le\eta,\end{cases}\quad v(x,y\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{3}}}\bar{\varphi}\left(\dfrac{x-\xi}{(y-\eta)}\right), y>\eta,\\ 0, y\le\eta,\end{cases}$$

$$f(z)=\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{3}}\left[I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}z^{\frac{3}{2}}\right)+I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}z^{\frac{3}{2}}\right)\right],\ \bar{\varphi}(z)=\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{3}}\left[I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}z^{\frac{3}{2}}\right)-I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}z^{\frac{3}{2}}\right)\right],$$

где $I_v(z)$ – функция Бесселя. Функции $f(z)$ и $\bar{\varphi}(z)$ именуются функциями Эйри и удовлетворяют уравнению $t''(z)+zt(z)/3=0$.

В [2] рассмотрена однозначная разрешимость уравнения (28), а по формуле (21) можно решить задачу Коши.

При вышесказанных предположениях относительно λ_1 и λ_2, а именно при $\lambda_1\ge(-\lambda_2)^{\frac{3}{2}}$, $\lambda_1\ge-\lambda_2^3+3\lambda_2\pi^2, \lambda_1>0$ исследована однозначная разрешимость поставленной задачи для смешанного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка со спектральным параметром.

Литература

1. Лайпанова, А.М. Локальные и нелокальные краевые задачи для смешанных уравнений гиперболо-параболического типа второго и третьего порядков: дисс. … канд. физ.-мат. Наук / А.М. Лайпанова. – Нальчик, 2003. – 70 с.

2. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.

Поступила в редакцию 25 января 2021 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 17–23

DOI: 10.14529/mmph210203

ON ANALOGUE OF THE TRIKOMI PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

A.M. Laipanova
Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation
E-mail: aida7@list.ru

It is commonly known that equations of mixed type are partial differential equations that belong to different types in different parts of the domain under consideration. For example, the equation may belong to the elliptic type in one part of the domain and to the hyperbolic type in another one; these parts are separated by a transition line, at which the equation degenerates into parabolic or undefined.

In 1923, the Italian mathematician F. Tricomi considered a boundary value problem for one equation of mixed elliptic-hyperbolic type (later named after him) in a domain bounded in the upper half-plane by the Lyapunov curve, and in the lower half-plane by the characteristics of the equation that emerge from the ends of this curve; the boundary conditions were then set on the curve and on one of the characteristics. The solution had to be continuous in the closure of the domain, continuously differentiable within it, and twice continuously differentiable in the upper (elliptic) and lower (hyperbolic)

subdomains; for the first derivatives of the solution, singularities of integrable order were allowed near the ends of the curve. Tricomi proved the existence and uniqueness of the solution to the problem in the specified class; when proving the existence, he reduced the problem to a singular integral equation.

The article studies an analogue of the Tricomi problem for a third-order hyperbolic-parabolic equation of mixed type with a spectral parameter. The uniqueness and existence of a solution to the problem are proved. The uniqueness of the solution to the problem is proved by the method of energy integrals, and the existence of the solution is proved by the method of reduction to the Fredholm integral equation of the second kind, the solvability of which follows from the uniqueness of the solution to the problem.

Keywords: hyperbolic-parabolic equation; Tricomi problem; equation of mixed type; boundary value problem; integral equations.

Reference

1. Laypanova A.M. *Lokal'nye i nelokal'nye kraevye zadachi dlya smeshannykh uravneniy giperbolo-parabolicheskogo tipa vtorogo i tret'ego poryadkov. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* (Local and non-local boundary value problems for mixed hyperbolic-parabolic equations of the second and third orders. Cand. phys. and math. sci. diss.). Nal'chik, 2003, 70 p.

2. Dzhuraev T.D. *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* (Boundary Value Problems for Mixed and Mixed-Composite Equations). Tashkent, Fan Publ., 1979, 238 p. (in Russ.).

Received January 25, 2021