Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического и функционального анализа

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедры математического моделирования ЮУрГУ
_____ /М.А. Сагадеева/
«10» 06 2016 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н., доцент
_____ /В.Л. Дильман/
«06» 06 2016 г.

Приближённое вычисление собственных чисел одного возмущенного оператора

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 010100.62. 2016. 12-031-1881. ВКР

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент
_____ /Г.А. Закирова/
«06» 06 2016 г.

Автор, студент группы ММиКН-471
_____ /Л.М. Фаткуллина/
«06» 06 2016 г.

Нормоконтролер, к.ф.-м.н., доцент
_____ /М.А. Корытова/
«06» 06 2016 г.

Челябинск 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра математического и функционального анализа

Факультет «Математика, механика и компьютерные науки»
Кафедра «Математический и функциональный анализ»
Направление «Математика»

Утверждаю,
заведующий кафедрой
_____ /В.Л. Дильман/
«06» 06 2016 г.

Задание

студентке группы ММиКН-471
Фаткуллиной Ляйсан Маратовне на выполнение
выпускной квалификационной работы
по направлению 010100.62 - МАТЕМАТИКА

1. Тема выпускной квалификационной работы "Приближённое вычисление собственных чисел одного возмущенного оператора"
(Утверждена приказом по университету от «15» апр. 2016г. №661)
2. Тема работы (проект) Приближённое вычисление собственных чисел одного возмущенного оператора
3. Срок сдачи студенткой законченной работы 3 июня 2016 г.
4. Перечень вопросов, подлежащих разработке
   1. Введение.
   2. Спектр и резольвента дифференциальных операторов.
   3. Спектральное тождество для линейных самосопряжённых операторов.
   4. Проблема собственных чисел.
   5. Численные методы нахождения собственных чисел линейного дифференциального оператора.
   6. Метод Галеркина.
   7. Сходимость метода Галеркина.
   8. Алгоритм вычисления собственных чисел возмущенного оператора.
   9. Заключение.

5. Календарный план

Наименование этапов-выпускной квалификационной работы	**Срок выполнения этапов работы**	**Отметка о выполнении руководителя**
Постановка задачи нахождения собственных чисел линейного возмущенного дифференциального оператора	22.10.2015	выполнено
Спектральное тождество для линейных самосопряжённых операторов	10.11.2015	выполнено
Метод Галёркина для вычисления собственных чисел	16.12.2015	выполнено
Сходимость метода Галёркина для вычисления собственных чисел	16.01.2016	выполнено
Подготовка текста дипломной работы	18.01.2016-24.04.2016	выполнено

Руководитель работы (проекта) _____/Г.А.Закирова

Студент(ка) _____/Л.М.Фаткуллина

УДК 517.9

Фаткуллина Л.М.

Приближённое вычисление собственных чисел одного возмущенного оператора.

Л.М. Фаткуллина. — Челябинск, 2016. — 34 с.

Решены задачи нахождения собственных чисел для дискретного возмущенного оператора; на основе метода Галёркина разработан алгоритм и реализована программа для нахождения собственных чисел одного уравнения соболевского типа; доказана сходимость метода Галёркина в применении к задаче нахождения собственных значений..

Список лит.—23 назв., рисунков – 1.

Содержание

Введение 6

1 Основные определения и утверждения 9

2 Постановка задачи 15

3 Спектральное тождество для относительных резольвент возмущенного и невозмущенного оператора 18

4 Метод Галёркина для нахождения собственных чисел 21

5 Блок схема 24

6 Вычислительный эксперимент 25

7 Сходимость метода Галёркина 28

Заключение 30

Библиографический список 31

Введение

В настоящее время большое значение приобретает вопрос о нахождении собственных чисел и собственных векторов. Это послужило предпосылкой к созданию новых численных методов нахождения собственных характеристик для широкого класса абстрактных операторов. Аналитическая теория собственных значений возникла благодаря замеченной аналогии между рассматриваемыми вопросами теории краевых задач математической физики с алгебраической задачей преобразования квадратичных форм [17].

Исследование спектральных свойств дифференциальных операторов с частными производными является одной из важнейших задач общей спектральной теории линейных операторов. Эта область обязана своим развитием конкретным задачам физики, химии, биологии и других естественных наук. Так при рассмотрении колебаний мембраны и трехмерных упругих тел мы приходим к простейшим задачам на собственные значения для многомерных дифференциальных операторов [15]. Подобные задачи возникают также в теории оболочек, гидродинамике и других разделах механики [3]. Кроме того, богатейшим источником задач спектральной теории является квантовая механика [1].

В связи с рассмотрением задач квантовой механики возникло значительное число работ по спектральной теории дифференциальных операторов [10], [11]. Для математического изложения квантовой механики необходимым было исследование новых разделов спектральной теории линейных операторов, в том числе, построение спектральной теории неограниченных самосопряженных операторов. С развитием квантовой механики, стала весьма актуальна проблема численного нахождения собственных чисел сингулярных операторов [4], [12]. Аналитически собственные значения энергии

вычисляются лишь для некоторых модельных задач. Конечно же, далеко не все задачи решаются точно, поэтому становится необходимым разработка численных методов [13].

В начале тридцатых годов прошлого столетия А.Н. Крыловым был представлен метод нахождения собственных значений и собственных векторов матриц. Для определения собственных векторов матрицы необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов характеристического полинома. Работа А.Н. Крылова явилась первой в большом цикле работ, посвященных преобразованию векового уравнения к полиномиальному виду. Похожим на метод А.Н. Крылова является метод, предложенный Самуэльсоном. Для вычисления коэффициентов характеристического полинома нужно составить прямоугольную матрицу. Составление матрицы требует $n(n-1)2$ умножений.

В конце тридцатых годов прошлого столетия был предложен еще один метод А.М. Данилевским, метод вычисления собственных значений и собственных векторов. Этот метод является одним из самых экономичных среди многих методов построения собственного многочлена матрицы. В основе метода лежит преобразование векового определителя к нормальному виду Фробениуса [17].

После выхода в свет работ Г. Вейля и Э.Ч. Титчмарша [23], [22] все большее число исследований было связано с распределением собственных значений многомерных дифференциальных операторов с дискретным спектром. Один из сформировавшихся методов получения асимптотики спектра — вариационный принцип [20]. Второй метод — резольвентный, разработанный в 1950-х гг. В.А. Садовничим и В.В. Дубровским. Основная идея резольвентного метода заключается в изучении резольвенты рассматриваемого оператора или другой функции от него с последующим использо-

ванием тауберовых теорем. С этим методом связаны наибольшие достижения последних лет в области спектральных асимптотик. Кроме вычисления асимптотики были получены и формулы регуляризованных следов, формулы для вычисления собственных чисел возмущенного оператора Лапласа, исследуемые обратные случаи задачи.

Постановка задачи рассмотрим операторы $T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2$, P — оператор умножения на комплексную функцию p.

Целью работы является вычисление собственных чисел возмущенного оператора $T + P$.

В соответствии с поставленной целью выделены следующие **задачи:** доказательство спектрального тождества, построения алгоритма нахождения и разработке программы для вычисления собственных чисел возмущенного оператора.

Структура выпускной квалификационной работы: в 1-ом параграфе приведены основные определения и утверждения; во 2-ом постановка задачи; в 3-ем параграфе сформулировано спектральное тождество для возмущенного и невозмущенного оператора; а в 4-7-ых параграфах описан метод Галеркина, для него построена блок схема, в таблицах приведены результаты и доказана сходимость метода Галеркина.

1 Основные определения и утверждения

Определение 1.1 *Линейным пространством* $V = \{a, b, c, \dots\}$ *называется множество, относительно элементов которого определены операции сложения и умножения на число, причем результаты этих операций принадлежат этому же множеству (говорят, что* V *замкнуто относительно операций сложения и умножения на число):*
$a + b \in V$;
$\lambda a \in V$, $\forall \lambda \in R$.

Определение 1.2 *Линейное пространство все функций* φ, *суммируемых на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в области* Ω, *имеющих в области* Ω *все обобщенные производные порядка* l, *суммируемые в степени* $p \geq 1$, *назовем пространством Соболева* W_p^l:

$$\frac{\partial^l \varphi}{\partial^{(}\alpha_1)x_1 \dots \partial^{(}\alpha_n)x_n} \in L_p(\Omega), \ \sum \alpha_i = l.$$

Определение 1.3 *Гильбертово пространство — множество* H *элементов* f, g, h, $\dots$, *обладающее следующими свойствами:*
1) H *представляет собой линейное пространство, то есть в* H *определены действия сложения элементов и умножения их на число (действительное или комплексное);*
2) в H *введено скалярное произведение, то есть числовая функция* (f, g) *от пары аргументов* f *и* g, *удовлетворяющая аксиомам:*
а) $(af, g) = a(f, g)$ *для любого числа* a;
б) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$;
в) $(f, g) = \overline{(g, f)}$;
г) $(f, f) > 0$ *при* $f \neq 0$, $(f, f) = 0$ *при* $f = 0$;
3) H *является полным метрическим пространством относительно*

расстояния $\rho(f,g) = \|f-g\|$, *где для любого элемента* $h \in H$ *его норма определяется из соотношения* $\|h\| = (h,h)^{1/2}$.

Определение 1.4 *Решения уравнения*

$$Af = \lambda_1 f,$$

λ_1 *— фиксировано, образуют подпространство* H_{λ_1}. *Его размерность называется кратностью собственного значения* λ_1, *а подпространство называется собственным подпространством, отвечающим собственному значению* λ_1.

Определение 1.5 $L^p(\Omega)$ *— пространства Лебега, пространства измеримых функций, таких, что их* p*-я степень интегрируема, где* $p \geq 1$.

Определение 1.6 $W_p^l(\Omega)$ *— пространства Соболева. Функциональное пространство, состоящее из функций из пространства Лебега* (L^p), *имеющих обобщённые производные заданного порядка из* L^p. *При* $1 \leq p \leq \infty$ *пространства Соболева являются банаховыми пространствами, а при* $p = 2$ *— гильбертовыми пространствами. Для гильбертовых пространств Соболева также принято обозначение* H^k.

Определение 1.7 $C^k[a;b]$ *— пространство* k *раз непрерывно дифференцируемых на* $[a;b]$ *функций с нормой*

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a;b]} \mid x^{(i)}(t) \mid .$$

Определение 1.8 *Сепарабельное пространство — гильбертово пространство, в котором существует счетное всюду плотное множество, т.е. такое множество, замыкание которого по метрике* H *совпадает со всем пространством* H.

Определение 1.9 *Множество $M \subset L$ называется компактным, если из любой его последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Множество называется предкомпактным, если его замыкание компакт.*

Определение 1.10 *Оператор A, действующий из $V \to P$ (P — поле), называется линейным, если для любых элементов x_1, x_2 пространства V и любого комплексного числа λ выполняются соотношения:*
1°. $A\lambda(x_1 + x_2) = \lambda A(x_1) + \lambda A(x_2)$ (свойство аддитивности оператора);
2°. $A\lambda x = \lambda Ax$ (свойство однородности оператора).

Определение 1.11 *Собственным вектором для оператора A называется такой ненулевой вектор $\vec{x} \in V$, который под действием A переходит в пропорциональный вектор*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

где λ — коэффициент пропорциональности (скаляр из поля P), который называется собственным значением оператора A.

Определение 1.12 *Отображение A линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 над полем P называется линейным оператором (обозначение $A : L_1 \to L_2$), если выполнены следующие аксиомы:*
1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$ для любых x и y из L_1;
2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ для любого $x \in L_1$ и любого $\alpha \in P$.
Если $L_1 = L_2 = L$, то A называется линейным оператором в пространстве L. Множество D_A всех тех $x \in L_1$, для которых отображение A определено, называется областью определения оператора A.

Определение 1.13 *Оператор A^* называется сопряженным к линейному ограниченному оператору A, если для всех $f, g \in H$, где H — гильбертово*

пространство, выполнено равенство

$$(Af, g) = (f, A^*g).$$

Определение 1.14 *Если линейный ограниченный оператор совпадает со своим сопряженным, то он называется (самосопряженным)*

Определение 1.15 *Оператор A ограничен, если существует такая постоянная C, что для всякого $f \in L_1$*

$$\|Af\| \leq C\|f\|.$$

Определение 1.16 *Наименьшее из чисел C, удовлетворяющих этому неравенству, называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$.*

Определение 1.17 *Оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, называется дискретным, если существует некоторое комплексное число λ_0 такое, что $R_{\lambda_0} = (T - \lambda_0 E)^{-1}$ является вполне непрерывным оператором в H.*

Определение 1.18 *Каждый элемент, удовлетворяющий уравнению*

$$Af = \lambda f,$$

где λ — число, $f \neq 0$ называется собственным вектором (собственной функцией) оператора, а λ — собственным значением.

Определение 1.19 *Множество всех собственных значений оператора A называется спектром этого оператора и обозначается $\sigma(A)$.*

Определение 1.20 *Спектральное множество — такое подмножество спектра $\sigma(A)$, которое одновременно открыто и замкнуто в его относительной топологии.*

Определение 1.21 *Множество всех значений λ, не являющихся регулярными, называется спектром оператора A.*

Пусть A — произвольный вполне непрерывный оператор. Построим оператор $B = AA$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность отличных от нуля его собственных значений, а через $\{f_k\}$ — ортонормированную последовательность его собственных векторов, отвечающих числам λ_k. Тогда получим, что

$$\lambda_k = (Af_k, Af_k) = s_k^2$$

Определение 1.22 *Числа s_k будем называть s—числами оператора A.*

Определение 1.23 *Оператор A называется ядерным, если сходится ряд из его s — чисел.*

Определение 1.24 *Резольвента линейного оператора. Пусть A — линейный оператор. Тогда его резольвентой называется операторная функция*

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1},$$

λ — собственное число, I — тождественный оператор.

Определение 1.25 *Рассмотрим оператор $A - \lambda E = B(\lambda)$. Допустим, что для некоторого λ оператор $A - \lambda E$ имеет обратный $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$. Оператор R_λ называется резольвентным оператором (резольвентой) для оператора A.*

Определение 1.26 *Значения λ, при которых R_λ существует, определен на всем пространстве и ограничен, называются регулярными значениями оператора A (или принадлежащими резольвентному множеству оператора A).*

Определение 1.27 $\rho^L(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - T)^{-1} \in \mathcal{L}(F;U)\}$ *— резольвентное множество оператора T относительно оператора L.*

Определение 1.28 $R_0(\mu) = (\mu L - T)^{-1}$ *— L-резольвента оператора T;*

Определение 1.29 $R(\mu) = (\mu L - T - P)^{-1}$ *— L-резольвента оператора $T + P$;*

Теорема 1.1 *Если оператор $T = A_0^{-1}K$ вполне непрерывен в H_0, то процесс Бубнова-Галёркина в задаче об отыскании собственных значений сходится [8].*

2 Постановка задачи

Рассмотрим операторы $T, L : U \to F$, заданные формулами

$$T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2, \quad L = a^2 - \Delta, \ \Delta = \frac{d^2}{dx^2}, \tag{1}$$

причем

$$U = \{u \in W_2^{k+2}(0,\pi) : u(x) = 0, x \in (0,\pi)\},$$

$$F = W_2^k(0,\pi), k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$\mathrm{dom}T = \left\{u \in W_2^{k+2}(0,\pi) : u''(0) = u''(\pi) = 0\right\} \cap U.$$

Пусть P — оператор умножения умножения на функцию $p \in C^2(0,\pi)$.

Рассмотрим оператор $T + P$. Обозначим через $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma^L(T+P)$ — где ν_n занумерованы в порядке невозрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности.

Поставим следующую задачу: найти L — собственные числа возмущенного оператора $T + P$.

Рассмотрим операторы T и L, заданные формулой (1).

Очевидно, что

$$\mu_n = \lambda_n \frac{\beta\lambda_n - \alpha}{\lambda_n - a^2}, \tag{2}$$

где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma(\Delta)$ — собственные числа оператора Лапласа, порожденного краевой задачей Дирихле:

$$\Delta u = a^2 u, \quad u(0) = u(\pi) = 0,$$

$$\lambda_n = -n^2.$$

Для оператора L имеем :

$$L\varphi_s = (a^2 - \Delta)\varphi_s = (a^2 - \lambda_s)\varphi_s = \begin{cases} (a^2 - \lambda_s)\varphi_s, & a^2 \neq \lambda_s,\ \lambda_s = -n^2, \\ 0, & a^2 = \lambda_s,\ a^2 \neq -n^2, \end{cases}$$

поэтому:

$$R_0^L(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu-\mu_s}, & a^2 \neq \lambda_s \\ 0, & a^2 = \lambda_s \end{cases},\ R_0^L(\mu)\varphi_s = \begin{cases} \frac{\varphi_s}{\mu-\mu_s}, & a^2 \neq \lambda_s \\ 0, & a^2 = \lambda_s \end{cases},$$

$$R_0(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{(\mu-\mu_s)(a^2-\lambda_s)}, & a^2 \neq \lambda_s \\ \frac{1}{\beta a^4 - \alpha a^2}, & a^2 = \lambda_s \end{cases},\ R_0(\mu)\varphi_s = \begin{cases} \frac{\varphi_s}{(\mu-\mu_s)(a^2-\lambda_s)}, & a^2 \neq \lambda_s \\ \frac{\varphi_s}{\beta a^4 - \alpha a^2}, & a^2 = \lambda_s \end{cases}.$$

Операторы $R_0(\mu), R_0^L(\mu), \mu \in \rho(T)$, являются ядерными, поскольку ряды из собственных чисел данных операторов сходятся.

Положим $\gamma_n = \{\mu : |\mu - \mu_n| = r_n,\ \ r_n = n\beta - \frac{\beta}{2}\}$.

Лемма 2.1 *Если при $\mu \in \gamma_n$ $\|PR_0(\mu)\| = q < 1$, то справедливо равенство*

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu) \tag{3}$$

Доказательство:

Рассмотрим тождество

$$\mu L - T - P = (\mathbb{I} - pR_0(\mu))(\mu L - T).$$

Так как $\|PR_0(\mu)\| < 1$, то существует линейный ограниченный оператор

$$R(\mu) = (\mu L - T - P)^{-1} = R_0(\mu)(\mathbb{I} - pR_0(\mu))^{-1}.$$

Из этого соотношения следует, что $R(\mu) = R_0(\mu)B(\mu)$, где $B(\mu)$ — некоторый ограниченный оператор. Поскольку T — дискретный оператор, то

$R_0(\mu)$ является вполне непрерывным, следовательно, $R(\mu)$ есть также вполне непрерывный оператор, т. е. оператор $T+P$ является дискретным. Из последнего соотношения также следует, что $R(\mu)$ — ядерный оператор, для которого справедливо разложение в сходящийся по норме ряд:

$$R(\mu) = R_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty}[R_0(\mu)P]^k R_0(\mu),$$

отсюда, домножив предыдущее тождество на L слева, получим

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty}[R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu).$$

Лемма 2.2 *Пусть $\mu \in \rho^L(T)$, тогда выполняется следующая оценка:*

$$\|LR_0(\mu)\| \leq \frac{1}{\rho(\mu, \sigma^L(T))}, \tag{4}$$

здесь $\rho(\mu, \sigma^L(T))$ означает расстояние от точки μ до L — спектра оператора T.

Доказательство:

Пусть $\lambda \in \rho^L(T)$. Из [21] известно представление L — резольвенты оператора T в виде ряда Неймана

$$R_0(\lambda) = R_0(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^k(LR_0(\mu))$$

Очевидно, что ряд в правой части абсолютно сходится, по крайней мере для тех λ, которые удовлетворяют условию $|\lambda-\mu| < \frac{1}{\|LR_0(\mu)\|}$.

Отсюда получим

$$\|LR_0(\mu)\| \leq \frac{1}{\rho(\mu, \sigma^L(T))}$$

3 Спектральное тождество для относительных резольвент возмущенного и невозмущенного оператора

Рассмотрим норму разности проекторов Рисса

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}(R(\mu)-R_0(\mu))d\mu\right\| \le \int_{\gamma_n}\|R_0(\mu)P\|\cdot\|R(\mu)\||d\mu| <$$

$$< \int_{\gamma_n}\|R_0(\mu)L\|\cdot\|R(\mu)\||d\mu| < 1,$$

поэтому все корневые подпространства оператора $T+P$ имеют такую же размерность, что и оператор T, следовательно, спектр оператора $T+P$ будет однократным. Рассмотрим ряд (5)

$$LR(\mu) = LR_0(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty}[R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu).$$

Умножим правую и левую части данного равенства на $\frac{\mu}{2\pi i}$ и проинтегрируем полученное равенство по контуру γ_n. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu LR(\mu)d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu LR_0(\mu)d\mu + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu[R_0(\mu)P]^k LR_0(\mu)d\mu.$$

Найдем матричный след от обеих частей полученного равенства, при этом воспользуемся ядерностью операторов T и $T+P$.

$$Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu LR_0(\mu)d\mu = Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k}{\mu-\mu_k}d\mu = \mu_n SpP_n =$$

$$= \mu_n\sum_{s=1}^{\infty}(P_n\varphi_s,\varphi_s) =$$

$$= \mu_n\sum_{s=1}^{\infty}\Big((\varphi_s,\varphi_n)\varphi_n,\varphi_s\Big) = \mu_n\sum_{s=1}^{\infty}\Big((\varphi_s,\varphi_n)(\varphi_n,\varphi_s)\Big) = \mu_n.$$

Аналогично

$$Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu LR(\mu)d\mu=\nu_n.$$

Для оценок поправок теории возмущений используем следующую лемму:

Лемма 3.1 *При $\mu\in\gamma_n$, тогда справедлива следующая оценка*

$$\|R_0(\mu)\|=O(n^{-2})$$

Оценим l-тую поправку теории возмущений.

$$|\alpha_n^l|=|Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu(R_0(\mu)P)^lLR_0(\mu)d\mu|=\frac{1}{2\pi l}|\int_{\gamma_n}Sp(PR_0)^ld\mu|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi l}\int_{\gamma_n}|Sp(PR_0)^l|*|d\mu|\leq\frac{1}{2\pi l}\int_{\gamma_n}\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)^l\|_1|d\mu|=$$

$$=\frac{1}{2\pi l}\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR)^l\|_1\int_{\gamma_n}|d\mu|\leq\frac{r_n}{l}\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)^{l-2}\|*\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)^2\|_1\leq$$

$$\leq\frac{r_n}{l}\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)^{l-2}\|\cdot\max_{\mu\in\gamma_n}\|(PR_0)\|_2^2\leq\frac{r_n\|P\|^l}{l}\max_{\mu\in\gamma_n}\|R_0\|^{l-2}\cdot\max_{\mu\in\gamma_n}\|R_0\|_2^2=$$

$$=\frac{r_n\|P\|^l}{l}\cdot\frac{1}{r_n^{l-2}}\cdot\max_{\mu\in\gamma_n}\|R_0\|_2^2=O(n^{1-l}).$$

При $l\geq 3$ ряд $\sum_l|\alpha_n^l|$ сходится. Оценим сумму данного ряда.

$$\sum_{l=3}^{\infty}|\alpha_n^l|=\sum_{l=3}^{\infty}\frac{O(1)}{n^{l-1}}=\frac{O(1)}{n^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{O(1)}{n^l}=\frac{O(1)}{n^2(1-\frac{1}{n})}=O(n^{-2}).$$

Вычислим первую поправку теории возмущений, используя равенства (3), (4):

$$\alpha_n^1=Sp\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu R_0(\mu)PLR_0(\mu)d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu Sp(R_0(\mu)PLR_0(\mu))d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\mu\sum_{s=1}^{\infty}(R_0(\mu)PLR_0\varphi_s,\varphi_s)d\mu=$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \mu \sum_{s=1}^{\infty}(PR_0^2(\mu)L\varphi_s, \varphi_s)d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \mu \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(P\varphi_s, \varphi_s)}{(\mu-\mu_s)^2(a^2-\lambda_s)}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{\infty}(P\varphi_s, \varphi_s)\int_{\gamma_n} \frac{\mu}{(\mu-\mu_s)^2(a^2-\lambda_s)}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(P\varphi_n, \varphi_n)\int_{\gamma_n} \frac{\mu}{(\mu-\mu_n)^n(a^2-\lambda_n)}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(P\varphi_n, \varphi_n)\int_{\gamma_n} \frac{\mu d\mu}{(\mu-\mu_n)^2(a^2-\lambda_n)} = \frac{(P\varphi_n, \varphi_n)}{a^2-\lambda_n}$$

Вычислим $(P\varphi_n, \varphi_n)$. В качестве $\{\varphi_n\}$ возьмем ортонормированный набор собственных функций оператора Лапласа, занумерованный по невозрастанию собственных значений λ_k с учетом их кратности.

$$(P\varphi_n, \varphi_n) = \int_0^{\pi} p(x)\varphi_2^n(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\sin^2(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)(\frac{1-\cos(2nx)}{2})dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\cos(2nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi} p'(x)\sin(2nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \frac{1}{4\pi n^2}\int_0^{\pi} p''(x)\cos(2nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p''(x)\cos(2nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{pi} p(x)dx + O(n^{-2}).$$

Теорема 3.1 *Если выполнены условия*

1. $p'(0) = p'(\pi)$

2. $\|P\| < \frac{\beta}{2}$

3. $p(x) \in C^2_{[0,\pi]}$

тогда справедливо:

$$\nu_n = \mu_n + \frac{2}{\pi(a^2-\lambda_n)}\int_0^{\pi} p(x)dx\Big] + O(n^{-4}).$$

4 Метод Галёркина для нахождения собственных чисел

Применение.

Метод Галёркина давно применяется как для решения дифференциальных уравнений с частными производными, так и для формирования основы метода конечных элементов.

Г.И. Петровым метод Галеркина был применен к исследованию задач устойчивости гидродинамических течений было реализовано, при этом было доказана сходимость метода Галёркина для отыскания собственных значений широкого класса уравнений, включая уравнения для консервативных систем, такие, как например уравнения колебаний в вязкой жидкости[14].

Кроме того, метод Галёркина эффективно работает в гидродинамике (в задачах о конвекции, задачи распространения коротких импульсов или визуализации полей, а также при решении задач рассеяния поля на самолёте во временной области, распространение импульсов электромагнитных полей и через ноутбук, удар молнии в танк)[16], [18].

Алгоритм метода Галёркина:

Первым шагом в реализации метода Галёркина является выбор набора базисных функций:

- удовлетворяют граничным условиям ;
- в пределе бесконечного количества элементов базиса образуют полную систему.

Часто применяются тригонометрические функции, ортогональные полиномы (полиномы Лежандра, Чебышёва, Эрмита и др.).

Условие ортогональности:

$$\begin{cases} \int\limits_a^b U_i(x)U_j(x)dx = 0, i \neq j, \\ \int\limits_a^b U_i(x)U_j^2(x)dx \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что при выборе базисных функций условие ортогональности не является обязательным, если подобрать коэффициенты из условия минимальности интеграла $\int\limits_a^b R^2(x, c_1, c_2, ..., c_n)dx$.

Так, например, взяв за основу полную систему функций,ортогональных на отрезке $[a, b]$, можно выбрать в качестве базисных функций линейные комбинации функций из этой системы. Достаточно лишь,чтобы выбранные функции были линейно независимы на отрезке $[a, b]$.

Решение представляется в виде разложения по базису:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x).$$

Затем приближённое решение подставляется в исходное дифференциальное уравнение, и вычисляется его невязка:

$$L[\sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x)] = N(x).$$

Далее выдвигается требование ортогональности невязки к базисным функциям, то есть:

$$\int\limits_a^b N(x)\Phi_k(x)dx = 0.$$

Отсюда получается однородная система уравнений для коэффициентов в разложении, и удаётся приближённо найти *собственные значения задачи.*

По мере увеличения N — членов метода Галёркина, числа членов в приближённом представлении решения, точность выражения собственных значений низшего порядка быстро возрастает, тогда как точность выражения

собственных значений высших порядков быстро снижается. Если учесть, что определяющее уравнение является самосопряжённым и положительно определённым, собственные значения, вычисленные по методу Галёркина, всегда будут получаться больше точных собственных значений.

5 Блок схема

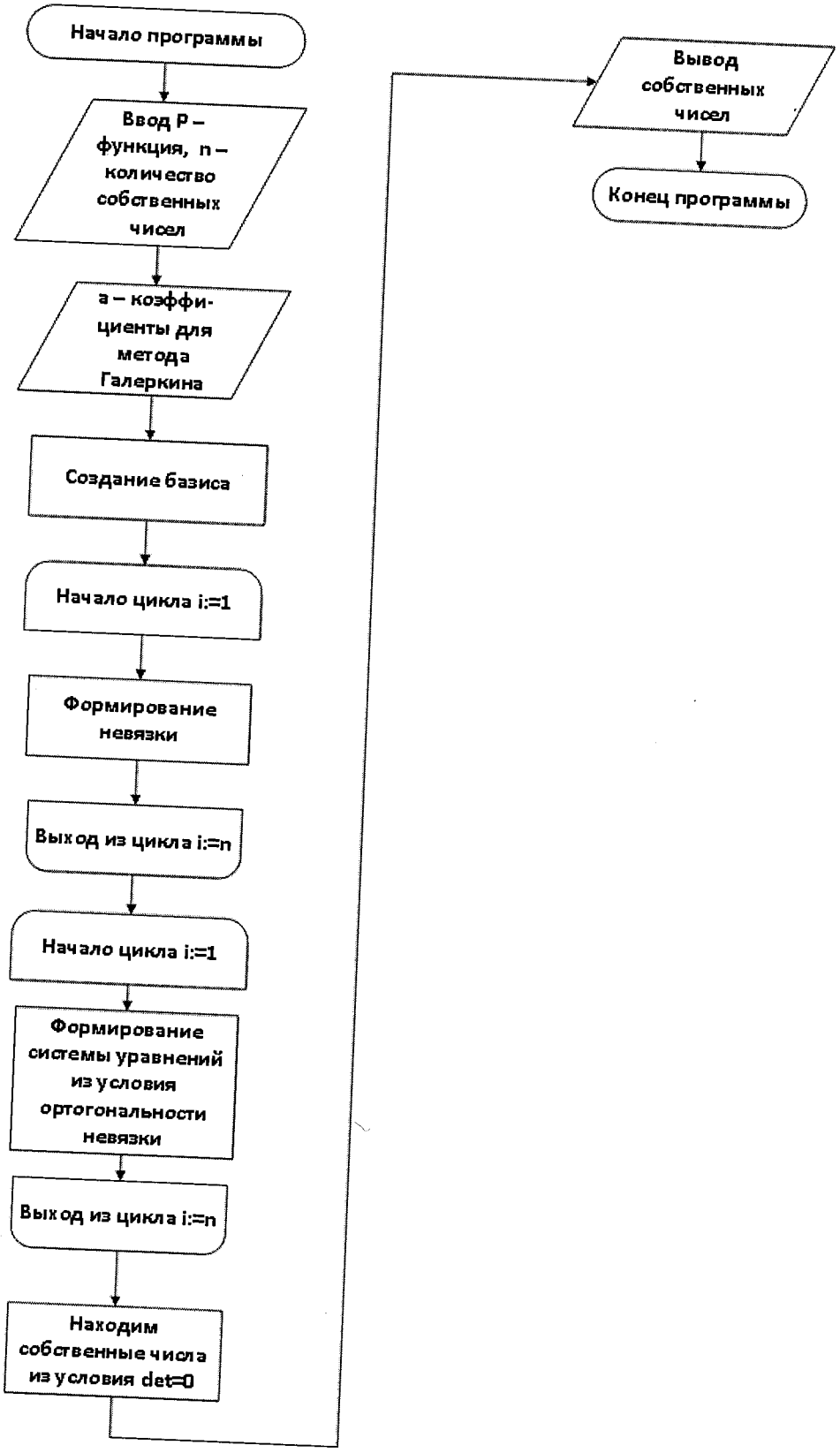

Рис. 1. Блок-схема алгоритма численного решения задачи (1)

6 Вычислительный эксперимент

Результат численного решения системы дифференциальных уравнений, с учетом начальных условий предоставлен в таблице.

Таблица I.

n	λ_{n_1} — по формуле	λ_{n_2} — по методу Галеркина	$\lvert\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2}\rvert$
1	-0.80000000	-0.800037333763	0.3733376310^{-4}
2	-2.33333333	-2.333657900986	0.32457098610^{-3}
3	-4.28571429	-4.285098763246	0.61552675410^{-3}
4	-6.50000000	-6.500897654325	0.89765432510^{-3}
5	-8.88888889	-8.888765433467	0.12345653310^{-3}
6	-11.4000000	-11.40086265794	0.86265794110^{-3}
7	-14.0000000	-14.00899654356	0.89965435610^{-2}
8	-16.6666667	-16.66788090909	0.121420909310^{-2}
9	-19.3846154	-19.38755677543	0.29413754310^{-2}
10	-22.1428571	-22.1478899876	0.5032887610^{-2}
11	-24.9333333	-24.9330976554	0.235644610^{-3}
12	-27.7500000	-27.7589867544	0.8986754410^{-2}
13	-30.5882353	-30.5897544334	0.1519133410^{-2}
14	-33.4444444	-33.4488998760	0.445547610^{-2}
15	-36.3157895	-36.3678899988	0.52100498810^{-1}

Численное решение задачи (1), при $\alpha = 1,\ \beta = 3,\ a = 2,\ p = 0,\ u(0) = u(\pi) = 0,$

$$\lambda_{n_1} = \lambda_n \frac{\beta\lambda_n - \alpha}{\lambda_n - a^2}.$$

Таблица II.

n	λ_{n_1} — по формуле	λ_{n_2} — по методу Галеркина	$\lvert\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2}\rvert$
1	-1	-1.00048293829	0.4829382910^{-3}
2	-4	-4.00024859499	0.2485949910^{-3}
3	-9	-9.00012237485	0.1223748510^{-3}
4	-16	-16.000683730	0.6837300010^{-3}
5	-25	-25.000239586	0.2395860010^{-3}
6	-36	-36.000194857	0.1948570010^{-3}
7	-49	-49.008765789	0.8765789010^{-2}
8	-64	-64.007543234	0.7543234010^{-2}
9	-81	-81.006666789	0.6666789010^{-2}
10	-100	-100.004678098	0.4678098010^{-2}
11	-121	-121.009875446	0.9875446010^{-2}
12	-144	-144.001223457	0.1223457010^{-2}
13	-169	-169.001789797	0.1789797010^{-2}
14	-196	-196.067874323	0.67874323010^{-1}
15	-225	-225.076543344	0.76543344010^{-1}

Численное решение задачи (1), при $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ a = 0\ L = E,\ p = 0.\ u(0) = u(\pi) = 0.$

$$\lambda_{n_1} = -n^2$$

Результат численного решения системы дифференциальных уравнений, с учетом начальных условий и возмущением предоставлен в таблице 1,2.

Таблица 1:

	По методу Галеркина
1	-1182.46811726438
2	-36.8022419100356
3	-32.2103399019715
4	-20.5633553637786
5	-11.2587676838361
6	-5.17158472824084
7	-1.12817807868534
8	-1.12817807868534
9	63.9105613294318
10	63.9105613294318
11	119.389288342343
12	142.390111879008
13	166.13016167890
14	252.78562508754
15	394.00918897656

Таблица 2:

	По методу Галеркина
1	-1180.42991822676
2	-30.8660560602443
3	-22.2851514163754
4	-12.8468966104011
5	-6.28358243799837
6	0.428570163212324
7	1.80337736197232
8	1.80337736197232
9	69.47866991716
10	69.4786699171646
11	185.974126878956
12	147.9747197789971
13	172.714575456789
14	258.193696999788
15	340.4120679866809

Таблица 1: численное решение задачи (1), при $p = x, \alpha = 1, \beta = 3, a = 2$.

Таблица 2: численное решение задачи (1), при $p = x^3 + 2x + 7, \alpha = 1, \beta = 3, a = 2$.

7 Сходимость метода Галёркина

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор $T + P$, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Его собственные значения ν определяются при нахождении нетривиального решения уравнения

$$(T + P)u = \nu Lu \tag{1}$$

которое удовлетворяет некоторым однородным краевым условиям.

Для нахождения собственных значений оператора $T + P$ воспользуемся методом Галеркина. Введём последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств $H_n \subseteq H$, которая полна в H. Пусть ортонормированный базис пространства H_n известен и состоит из функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. При этом функции φ_k должны удовлетворять краевым условия задачи. Следуя методу Галёркина, будем искать приближённое решение спектральной задачи (1) в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n)\varphi_k. \tag{2}$$

Теорема 7.1 *Пусть операторы $T, L : U \to F$ заданы формулами*

$$T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2, \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2}, \quad L = a^2 - \Delta, \tag{3}$$

причем

$$U = \{u \in W_2^{k+2}(0,\pi) : u(x) = 0, x \in (0,\pi)\},$$

$$F = W_2^k(0,\pi), k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, u = W_2^{k+2}(0,\pi),$$

$$domT = \left\{u \in W_2^{k+2}(0,\pi) : u''(0) = u''(\pi) = 0\right\} \cap U.$$

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in C^2(0,\pi)$.

Если система координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом H, то метод Галёркина в применении к задаче отыскания собственных значений спектральной задачи (1), построенный на этой системе функций, сходится.

Доказательство:

Запишем уравнение (1) в виде $(T + PL - \lambda L)\varphi = (\nu L - \lambda L)\varphi$;

$$(T + PL - \lambda L)\varphi = (\nu - \lambda)L\varphi. \tag{4}$$

Для дискретного оператора L существует резольвентный оператор $R_\lambda(T + P) = (T + P - \lambda L)^{-1}$, который вполне непрерывен в H. Действуя слева на обе части уравнения (2) оператором $R_\lambda(T + P)$, получим

$$\varphi = R_\lambda(T+P)(\nu L - \lambda L)\varphi = R_\lambda(T+P)L(\nu - \lambda)\varphi = R_\lambda(T+P)(\nu - \lambda)L\varphi =$$
$$= (\nu - \lambda)R_\lambda(T + P)L\varphi.$$

На основании **Теоремы 1.1** метод Галёркина в применении к задаче отыскания собственных значений уравнения (3), а следовательно, и уравнения (1), сходится.

Заключение

В работе

- решены задачи нахождения собственных чисел для дискретного возмущенного оператора;
- на основе метода Галёркина разработан алгоритм и реализована программа для нахождения собственных чисел одного уравнения соболевского типа;
- доказана сходимость метода Галёркина в применении к задаче нахождения собственных значений.

Библиографический список

[1] Амосов, С.А. Об уравнении Власова-Эйнштейна и квантовании уравнения Власова / С. А. Амосов, В.В. Веденяпин // М. — 1997. — С.16.

[2] Боголюбов, А.Н. Лекции по математической физике / А.Н. Боголюбов, А.Г. Свешников, В.В. Кравцов // М.: Изд-во МГУ; Наука. — 2004. — С.416.

[3] Дубровский, В. В. Проблема решения задач на собственные значения для дифференциальных операторов со сложным вхождением спектрального параметра / В. В. Дубровский, О. А. Торшина // Новые мат. методы. Электромагн. волны и электронные системы. — 2002. — N 9. Т. 7. — С.4-10.

[4] Дубровский, В.В. Формула первого регуляризованного следа для дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами // Дифференциальные уравнения и их приложения / В.В. Дубровский, О.А. Торшина // 2002. — N 1. — С.9-19.

[5] Кадченко, С.И. Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами / С.И. Кадченко // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование — № 4 / том 6 / 2013.

[6] Канатников, А.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко, В.Н. Четвериков // М.: Изд-во // МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2000. — С.456.

[7] Кириллов, Е.В. Регуляризованный L-след одного возмущенного оператора / Е.В. Кириллов // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. — 2013. — Том 18. Выпуск 2 (18). — С. 7–13.

[8] Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин // М. — 1970. — С.512.

[9] Свиридюк, Г.А. Суханова М.В. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений соболевского типа. / Г.А. Свиридюк,М.В. Суханова // Дифф. уравнения. — 1992. — Т.28,№3. — С.323-330.

[10] Торшина, О.А. Алгоритм вычисления регуляризованного следа оператора Лаласа-Бельтрами с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник МаГУ. — 2003. — В.4. — С.183-215.

[11] Торшина, О.А. О следе дифференциального оператора с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник Челябинского государственного университета. — 2003. — Т.3, №3. — С.178-191.

[12] Торшина, О.А. Оценка разности спектральных функций дискретных операторов / О.А. Торшина // Альманах современной науки и образования. — 2009. — № 12-1. — С.123-125.

[13] Торшина, О.А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с негладким потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник Самарскогосударственного технического университета. Математика. Вып. 45. Дифференциальное уравнения и их приложения. N 4. — Самара: Самарский государственный университет, 2006. — С.174. — С.32-40.

[14] Петров, Г.И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости / Г.И. Петров // ПММ — 1940. — Т.4. Вып.3. — С.3-12.

[15] Пожалостин, А.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения / А. А. Пожалостин , Д. А. Гончаров // Фундаментальные и прикладные задачи механики. — М. — 2013. — вып. 612. — С.224-231.

[16] Сальников, Н.Н. О построении конечномерной математической модели процесса конвекции-диффузии с использованием метода Петрова — Галеркина / Н.Н. Сальников , С.В. Сирик , И.А. Терещенко // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 3. — С . 94 - 109.

[17] Щербинина, И.О. Анализ численных методов вычисления собственных значений и собственных векторов / И.О. Щербинина // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты. - вып. № 10. - 2014.

[18] John, V. Finite element methods for time-dependent convection-diffusion-reaction equations with small diffusion / V. John, E. Schmeyer // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2008. — Vol. 198. — P. 475-494.

[19] Kadchenko, S.I. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators // S.I. Kadchenko, G. F. Zakirova // Applied Mathematical Sciences, Vol. 10. 2016, no 7, 323 - 329.

[20] Solovev, S.I. Metod Releya-Ritca dlya nelinejnyh spektralnyh zadach / S.I. Solovev // Trudy Matematicheskogo centra im. N.I. Lobachevskogo. — 2013. — Т.48. — С.64-83.

[21] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov // Utrecht; Boston: VSP — 2003.

[22] Weil, H. Das asymptotische Verteilungsgesats der Eigenverte linearer partieller Differential-gleichungen(mit einer Anwendung auf Theorie Hohlraumstrahlungl / H. Weil // Math. Ann., 1912. — 71. — P.441-479.

[23] Weil, H. Uber die Randwertaufgabe der Strahlunstheorie and asymptotische Spektralgesetze / H. Weil, J.Reine. // Angew., 1913.— 143, №3. — P.177-202.