

АЛГОРИТМЫ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ В ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БАРЕНБЛАТТА–ЖЕЛТОВА–КОЧИНОЙ

Е.А. Солдатова¹, А.В. Келлер^{1,2}

¹ Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация,

² Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация

E-mail: soldatovaea@susu.ru

Исследуется модель динамики давления фильтрующейся в трещиновато-пористой среде жидкости со случайным внешним воздействием, в ее основе лежит задача Коши–Дирихле для стохастического уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной. Представлен алгоритм численного исследования и обработки информации, предусматривающий получение как вырожденного, так и невырожденного уравнения. В статье дается описание алгоритма численного решения задачи Коши–Дирихле для стохастического уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной, в основе которого лежит метод Галеркина. Численное исследование стохастической модели предполагает получение и обработку результатов n экспериментов при различных значениях случайной величины, в том числе, относящихся к редким событиям. Основными теоретическими результатами, позволившими провести данное численное исследование, являются методы теории вырожденных групп операторов и теории уравнений соболевского типа. Алгоритмы представлены схемами, позволяющими построить на их основе блок-схемы программ для проведения вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: Модель Баренблатта–Желтова–Кочиной; численное исследование; алгоритм; стохастическое уравнение соболевского типа.

Введение

Уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной [1] с последующей редукцией к уравнению соболевского типа при различных условиях исследовалось, например, в [2, 3]. Развитие методов теории уравнений соболевского типа и теории вырожденных (полу)групп, заложенных в [4], позволило начать аналитические исследования стохастических уравнений соболевского типа и стохастической модели Баренблатта–Желтова–Кочиной [5, 6], затем были начаты разработки и численных методов для ее исследования [7].

Для исследования стохастической модели Баренблатта–Желтова–Кочиной введем в рассмотрение вещественные сепарабельные гильбертовы пространства

$A = \left\{ u \in W_2^2(D) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial D \right\}$, $\mathfrak{F} = W_2(D)$; ограниченную область $D \subset \mathbb{R}^m$ с границей ∂D класса

C^∞ . Будем искать $\eta = \eta(x, t)$, удовлетворяющую в цилиндре $D \times [0, T]$, $T \in \mathbb{R}$, уравнению

$$Ld\eta = M\eta dt + Ndw, \quad (1)$$

условию Дирихле

$$\eta(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial D \times [0, T] \quad (2)$$

и условию Коши

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x). \quad (3)$$

Здесь операторы $L, M \in \mathcal{L}(U; F)$ такие, что $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta$, параметр $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют среду, а через dw обозначен обобщенный дифференциал (\mathcal{U} – значного, ядерного) К–винеровского процесса. Случайный процесс

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) \varphi_k, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

называется K -винеровским процессом, где $\{\lambda_k\}$ – последовательность собственных значений оператора K , занумерованных по невозрастанию с учетом их кратности. Если след оператора K $TrK = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$, то оператор K называется ядерным. Кроме того $\{\beta_k(t)\}, t \in \overline{\mathbb{R}_+}$ – последовательность независимых одномерных винеровских процессов.

Отметим, что исследования стохастических уравнений и стохастических уравнений соболевского типа с использованием (полу)группового подхода и методов производных в среднем ведутся отечественными и зарубежными учеными [8–13]. Кроме того, активно развиваются качественные и количественные исследования задачи восстановления динамически искаженного сигнала при наличии помех «белый шум» [14, 15].

Модель (1)–(3) описывает динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде.

В первой части статьи приведем аналитическое решение задачи (1)–(3), во второй части приведем алгоритм ее численного решения модифицированным методом Галеркина, в третьей части приведем алгоритм численного исследования и обработки информации, получаемой в результате различных вычислительных экспериментов.

Аналитическое решение

Аналитическое исследование модели (1)–(3) приведем, следуя результатам в [16]. Прежде всего, отметим условия на параметры λ и α , которые позволяют использовать теорию относительно ограниченных операторов

Лемма 2.1. При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. оператор $M(L, 0)$ -ограничен.

В качестве K возьмем оператор Грина однородной задачи Дирихле $\Delta u(x) = 0$, $x \in \partial D$ для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ в области D . В этом случае собственные значения $\{\mu_k\}$ спектральной задачи $-\Delta \phi_k = \mu_k \phi_k$ в области D имеют асимптотику

$$\mu_k \sim k^2, k \rightarrow \infty,$$

в этом случае оператор Грина будет ядерным.

Следуя теории относительно ограниченных операторов и порождаемых ими вырожденных групп [4] отметим, что пространства \mathcal{U} и \mathcal{F} представимы в виде прямых сумм $\mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1 = \mathcal{U}$ and $\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$, операторы $L_k(M_k)$ есть сужение операторов $L(M)$ на \mathcal{U}^k ($\text{dom } M \cap \mathcal{U}^k$), $k = 0, 1$. Если оператор $M(L, 0)$ -ограничен, то операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$; $M_0 \in Cl(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$; существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$. Обозначим $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$.

Пусть оператор $N \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1)$. Тогда задача (1), (3) распадается на две независимые задачи

$$Hd\eta^0 = \eta^0 dt, \eta^0(0) = \eta_0^0, \quad (4)$$

$$d\eta^1 = S\eta^1 dt + L_1^{-1}Ndw, \eta^1(0) = \eta_0^1, \quad (5)$$

где случайные процессы $\eta^0 = (I - P)\eta$, $\eta^1 = P\eta$, а случайные величины $\eta_0^k \in L_2(\Omega, \mathcal{U}^k)$, $k = 0, 1$, где Ω – полное вероятностное пространство, P – проектор.

Уравнение в (5) имеет единственное, причем п. н. тривиальное, решение, значит, задача (4) разрешима только при нулевом значении η_0^0 , а для разрешимости задачи (1), (3) необходимо, чтобы начальное значение η_0 п. н. принадлежали пространству $L_2(\Omega, \mathcal{U}^1)$. Обратимся к задаче (5) и перейдем к стохастическому интегро-дифференциальному уравнению

$$\eta^1 = \int_0^t S \eta dt + \int_0^t L_1^{-1} N dw.$$

Тогда единственным формальным решением будет случайный процесс

$$\eta^1(t) = U^t \eta_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} N dw(s)$$

или после преобразований

$$\eta^1(t) = U^t \eta_0 + L_1^{-1} N w(t) + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} N w(s) ds, \quad (6)$$

где U^t строится аналогично детерминированному случаю [4]:

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.1. Пусть оператор M $(L, 0)$ -ограничен, $w \in L_2^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathfrak{F}^1)$ – \mathfrak{F}^1 -значный Квинеровский процесс, оператор $N \in L(\mathfrak{F}^1)$. Тогда для любого $\eta_0 \in L_2(\Omega, \mathfrak{M}^1)$, независимых с w при каждом фиксированном t существует единственное решение задачи (1), (3) вида (6).

Алгоритм численного решения задачи Коши–Дирихле

Для численного исследования в качестве случайного воздействия будем рассматривать задачу Коши–Дирихле

$$p(r_0, t) = 0, \quad |p(0, t)| < +\infty, \quad p(r, 0) = p_0(r) \quad (7)$$

для уравнения

$$(\lambda - \Delta_r) p_t = \alpha \Delta_r p + w(r, t), \quad (8)$$

где $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

Для нахождения приближенного решения будем использовать представление

$$p(r, t) = p^N(r, t) = \sum_{k=1}^N p_k(t) \phi_k(r) \quad (9)$$

где N нужно брать таким, чтобы $\mu_N < \lambda$, чтобы учесть эффекты вырожденности уравнения. Если внешние возмущения случайны, то решение задачи (7), (8) будем искать потраекторно.

Прежде всего необходимо сгенерировать случайный процесс, для чего используем генератор случайных чисел, тогда

$$w(r, t) = \sum_{k=1}^N A_k \sin(\omega t) \phi_k(r) \quad (10)$$

Подставим в уравнение (8) представления для приближенного решения (9), получим

$$\sum_{k=1}^N (\lambda + \mu_k) p_k(t) \phi_k(r) = -\alpha \sum_{k=1}^N \mu_k p_k(t) \phi_k(r) + w(r, t), \quad (11)$$

затем умножим уравнение скалярно на собственные функции $\phi_k(r)$, $k = 1, \dots, N$. В результате получим систему N уравнений

$$\begin{cases} (\lambda + \mu_1) \dot{p}_1(t) = -\alpha \mu_1 p_1(t) + \langle w(r, t), \phi_1 \rangle \\ \dots \\ (\lambda + \mu_N) \dot{p}_N(t) = -\alpha \mu_N p_N(t) + \langle w(r, t), \phi_N \rangle \end{cases} \quad (12)$$

В зависимости от значения λ уравнения в (12) могут получаться либо дифференциальными первого порядка, либо алгебраическими.

I. Если $\lambda \notin \sigma(-\Delta)$, то все уравнения (12) будут обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Для решения этой системы относительно $p_k(r)$, $k = 1, \dots, N$ условие Коши умножаем скалярно на собственные функции $\varphi_k(r)$, $k = 1, \dots, N$, найдем N начальных условий. Затем полученная система с найденными начальными условиями решается, таким образом, находятся коэффициенты $p_k(r)$, $k = 1, \dots, N$ в приближенном решении (9)

II. Нам больше интересуют случаи $\lambda \in \sigma(-\Delta)$. Предположим, что $\lambda = \mu_{q_1} = \mu_{q_2} = \dots = \mu_{q_r}$, где r – кратность собственных значений μ_q . Уравнения (12), которые соответствуют им, будут алгебраическими, а остальные обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Отдельно решается система алгебраических уравнений относительно p_{q_j} , $j = 1, \dots, r$ без использования начальных условий, в результате чего получаем тривиальное решение (см п. 1). Затем решается система оставшихся обыкновенных дифференциальных уравнений.

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи Коши–Дирихле для стохастического уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной сводится к следующим этапам:

1. Находятся собственные значения и собственные функции для оператора $-\Delta$.
2. Находится значение N из условия $\mu_N < \lambda$.
3. Проверка по заданному параметру λ , к какому случаю относится математическая модель – I или II. Отметим, что в случае I могут применяться различные численные методы, например [8].
4. Вычисление приближенного решения при заданном начальном условии, используя метод Галеркина.

Алгоритм численного исследования и обработки информации

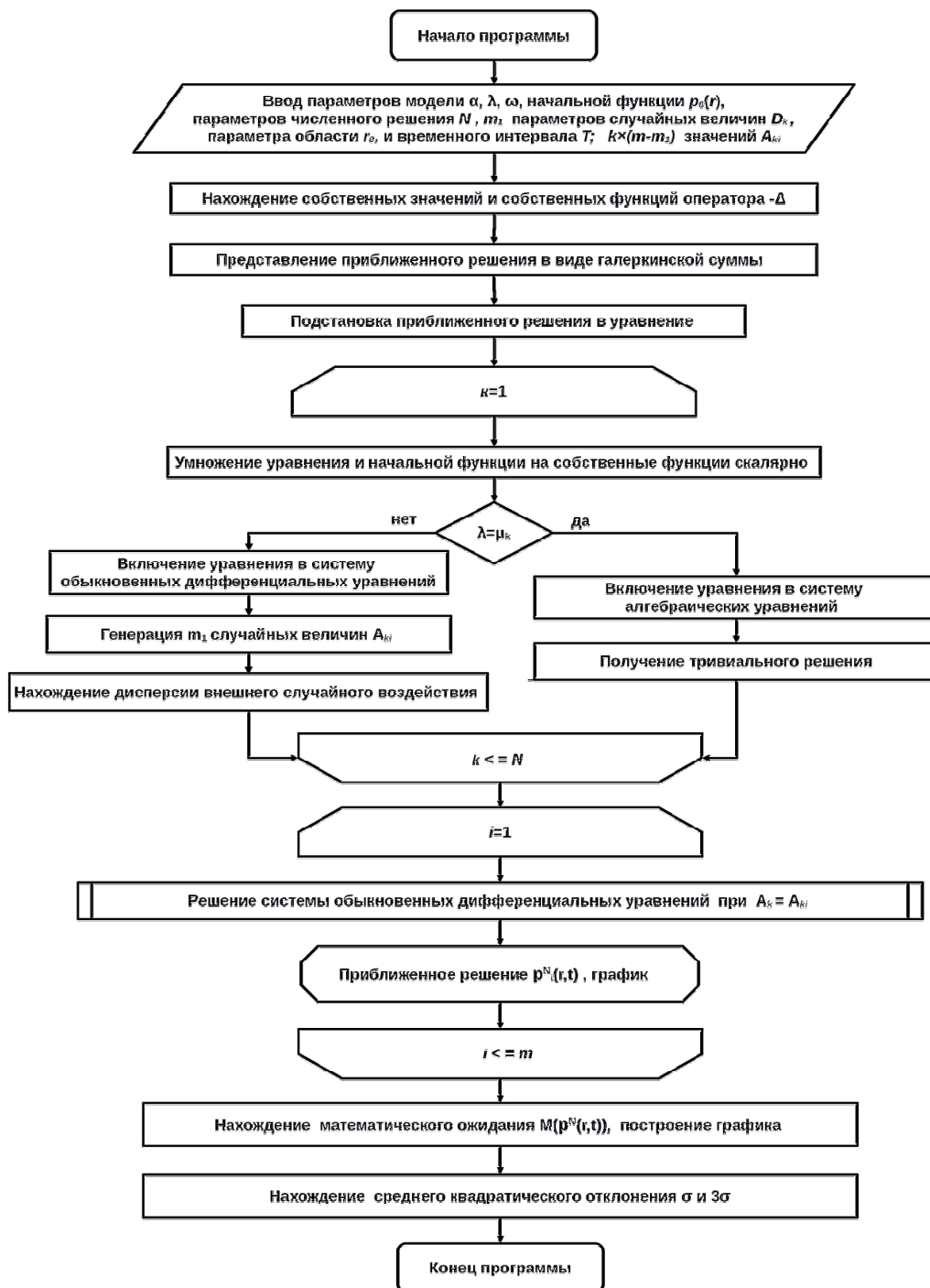
В основе алгоритма численного исследования стохастической модели Баренблатта–Желтова–Кочиной лежит численное решение задачи Коши–Дирихле (7), (8). Исследование стохастической модели предполагает проведение m вычислительных экспериментов, из которых в первой группе (m_1 эксперимент) для моделирования внешнего воздействия используется генератор нормально распределенной случайной величины с заданными параметрами математического ожидания и дисперсии, а во второй группе ($m - m_1$ экспериментов) моделируется внешнее воздействие при значении случайной величины, вероятность которого крайне мала. Для первой группы экспериментов генерируются A_{ki} из (10), где $i = 1, \dots, m_1$ – номер вычислительного эксперимента, для второй группы задаются A_{ki} из (10), где $i = m_1 + 1, \dots, m$, исходя из физических свойств случайного воздействия как редкого события. Для этого задаются математическое ожидание $M(A_{ki}) = 0$, $uD(A_{ki}) = D_k$.

Алгоритм численного исследования стохастической модели Баренблатта–Желтова–Кочиной представлена на рисунке. После генерации случайных величин реализуются первые три этапа численного решения задачи Коши–Дирихле для стохастического уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной (см. п. 2). Для последующей обработки результатов запускается цикл по i , что позволяет в одной программе обработать результаты m экспериментов.

Затем идут вычисления необходимых характеристик случайных процессов. Представление случайного внешнего воздействия как (10) имеет вид канонического разложения случайного процесса. Случайные величины A_k называются коэффициентами разложения, а функции $\psi_k(t) = \sin(\omega t)\varphi_k(r)$ – координатными функциями разложения. В этом случае ковариационная функция и дисперсия имеют вид

$$K(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^N D_k \psi_k(t_1) \psi_k(t_2), D(t) = K(t, t), \quad (13)$$

Кроме того, так как все A_k являются гауссовыми с математическим ожиданием $m_k = 0$ и дисперсией D_k , то математическое ожидание внешнего воздействия будет равно нулю, а дисперсия определяться по (13).



Алгоритм численного исследования стохастической модели Баренблатта–Желтова–Кочинной

Математическим ожиданием является неслучайная функция $M(p(r,t))$, которая при любом значении t равна математическому ожиданию соответствующего сечения, т. е. представляет собой усредненную траекторию (реализацию), полученную в результате обработки m_1 экспериментов. Дисперсией и средним квадратическим отклонением будут являться неслучайные функции $D(p(r,t))$ и $\sigma(t)$, которые при любом значении t равны дисперсии и среднему квадратическому отклонению соответствующего сечения случайного процесса. В результате с вероятностью $0,997 \left\| p(r,t) - M\tilde{p}(r,t) \right\| < 3\sigma(t)$.

При проведении второй группы экспериментов целью является моделирование системы, ее реакции на случайное воздействие, относящееся к редким событиям.

Варьирование параметров модели, характеризующих среду, внешнего случайного воздействия позволят на основе вычислительных экспериментов получить совокупность результатов, обработка которых методами системного анализа, позволит сделать качественные выводы о системах, моделируемых уравнением Баренблатта–Желтова–Кочиной.

Литература

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Приклад. математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.
2. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Вестник Магнитогорского государственного университета. – 2003. – № 4. – С. 129.
3. Умаров, Х.Г. Явный вид решения смешанной задачи в анизотропном полупространстве для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной / Х.Г. Умаров // Владикавказский математический журнал. – 2013. – Т. 15, вып. 1. – С. 51–64.
4. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4(298). – С. 47–74.
5. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для стохастической модели Баренблатта–Желтова–Кочиной / С.А. Загребина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 103–111.
6. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies in Barenblatt–Zhelotov–Kochina Model in Spaces of Differential Forms with «Noise» / O.G. Kitaeva, D.E. Shafranov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 47–57.
7. Kadchenko, S.I. Numerical Research of the Barenblatt–Zhelotov–Kochina Stochastic Model / S.I. Kadchenko, E.A. Soldatova, S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 117–123.
8. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive «White Noise» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyayeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – Т. 15, № 1. – С. 185–196.
9. Favini, A. Linear sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of «noises» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – P. 697410.
10. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of «Noises» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, M. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 13, no. 6. – P. 4607–4621.
11. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018, no. 128. – P. 1–10.
12. Мельникова, И.В. Уравнения, связанные со случайными процессами: полугрупповой подход и преобразование Фурье / И.В. Мельникова, У.А. Алексеева, В.А. Бовкун // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2021. – Т. 67, № 2. – С. 324–348.
13. Гликлих, Ю. Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю. Е. Гликлих // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 24–34.
14. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.V. Keller, A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Y.V. Khudyakov // Semigroups of operators – theory and applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – Springer, Cham, 2015. – С. 183–195.
15. Zamyshlyayeva, A.A. Stochastic Model of Optimal Dynamic Measurements / A.A. Zamyshlyayeva, A.V. Keller, M.B. Syropiatov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2018. – Vol. 11, no. 2. – С. 147–153.
16. Солдатова Е.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно р-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / Е.А. Солдатова, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – Т. 6, Вып. 1. – С. 20–34.

Поступила в редакцию 18 октября 2021 г.

Сведения об авторах

Солдатова Екатерина Александровна – старший преподаватель, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: soldatovaea@susu.ru

Келлер Алевтина Викторовна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация; ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Неклассические уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: alevtinak@inbox.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 4, pp. 29–36

DOI: 10.14529/mmph210404

ALGORITHMS AND INFORMATION PROCESSING IN NUMERICAL RESEARCH OF THE BARENBLATT–ZHELTOV–KOCHINA STOCHASTIC MODEL

E. A. Soldatova¹, A. V. Keller^{1,2}

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

² Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: soldatovaea@susu.ru

The paper investigates a model of pressure dynamics of a liquid filtered in a fractured-porous medium with random external action. It is based on the Cauchy–Dirichlet problem for the Barenblatt–ZheltoV–Kochina stochastic equation. An algorithm for numerical research and information processing is presented, which provides for obtaining both degenerate and non-degenerate equations. The article describes an algorithm for the numerical solution of the Cauchy–Dirichlet problem for the Barenblatt–ZheltoV–Kochina stochastic equation, which is based on the Galerkin method. Numerical study of the stochastic model implies obtaining and processing the results of n experiments at various values of a random variable, including those related to rare events. The main theoretical results that have made it possible to conduct this numerical study are the methods of the theory of degenerate groups of operators and the theory of Sobolev-type equations. Algorithms are represented by schemes that allow to build flowcharts of programs on their basis, for conducting computational experiments.

Keywords: Barenblatt–ZheltoV–Kochina equation; numerical research; algorithm; Sobolev-type stochastic equation.

References

1. Barenblatt, G.I., ZheltoV, Iu.P., Kochina, I.N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks [strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, Vol. 24, Iss. 5, pp. 1286–1303. DOI: 10.1016/0021-8928(60)90107-6
2. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Barenblatt–ZheltoV–Kochina Equation on the Graph. *Bulletin of the Magnitogorsk State University*, 2003, no. 4, p. 129.
3. Umarov Kh.H. An Explicit Form of the Solution of a Mixed Problem in an Anisotropic Half-Space for the Barenblatt–ZheltoV–Kochina Equation. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2013, Vol 15, no. 1, pp. 51–64.
4. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390
5. Zagrebina S.A. Multipoint Initial-Final Problem for the Barenblatt–ZheltoV–Kochina Stochastic model. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics"*, 2013, Vol. 13, no. 4, pp. 103–111.
6. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Exponential Dichotomies in Barenblatt–ZheltoV–Kochina Model in Spaces of Differential Forms with "Noise". *Bulletin of the South Ural State Univer-*

city. *Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 47–57. DOI: 10.14529/mmp190204

7. Kadchenko S.I., Soldatova E.A., Zagrebina S.A. Numerical Research of the Barenblatt–Zheltoy–Kochina Stochastic Model. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2016, Vol. 19, no. 2, pp. 117–123. DOI: 10.14529/mmp160211

8. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185

9. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “Noises”. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, no. 697410. DOI: 10.1155/2015/697410

10. Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of “Noises”. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, Vol. 13, no 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x

11. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, Vol. 2018, no. 128, pp. 1–10.

12. Melnikova I.V., Alekseeva U.A., Bovkun V.A. Equations related to stochastic processes: semi-group approach and Fourier transform, Contemporary Mathematics. *Fundamental Directions*, 2021, Vol. 67, no. 2. pp. 324–348. DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-324-348

13. Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2012, no. 27 (286), Iss. 13, pp. 24–34.

14. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. *Semigroups of operators – theory and applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, Springer, Cham, 2015, pp. 183–195. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1

15. Zamyshlyayeva A.A., Keller A.V., Syropiatov M.B. Stochastic Model of Optimal Dynamic Measurements. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2018, Vol. 11, no. 2, pp. 147–153. DOI: 10.14529/mmp180212

16. Zagrebina S.A., Soldatova E.A. The linear Sobolev-type Equations With Relatively p-bounded Operators and Additive White Noise. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2013, Vol. 6, no. 1, pp. 20–34.

Received October 18, 2021

Information about the authors

Soldatova Ekaterina Aleksandrovna, Senior Lecturer, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: soldatovaea@susu.ru

Keller Alevtina Viktorovna, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation; Leading researcher of the Research Laboratory “Non-classical equations of mathematical physics”, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: alevtinak@inbox.ru