Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, заведующий кафедрой МиФА,
д.ф.-м.н., доцент
_____(В.Л. Дильман)
«01» июня 2016г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой ПРИМА,
д.ф.-м.н., доцент
_____(Л.А. Прокудина)
«28» мая 2016г.

Математическое моделирование неустойчивых течений жидких пленок при умеренных числах Рейнольдса

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–010400.2016.051.ПЗ ВКР

Руководитель работы, зав. каф.
ПРИМА, д.ф.-м.н., доцент
_____(Л.А. Прокудина)
«28» мая 2016 г.
Автор работы
Студент группы ММиКН-472
_____(А.Р. Сайтхужина)
«28» мая 2016 г.
Нормоконтролер, к.ф.-м.н., доц.
кафедры ПРИМА
_____(С.У. Турлакова)
«28» мая 2016 г.

Челябинск 2016

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики
Направление подготовки Прикладная математика и информатика

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ (Прокудин П.А.)
02 10 2015 г.

З А Д А Н И Е

на выпускную квалификационную работу студента
Сайтхужиной Альфины Радиковны
Группа ММиКН-472

Тема работы Математическое моделирование неустойчивых течений жидких пленок при умеренных числах Рейнольдса
утверждена приказом по университету от «15» апреля 2016 г. №661

1. **Срок сдачи студентом законченной работы «1» июня 2016 г.**
2. **Исходные данные к работе**
   2.1. Задача формирования течений жидких пленок.
   2.2. Среда программирования – Matlab.
3. **Перечень вопросов, подлежащих разработке**
   3.1. Обзор состояния проблемы.
   3.2. Изучение теоретических и экспериментальных исследований.
   3.3. Постановка задачи.
   3.4. Разработка алгоритмов характеристик течений жидких пленок.
   3.5. Написание и отладка программы.
   3.6. Вычислительные эксперименты по решению задачи.
   3.7. Разработка программной документации (описание программы, текст программы).
4. **Иллюстративный материал** (плакаты, раздаточный материал, электронные носители и др.)
   4.1. Постановка задачи. Цели работы.
   4.2. Мультимедийная презентация – 20 слайдов.
   Общее количество иллюстраций – 40.

5. **Дата выдачи задания** «1» октября 2015 г.

Руководитель _____ /Л.А. Прокудина/
(подпись)

Задание принял к исполнению _____ /А.Р. Сайтхужина/
(подпись)

6. **Календарный план**

Наименование этапов выпускной квалификационной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении руководителя
1. Изучение теоретических и экспериментальных исследований, обзор литературы	01.10.15 – 07.11.15	
2. Теоретический расчет характеристик	09.11.15– 19.12.15	
3. Разработка алгоритмов	21.12.15-06.02.16	
4. Программная реализация алгоритма	08.02.16 – 05.03.16	
5. Отладка и тестирование программы	07.03.16 – 26.03.16	
6. Вычислительные эксперименты	28.03.16 – 16.04.16	
7. Подготовка пояснительной записки дипломной работы	18.04.16 – 15.05.16	
8. Разработка программной документации	02.05.16 – 15.05.16	
9. Проверка работы руководителем, исправление замечаний	16.05.16 – 19.05.16	
10. Нормоконтроль	20.05.16 – 26.05.16	
11. Подготовка иллюстративного материала и доклада	23.05.16 – 28.05.16	
12. Рецензирование, представление зав. кафедрой	30.05.16 – 01.06.16	

Заведующий кафедрой _____ /Л.А. Прокудина
(подпись)

Руководитель работы _____ / Л.А. Прокудина /
(подпись)

Студент _____ / А.Р. Сайтхужина/
(подпись)

АННОТАЦИЯ

Сайтхужина А.Р. Математическое моделирование неустойчивых течений жидких пленок при умеренных числах Рейнольдса. – Челябинск: ЮУрГУ, ММиКН-472, 50 с., 40 ил., 6 табл., библиогр. список – 23 наим., 2 прил..

В работе исследовано влияние нерастворимых поверхностно-активных веществ (ПАВ) и градиентов температуры на неустойчивость жидкой пленки для диапазона чисел Рейнольдса $Re \in [5; 10]$. Получены аналитические зависимости для волновых характеристик жидкой пленки. Разработан алгоритм и реализована программа для расчета волновых характеристик и для определения области неустойчивости. Проанализировано влияние нерастворимых ПАВ, оказывающих стабилизирующее воздействие на течение жидкой пленки, а также влияние высоких температур на область неустойчивости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 7
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 8
1.1 Обзор литературы 8
1.1.1 Предмет и проблемы механики сплошной среды 8
1.1.2 Нерастворимые поверхностно-активные вещества 9
1.1.3 Эффекты различных ПАВ 9
1.1.4 Ранние исследования по поставленной проблеме 10
Выводы по главе 1 12
2 СУЩЕСТВУЮЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ 13
2.1 Гидромеханика жидкой пленки 13
2.1 Основные определения 13
2.2 Вывод уравнений гидродинамики жидкости 15
2.2.1 Уравнение Эйлера 15
2.2.2 Уравнение Навье-Стокса 17
2.2.3 Уравнение неразрывности 18
Выводы по главе 2 20
3 НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКИХ ПЛЕНОК 21
3.1 Математическая модель течения жидких пленок 21
3.2 Дисперсионное уравнение 21
Выводы по главе 3 22
4 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ НЕУСТОЙЧИВОСТИ 23
4.1 Алгоритм для проведения вычислительных экспериментов 23
4.2 Неустойчивость течения жидких пленок при свободном стекании 25
4.3 Влияние поверхностно-активных веществ на характеристики и неустойчивость течения жидких пленок 28
4.4 Неустойчивость течения жидких пленок при наличии температуры 34
4.5 Неустойчивость течения жидких пленок при совместном влиянии температуры и поверхностно-активных веществ 36
4.6 Сравнение результатов вычислительных экспериментов с теоретическими и экспериментальными данными других авторов. 43
Выводы по главе 4 44

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 46
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 47
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 49
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 50

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование и методы прикладной математики достаточно широко применяются для исследования процессов, явлений в различных науках и вносят существенный вклад в понимание сути физических и других процессов. Трудность изучения физико-химических процессов, теплофизических процессов, связана с нелинейными явлениями и эффектами. Технологические процессы, связанные с переносом тепла и массы через поверхность раздела, например, течение тонких слоев вязкой жидкости (жидкой пленки), широко распространены в химической, нефтехимической, энергетической и других отраслях промышленности [1]. Поскольку течение жидких пленок реализуется в разнообразных тепло - и массообменных пленочных аппаратах, например, пленочные реакторы для проведения технологических процессов, пленочные тепломассообменники, испарители и др., то результаты исследований имеют не только теоретическое, но и практическое значение. Течение жидких пленок неустойчиво, подвержено влиянию различных физико-химических факторов, к числу которых относятся нерастворимые поверхностно-активные вещества (масла, жиры). Исследование влияния этих факторов на течение жидких пленок, их волновые характеристики является актуальной и практически значимой задачей.

Целью работы является исследование влияния нерастворимых поверхностно-активных веществ и градиентов температуры на неустойчивость жидкой пленки.

Основная задача заключается в получении аналитических зависимостей для волновых характеристик жидкой пленки на основе дисперсионного уравнения, расчете фазовых скоростей и определении области неустойчивости при наличии ПАВ и высоких температур (исключая процесс кипения). Проанализировать полученные результаты по волновым характеристикам жидкой пленки при умеренных числах Рейнольдса $Re \in [5; 15]$.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается течение тонкого слоя вязкой жидкости (жидкой пленки) толщиной δ под действием силы тяжести $\vec{g}$ по наклонной непроницаемой поверхности, имеющей температуру T_c (рисунок 1.1) [2]. Введем декартову систему координат OXY. Поверхность, по которой движется жидкость, – ось OX, направленная вдоль течения пленки. Ось OY направлена по нормали в пленку жидкости.

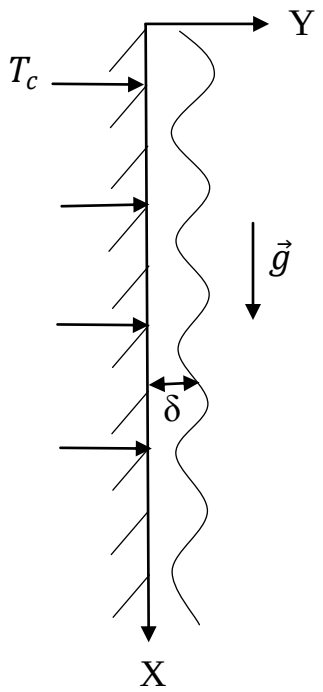

Рисунок 1.1 – Течение тонкого слоя вязкой жидкости
под действием силы тяжести

Течение жидкой пленки рассматривается при умеренных числах Рейнольдса $Re \in [5; 15]$. На поверхности жидкой пленки учитываем присутствие нерастворимых поверхностно-активных веществ (жиры, масла).

1.1 Обзор литературы

1.1.1 Предмет и проблемы механики сплошной среды

Механика сплошной среды – часть механики, посвящённая изучению движения газообразных, жидких и твёрдых тел и сред с усложнёнными свойствами, в которых наряду со свойствами тел необходимо самосогласованно учитывать внешние воздействия на среду, движение которой в свою очередь, определяет внешние воздействия [3, 4]. Примером таких сред может служить проводящая среда с электромагнитным полем. В этом случае уравнения,

описывающие движение среды необходимо рассматривать совместно с уравнениями для электромагнитного поля, так как движение среды определяет токи, текущие в рассматриваемой среде, а последние генерируют электромагнитные поля, воздействующие на среду.

Существует много задач, на которые с помощью известных экспериментальных и теоретических методов пока что не удаётся получить ответ. Например, снижение сопротивления тел при движении в воде с большими, порядка 100 м/с скоростями, создание и удержание плазмы с температурой в миллионы градусов, объяснения общей циркуляции воздуха в атмосфере и т.д.

Основными, наиболее существенными проблемами механики сплошной среды являются проблема воздействия жидкости и газа на движущиеся в них тела, движение жидкости и газа по трубам и внутри различных машин, фильтрация – движение жидкости сквозь почву и другие пористые среды, гидростатика – равновесие жидкостей и тел, плавающих внутри и на поверхности жидкости [5].

1.1.2 Нерастворимые поверхностно-активные вещества

Практически всегда течение пленки сопровождается волновыми процессами, развивающимися на поверхности раздела фаз. Характер движения пленки во многом определяет интенсивность процессов тепломассообмена, протекающих в аппарате. Следует при этом учитывать, что пленка имеет контакт как с твердой (обтекаемой) поверхностью, так и газом (паром), скорость которого может существенно отличаться от скорости течения пленки.

На режимы течения пленок влияет множество физико-химических факторов. Одним из таких факторов является наличие на границе раздела фаз нерастворимых поверхностно-активных веществ (ПАВ).

Введение даже малых добавок таких ПАВ может оказать существенное влияние как на гидродинамику пленки, так и на массообмен в системах жидкость-газ (пар) и жидкость-жидкость.

Опыты показывают, что поверхность пленки практически всегда покрыта сложной системой волн. Добавки нерастворимых ПАВ приводят к стабилизации волнового движения жидкой пленки на всем спектре. Дело в том, что ПАВ при адсорбции на поверхности жидкости образуют микропленку, обладающую большим внутренним трением и, вследствие этого, забирающую большую свободную часть энергии у жидкого слоя.

Выбор добавок нерастворимых ПАВ обычно определяется минимальной токсичностью, негорючестью, отсутствием серы и безопасностью для окружающей среды. Также важны и такие свойства как растворимость, плотность, сжимаемость.

1.1.3 Эффекты различных ПАВ

В различных отраслях промышленности поверхностно-активные вещества имеют широкое применение. Их используют, потому что они обладают

некоторыми важными свойствами. Например, на твердой поверхности пленки ПАВ способствуют очистке поверхностей от отложений, защищают металл от коррозии и т.д.

При малых числах Re влияние ПАВ на гидродинамическую устойчивость и процессы межфазного взаимодействия в системах типа жидкость-жидкость или жидкость-газ обусловлено появлением на этой границы дополнительных касательных напряжений, связанных с градиентом поверхностного натяжения (эффект Марангони) [6].

Волновые течения пленок в присутствии поверхностно-активных веществ исследовались как теоретически, так и экспериментально. С помощью таких исследований выяснилось, что влияние ПАВ, которые изменяют поверхностное натяжение на границе раздела двух сплошных сред, на гидродинамику и массообмен объясняется, прежде всего, появлением на этой границе дополнительных касательных и нормальных напряжений, связанных с «растяжением» пленок ПАВ на гребнях волн и «сжатием» их во впадинах.

Добавление ПАВ в жидкость производит значительное влияние на следующее:

-характер течения, задерживая начало процесса волнообразования на поверхности раздела фаз;

-частотную структуру волнового движения;

-процессы массообмена в жидких пленках.

Отмечается, что воздействие ПАВ на массоперенос связано как с гидродинамическими, так и с физико-химическими эффектами. Важными гидродинамическими эффектами являются изменение скорости циркуляции внутри капли и уменьшение скорости подъема или падения капель одной жидкости в другой [6]. Физико-химические эффекты – это «блокировка» взаимодействия между фазами из-за присутствия ПАВ, т.е. создание межфазного сопротивления (барьера). Анализ результатов исследований показывает, что влияние ПАВ на массообмен неоднозначно.

1.1.4 Ранние исследования по поставленной проблеме

В 1964 году американский ученый Стивен Уитакер провел исследование по влиянию поверхностно-активных веществ на устойчивость течения жидких пленок. В его работе [7] рассматривается роль поверхностного натяжения, вязкости и поверхностной эластичности на стабильность стекающих жидких пленок при умеренных числах Рейнольдса, а именно $Re > 10$. Поверхностное натяжение и поверхностная вязкость снижают темпы роста бесконечно малых возмущений, но не способны стабилизировать пленку. Поверхностная эластичность приводит к критическому числу Рейнольдса, из-за которого поток устойчив ко всем малым возмущениям. Тем не менее, она обязана своим существованием изменению поверхностного натяжения с поверхностной концентрацией, а последний может быть практически постоянным, если поверхность быстро уравновешивается объемной жидкостью. Диффузионным транспорт между объемной жидкостью и поверхностью запрещает существование

критического числа Рейнольдса. Результаты показывают, что касательные силы поверхностного натяжения, возникающие в результате поверхностных градиентов концентрации, в первую очередь отвечают за стабилизирующее действие поверхностно-активных веществ.

Исследована структура стекающих жидких пленой как теоретически [8, 9], так и экспериментально, в первую очередь из-за изменения тепломассопереноса, которое сопровождается формированием волны. Исследователи часто используют поверхностно-активные вещества, чтобы подавить образование волн для того, чтобы провести точные исследования абсорбции газа, текущей по вертикальной поверхности под действием силы тяжести жидкой пленки, обдуваемой газом. Побочным продуктом этих исследований является знание того, что поверхностно-активные вещества, адсорбируемые на границе раздела газ-жидкость стекающей пленки жидкости, способны ингибировать формирование волны настолько, что поверхность выглядит стабильно, и экспериментально темпы массообмена находятся в удовлетворительном согласии с теорией. В настоящее время неизвестно, будут ли поверхностно-активные вещества полностью стабилизировать пленку или же темпы роста волн просто сводятся к точке, где эти волны не заметны в обычном эксперименте массопереноса.

Присутствие поверхностно-активных веществ на границе раздела приводит к поверхностной вязкости, которая может быть достаточно большой. В дополнение к вязким эффектам, поверхностные пленки могут также обладать упругими свойствами. Поверхностное натяжение является функцией поверхностной концентрации; таким образом, любая деформация, которая изменяет поверхностную концентрацию, также приводит к изменению поверхностного натяжения. При отсутствии массопереноса между поверхностью и объемной фазы, поверхностное натяжение связано с деформацией растяжения; Таким образом, поверхность обладает упругими свойствами. Слово "эластичный", не относится к структурной эластичности, для поверхности следует рассматривать его как двумерную ньютоновскую жидкость. Рейнольдс [10] впервые предположил, что упругая характеристика поверхностных пленок была ответственна за спокойствие ветровых волн океана. Левич [3] подтвердил важность поверхностной упругости в подавлении формирования волны, и указывает на то, что диффузионные эффекты, связанные с растворимыми пленками могут значительно уменьшить демпфирующее действие.

Поведение стекающих жидких пленок хорошо описано в работе Вениамина [9] для случая постоянной на границе раздела фаз напряжений. Было проанализировано влияние поверхностной вязкости и упругости поверхности, и оказывается, что последний эффект в первую очередь отвечает за стабилизирующее действие поверхностно-активных веществ. Эти результаты указывают на то, что упругий эффект, или тангенциальные силы поверхностного натяжения, очень чувствительны к скорости переноса материала между поверхностью и объемной фазой. Диффузионный процесс, анализируемый в данной работе, представляет собой наиболее быстрый возможный механизм, с помощью которого поверхностные градиенты концентрации могут быть

уменьшены. Существует достаточно доказательств, что процесс адсорбции не контролируется только диффузией, особенно вблизи состояния равновесия, где стерические факторы помеха и электрические эффекты, связанные с двойным слоем, могут стать важными.

Таким образом, в работе Уитакера отмечается, что хотя ПАВ и способствуют снижению равновесного поверхностного натяжения, однако это влияние меньше по сравнению с влиянием дополнительных касательных и нормальных напряжений. Влияние добавок через изменение числа Вебера $We_\delta = \frac{\sigma}{\rho u_0^2 \delta}$,

где u_0 – средняя скорость движения пленки, δ – ее толщина, на критическое волновое число $K_{\text{кр}} = \frac{2\pi\sigma_{\text{кр}}}{\lambda}$ приведено на рисунке 1.2.

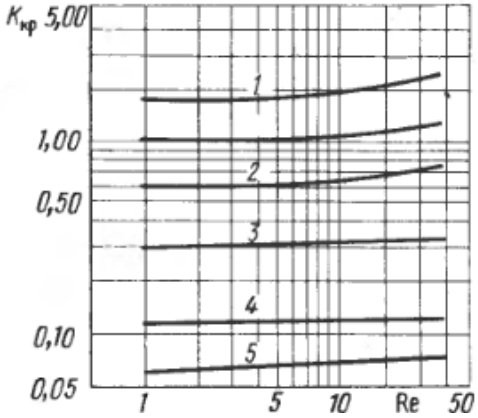

Рисунок 1.2 – Влияние поверхностного натяжения
на критическое волновое число при течении жидкой пленки:
$1 - We = 0{,}02; 2 - We = 0{,}1; 3 - We = 1{,}0;$
$4 - We = 10; 5 - We = 100; 6 - We = 330$

Присутствие ПАВ приводит к росту критического числа Re для жидкой пленки, при котором происходит потеря устойчивости волнового течения. Можно сделать вывод о том, что чем больше возрастает расстояние, на котором происходит потеря устойчивости, при движении пленки по вертикальной поверхности, тем больше концентрация и длина цепи ПАВ. При этом волновая скорость уменьшается по сравнению с волновым движением жидкой пленки в отсутствии ПАВ.

Выводы по главе 1

1. Основным фактором, влияющим на гидродинамику и тепломассообмен в теплоэнергетических установках различного назначения, являются нерастворимые поверхностно-активные вещества.

2. Применение ПАВ имеют большое прикладное значение в таких сложных системах, как энергоблоки ТЭС и АЭС, в которых присутствуют турбины, котлы, парогенераторы, конденсаторы, трубопроводы и т.д.

3. ПАВ влияют на надежность и экономичность работы пленочных аппаратов в целом.

2 СУЩЕСТВУЮЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Гидромеханика – это раздел механики сплошной среды, посвященный изучению законов движения и равновесия жидкостей, а также законов взаимодействия жидких сред с находящимися в них телами. Понятие жидкости в гидромеханике в широком смысле этого слова охватывает как мало сжимаемые капельные жидкости, так и легко сжимаемые жидкости, которыми являются газы.

2.1 Гидромеханика жидкой пленки

Жидкость есть сплошная среда, которая обладает свойствами: в случае, когда она находится в покое или движется как абсолютно твердое тело, в ней наблюдаются только нормальные напряжения и отсутствуют касательные. Рассматривая жидкость в этом смысле, полагается, что все функции, имеющие гидродинамический смысл, достаточно гладкие, т. е. непрерывные и имеющие достаточное число производных.

Тонкий слой вязкой жидкости относится к числу нелинейных моделей физико-химической гидродинамики, ее движение по твердой наклонной поверхности, обусловлено действием силы тяжести, одна из сторон которой соприкасается с поверхностью, а другая сторона свободна. Если толщина слоя вязкой жидкости достаточно мала, то обеспечивается высокая скорость движения массы жидкости и теплообмена [3].

2.1 Основные определения

При выводе основных закономерностей гидродинамики очень часто используют представление жидкости в качестве идеальной, т.е. в виде жидкости, абсолютно несжимаемой под действием давления, не изменяющей своей плотности при изменении температуры и не обладающей вязкостью.

Учет такого свойства жидкости как вязкость приводит к резкому усложнению уравнений движения, причем соответствующие закономерности становятся настолько сложными, что даже приближенный счет на вычислительных машинах для подобных уравнений оказывается затруднительным. Однако многие практические задачи, связанные с движением жидкости в трубах и каналах или с движением твердых тел в жидкости, невозможно корректно решить без учета вязкости жидкости.

Вязкостью называется свойство жидкости оказывать сопротивление усилиям, вызывающим относительное перемещение ее частиц.

Принято различать вязкость кинематическую и вязкость динамическую.

Динамическая вязкость μ – физическая величина, равная отношению тангенциальной силы $F_{\text{т}}$, необходимой для поддержания градиента скорости, равного единице, между двумя параллельными слоями жидкости (газа), к площади соприкосновения этих слоев.

Динамическую вязкость можно выразить из формулы

$$F = \mu \frac{d\omega}{dl} \Delta S\,, \tag{2.1}$$

где F – модуль силы внутреннего трения между слоями жидкости, Н;

$\frac{d\omega}{dl}$– модуль градиента скорости, м/с^2;

ΔS – площадь соприкосновения слоев жидкости, м^2.

В таком случае из формулы (1) получим:

$$\mu = \frac{F}{(d\omega/dl)\Delta S}\,. \tag{2.2}$$

Единица динамической вязкости [Па · с] или $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}\right]$.

Кинематическая вязкость ν– величина, равная отношению динамической вязкости к плотности ρ вещества:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}\,. \tag{2.3}$$

Единица кинематической вязкости $\left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]$ и называется стоксом.

Следует учесть, что в вязкой жидкости при обтекании твердых тел образуются вихри.

Заметим, что для ньютоновской жидкости вязкость является свойством жидкости и зависит только от состояния (давление, температура, состав) жидкости.

В гидродинамике существуют различные виды течения жидкости. В одних случаях жидкость течет слоями, которые скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Это движение называется ламинарным (слоистым), которое является стационарным. При увеличении скорости или поперечных размеров потока жидкости возникает перемешивание жидкости. Скорость молекул в любом месте все время беспорядочно изменяется. Течение становится нестационарным и называется турбулентным.

Английский физик О. Рейнольдс установил, что характер течения жидкости зависит от значения безразмерной величины Re, определенной отношением динамического давления (ρu^2) и касательного напряжения ($\frac{\mu u}{L}$), которая может быть выражена следующим образом:

$$Re = \frac{\rho u^2}{\frac{\mu u}{L}} = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{uL}{\nu}, \tag{2.4}$$

где ρ – плотность, кг/м^3;

u – скорость, м/с;

μ – динамическая вязкость, Н·с/м^2;

L – характеристический размер, м;

ν – кинематическая вязкость, м^2/с.

Величина Re называется числом Рейнольдса. При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение. При $Re > Re_{\text{кр}}$ течение приобретает турбулентный характер [11].

2.2 Вывод уравнений гидродинамики жидкости

2.2.1 Уравнение Эйлера

Рассмотрим установившееся движение идеальной жидкости. Выделим в потоке элементарный параллелепипед объемом $dV=dxdydz$ (рисунок 2.1) и выразим проекции сил тяжести и давления, действующих на него, при этом силу тяжести направим по оси z [3, 4]. Будем полагать, что жидкость имеет плотность ρ и массу $dm=\rho dxdydz$. Запишем основной принцип механики (тело находится в состоянии движения, если сумма проекций всех сил, действующих на тело, равна произведению массы движущегося тела на его ускорение) в проекциях на оси координат:

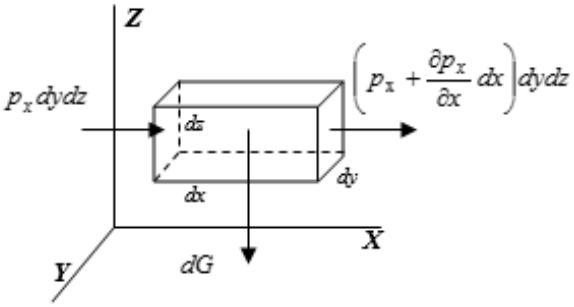

Рисунок 2.1 – Параллелепипед в потоке жидкости.

$$\begin{cases} p_x dydz - \left(p_x + \dfrac{\partial p_x}{\partial x} dx\right) dydz = \rho \dfrac{D\omega_x}{d\tau} dxdydz, \\ p_y dxdz - \left(p_y + \dfrac{\partial p_y}{\partial y} dy\right) dxdz = \rho \dfrac{D\omega_y}{d\tau} dxdydz, \\ -dG + p_z dxdy - \left(p_z + \dfrac{\partial p_z}{\partial z} dz\right) dxdy = \rho \dfrac{D\omega_z}{d\tau} dxdydz. \end{cases} \tag{2.5}$$

После приведения подобных слагаемых и необходимых сокращений:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p_x}{\partial x} = \rho \dfrac{D\omega_x}{d\tau}, \\ -\dfrac{\partial p_y}{\partial y} = \rho \dfrac{D\omega_y}{d\tau}, \\ -\rho g - \dfrac{\partial p_z}{\partial z} = \rho \dfrac{D\omega_z}{d\tau}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Раскрывая субстанциональные производные, окончательно получим:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p_x}{\partial x} = \rho\left(\dfrac{\partial \omega_x}{d\tau} + \omega_x \dfrac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \dfrac{\partial \omega_x}{\partial y} + \omega_z \dfrac{\partial \omega_x}{\partial z}\right), \\ -\dfrac{\partial p_y}{\partial y} = \rho\left(\dfrac{\partial \omega_y}{d\tau} + \omega_x \dfrac{\partial \omega_y}{\partial x} + \omega_y \dfrac{\partial \omega_y}{\partial y} + \omega_z \dfrac{\partial \omega_y}{\partial z}\right), \\ -\rho g - \dfrac{\partial p_z}{\partial z} = \rho\left(\dfrac{\partial \omega_z}{d\tau} + \omega_x \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x} + \omega_y \dfrac{\partial \omega_z}{\partial y} + \omega_z \dfrac{\partial \omega_z}{\partial z}\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

В уравнении (2.7) g – ускорение свободного падения, а $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – составляющие скорости течения жидкости ω вдоль координатных осей.

Для установившегося движения производные $\frac{\partial \omega_x}{d\tau}, \frac{\partial \omega_y}{d\tau}, \frac{\partial \omega_z}{d\tau}$ обращаются в нуль, поэтому

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p_x}{\partial x} = \rho\left(\omega_x \dfrac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \dfrac{\partial \omega_x}{\partial y} + \omega_z \dfrac{\partial \omega_x}{\partial z}\right), \\ -\dfrac{\partial p_y}{\partial y} = \rho\left(\omega_x \dfrac{\partial \omega_y}{\partial x} + \omega_y \dfrac{\partial \omega_y}{\partial y} + \omega_z \dfrac{\partial \omega_y}{\partial z}\right), \\ -\rho g - \dfrac{\partial p_z}{\partial z} = \rho\left(\omega_x \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x} + \omega_y \dfrac{\partial \omega_z}{\partial y} + \omega_z \dfrac{\partial \omega_z}{\partial z}\right). \end{cases} \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.8) представляет собой дифференциальные уравнения движения Эйлера для установившегося потока, а система уравнений (2.7) – для неустановившегося потока.

Уравнения движения Эйлера находят применение в аэродинамике, особенно при вычислении подъемной силы крыловых профилей. Они применяются в общей задаче об обтекании тела, так как при помощи уравнений (2.7) определяется распределение давлений на внешней границе пограничного слоя. Поскольку в теории идеальной жидкости постулируется нулевая вязкость, то на поверхности обтекаемого тела происходит проскальзывание, что не отражает действительное положение вещей. Однако вдали от обтекаемого тела предположение об идеальной жидкости оказывается в некоторых случаях применимым. Также уравнения Эйлера дают хороший результат при вычислениях и в тех случаях, когда скорость течения жидкости достаточно высока, тогда силы инерции значительно превосходят силы вязкого трения, и ими можно пренебречь.

Отметим, что для установившегося течения производные $\frac{D\omega_x}{d\tau}, \frac{D\omega_y}{d\tau}, \frac{D\omega_z}{d\tau}$ не равны нулю, поскольку скорость течения жидкости может меняться со временем при переходе частицы жидкости от одной точки пространства к другой, однако в какой-либо фиксированной точке скорость жидкости с течением времени не изменяется, поэтому $\frac{\partial \omega_x}{d\tau}, \frac{\partial \omega_y}{d\tau}, \frac{\partial \omega_z}{d\tau}$ равны нулю.

Интегралом уравнений (2.7) является уравнение Бернулли, связывающее давление P и скорость ω в потоке:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g} = const.$$

Уравнение Бернулли может быть получено не только путем интегрирования уравнений Эйлера (2.7), но и путем рассмотрения законов термодинамики.

2.2.2 Уравнение Навье-Стокса

Многие практические задачи, связанные с движением жидкости, нельзя решить без учета вязкости, т.е. жидкость нельзя рассматривать как идеальную, и пренебречь силами вязкого трения невозможно вследствие их сравнимости с силами инерции, действующими на поток.

Действие сил трения T в потоке вязкой жидкости плотности ρ на выделенный элементарный параллелепипед объемом $dV = dxdydz$ и массой $dm = \rho dxdydz$ проявляется в возникновении на поверхности параллелепипеда касательных напряжений τ (рисунок 2.2) [3, 4].

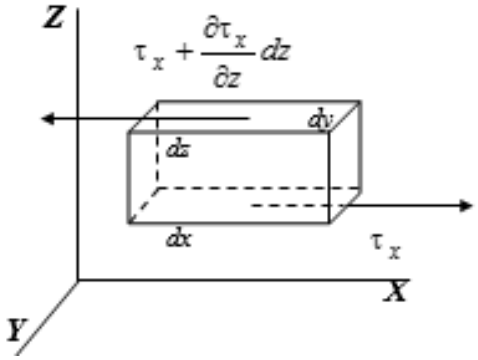

Рисунок 2.2 – Параллелепипед в потоке жидкости

Рассмотрим плоский случай, когда течение жидкости происходит только вдоль оси абсцисс (рисунок 2.2). Определим равнодействующую сил трения.

Указанные на рисунке 2.2 направления действия сил трения, приложенных к верхней и нижней граням параллелепипеда, обусловлены, например, тем, что более медленные вышележащие слои жидкости затормаживают слой, в котором находится параллелепипед, а более быстрые нижележащие – разгоняют его. В таком случае равнодействующая этих сил равна:

$$\tau_x dxdy - \left(\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} dz\right) dxdy = -\frac{\partial \tau_x}{\partial z} dxdydz.$$

По закону Ньютона (напряжение внутреннего трения между слоями идеальной жидкости при ее течении прямо пропорционально градиенту скорости)
$\tau_x = -\mu \frac{\partial \omega_x}{\partial z}$, где μ – динамическая вязкость жидкости, то

$$\mu \frac{\partial \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z}\right)}{\partial z} dxdydz = \mu \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} dxdydz. \tag{2.9}$$

В случае трехмерного потока составляющая скорости ω_x будет изменяться в направлении всех трех осей координат, поэтому выражение (2.9) примет вид $\mu \nabla^2 \omega_x dxdydz$.

Аналогичные рассуждения приводят к равнодействующим сил трения относительно оси ординат $\mu\nabla^2\omega_y dxdydz$ и оси аппликат $\mu\nabla^2\omega_z dxdydz$.

В таком случае, согласно основному принципу механики, после подстановки полученных выражений в систему уравнений (2.5) и преобразований запишем:

$$\begin{cases} \mu\nabla^2\omega_x - \dfrac{\partial p_x}{\partial x} = \rho\dfrac{D\omega_x}{d\tau}, \\ \mu\nabla^2\omega_y - \dfrac{\partial p_y}{\partial y} = \rho\dfrac{D\omega_y}{d\tau} \\ \mu\nabla^2\omega_z - \rho g - \dfrac{\partial p_z}{\partial z} = \rho\dfrac{D\omega_z}{d\tau} \end{cases} \tag{2.10}$$

Уравнения (2.10) можно переписать в векторной форме:

$$\frac{D\vec{\omega}}{dt} = -\frac{1}{\rho}gradP - \frac{\mu}{\rho}\Delta\omega + g \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) есть дифференциальное уравнение движения Навье-Стокса и представляет собой дифференциальную форму закона сохранения импульса.

В общем виде уравнение (2.11) не может быть решено аналитически, так как невозможно определить граничные условия в неустановившемся движении вязкой жидкости. Однако достоинством уравнения Навье-Стокса является то, что оно получено при самых общих предположениях и пригодно для описания трехмерных течений. При решении конкретных задач уравнение (2.11) удается упростить.

2.2.3 Уравнение неразрывности

В гидродинамике рассматривается сплошное течение жидкости, т.е. предполагается, что в произвольно выделенном элементарном объеме dV нет пустот (если бы существовали пустоты, то среда стала бы дисперсной, т.е. представимой в виде твердого тела, содержащего большое количество соединенных между собой пустот или же прорезанного большим количеством трещин), поэтому поток неразрывен. При этом пренебрегают тем, что элементарный объем жидкости является совокупностью молекул, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Допущение об отсутствии пустот возможно потому, что размеры элементарного объема могут быть всегда взяты значительно большими, чем средняя длина пути свободного пробега молекул. Также считается, что свойством сплошности обладают отдельные частицы жидкости, причем термин «частица» относят не к микрочастицам, т.е. молекулам, а к макрочастицам. Макрочастицы могут перемещаться относительно друг друга в потоке, но каждая из них движется, как единое целое [3, 4].

Для данного объема dV должен выполняться закон сохранения массы.

Масса жидкости, вошедшая через грань $dydz$ за время $d\tau$, будет равна

$$M_x = \rho\omega_x dydzd\tau.$$

На противоположной (правой) грани скорость и плотность жидкости могут отличаться от соответствующих величин на левой грани (рисунок 2.3):

$$M_{x+dx} = \left(\rho\omega_x + \frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x}\right) dydzd\tau.$$

Приращение массы составит

$$dM_x = M_{x+dx} - M_x = -\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} dxdydzd\tau.$$

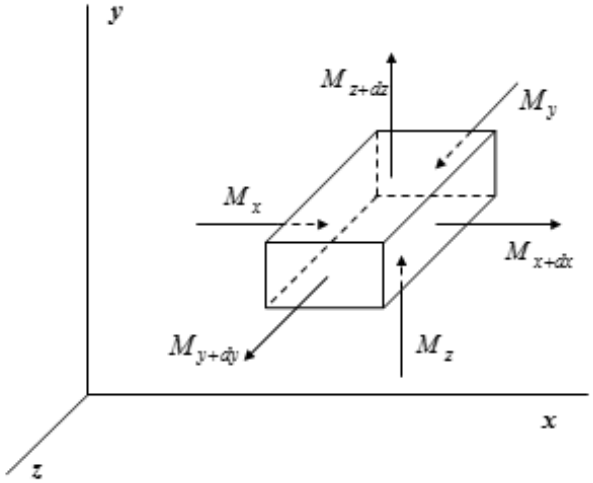

Рисунок 2.3 – Произвольный объем жидкости.

Аналогично для других осей координат:

$$dM_y = -\frac{\partial\left(\rho\omega_y\right)}{\partial y} dxdydzd\tau,$$

$$dM_z = -\frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} dxdydzd\tau.$$

Общее накопление массы жидкости в параллелепипеде за время $d\tau$ будет равно сумме ее приращений вдоль всех осей координат:

$$dM = -\left[\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z}\right] dxdydzd\tau. \qquad (2.12)$$

С другой стороны, изменение массы в полностью заполненном жидкостью объеме параллелепипеда возможно только вследствие изменения плотности жидкости в объеме, поэтому:

$$dM = -\frac{\partial\rho}{\partial\tau} dxdydzd\tau. \qquad (2.13)$$

Приравнивая уравнения (2.12) и (2.13) и проводя необходимые преобразования, получим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} = 0. \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.14) представляет собой дифференциальное уравнение неразрывности (сплошности) потока для неустановившегося движения сжимаемой жидкости.

Для установившегося потока плотность не меняется с течением времени, поэтому частная производная $\frac{\partial \rho}{\partial \tau}$ равна нулю. В таком случае, уравнение (2.14) примет вид:

$$\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} = 0. \tag{2.15}$$

Если жидкость несжимаема, то ее плотность во всех точках одинакова ($\rho = const$), тогда из уравнения (2.15) имеем:

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z} = 0. \tag{2.16}$$

В векторной форме:

$$div\vec{\omega} = 0 \tag{2.17}$$

В задачах гидродинамики уравнение неразрывности должно удовлетворяться совместно с уравнениями энергии и импульсов. В основном, оно используется для упрощения этих двух уравнений.

Интегрирование уравнения (2.17) приводит к уравнению

$$\rho\omega S = const, \tag{2.18}$$

где S – площадь сечения трубопровода.

Уравнение (2.18) является интегральным уравнением неразрывности потока или уравнением постоянства расхода. Смысл данного уравнения заключается в том, что при установившемся движении жидкости, полностью заполняющей трубопровод, через каждое его поперечное сечение проходит в единицу времени одна и та же масса жидкости. Уравнение (2.18) выражает также материальный баланс потока, поскольку из него следует, что массовый расход жидкости через начальное сечение трубопровода равен массовому расходу жидкости через его конечное сечение. Здесь расходом жидкости называется количество жидкости, протекающее через живое сечение потока в единицу времени. Соответственно, массовым расходом будет являться масса жидкости, протекающая через живое сечение потока в единицу времени. Живым сечением потока называется площадь поперечного сечения потока, нормального к направлению движения жидкости.

В некоторых случаях, например, при вскипании жидкости вследствие резкого понижения давления, образуется пар. Это может привести к разрыву потока. В таких условиях, наблюдаемых иногда при работе насосов, уравнение (2.14) не выполняется.

Выводы по главе 2

1. Изучены основные уравнения гидромеханики: уравнение Эйлера, Навье-Стокса и уравнение неразрывности.

2. С помощью этих уравнений можно построить математическую модель течения жидких пленок, в граничных условиях которой параметр поверхностной вязкости и влияние термокапиллярных сил.

3 НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКИХ ПЛЕНОК

3.1 Математическая модель течения жидких пленок

Математической моделью течения жидкой пленки толщиной δ под действием силы тяжести по непроницаемой поверхности является система уравнений Навье-Стокса (3.1) и уравнения неразрывности с граничными условиями (3.2–3.5), которые имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_+}{\partial t_+} + u_+\dfrac{\partial u_+}{\partial x_+} + v_+\dfrac{\partial u_+}{\partial y_+} = -\dfrac{\partial P_+}{\partial x_+} + Fr_x + \dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \dfrac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2}\right), \\ \dfrac{\partial v_+}{\partial t_+} + u_+\dfrac{\partial v_+}{\partial x_+} + v_+\dfrac{\partial v_+}{\partial y_+} = -\dfrac{\partial P_+}{\partial y_+} + Fr_y + \dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 v_+}{\partial x_+^2} + \dfrac{\partial^2 v_+}{\partial y_+^2}\right), \\ \dfrac{\partial u_+}{\partial x_+} + \dfrac{\partial v_+}{\partial y_+} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$y = 0: u = 0, v = V_0; \tag{3.2}$$

$$y = \delta: \frac{1}{Re}\left[2\frac{\partial u_+}{\partial x_+}\frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - 2\frac{\partial v_+}{\partial y_+}\frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - \left(\frac{\partial v_+}{\partial x_+} + \frac{\partial u_+}{\partial y_+}\right)\right] + \\ +M\frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} + N\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} = 0; \tag{3.3}$$

$$P_+ = \frac{2}{Re}\left[\frac{\partial v_+}{\partial y_+} - \left(\frac{\partial u_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial x_+}\right)\frac{\partial \delta_+}{\partial x_+}\right] - \sigma\frac{\partial^2 \delta_+}{\partial x_+^2} + P_0; \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \delta_+}{\partial t_+} = v_+ - u_+\frac{\partial \delta_+}{\partial x_+}. \tag{3.5}$$

Где u_+ и v_+ – проекции скорости пленки по осям координат Ox и Oy соответственно; Fr_x и Fr_y – проекции числа Фруда; Re – число Рейнольдса; t – время; M – параметр термокапиллярных сил; σ – коэффициент поверхностного натяжения; N – параметр поверхностной вязкости; P_0 – давление жидкости на выходе. Индекс “+” отмечает безразмерные величины.

Параметр термокапиллярных сил за счет того, что поверхность, по которой течет жидкая пленка, имеет температуру. Параметр поверхностной вязкости – за счет ПАВ.

3.2 Дисперсионное уравнение

Из системы (3.1–3.5) выведено дисперсионное уравнение (3.6) [12]:

$$\omega(a_7 k + i) + a_1 k^4 - a_4 i k^3 - a_6 k^2 + a_{11} i k = 0\,, \tag{3.6}$$

где: $\omega = \omega_r + i\omega_i$;

ω_r – частота;

ω_i – инкремент;

k – волновое число.

Коэффициенты $a_1, a_4, a_6, a_7, a_{11}$ уравнения (3.6) имеют следующий вид:

$$a_1 = -\frac{Re\sigma}{3},$$

$$a_4 = -\frac{Re^2 F_x N}{2},$$

$$a_6 = \frac{3}{40} Re^3 F_x^2 - \frac{ReM}{2},$$

$$a_7 = \frac{5}{24} Re^2 F_x,$$

$$a_{11} = -ReF_x,$$

где: $F_x = \frac{3}{Re}$;

$\sigma = 4887 \cdot Re^{-\frac{5}{3}}$;

Re – число Рейнольдса;

F – число Фруда;

N – коэффициент поверхностной вязкости;

M – параметр термокапиллярных сил;

σ – поверхностное натяжение.

Из дисперсионного уравнения (3.6) выведены в явной форме частота ω_r:

$$\omega_r = \frac{a_4 k^3 - a_{11} k + (a_6 k^2 - a_1 k^4) a_7 k}{a_7^2 k^2 + 1}, \tag{3.7}$$

инкремент ω_i:

$$\omega_i = \frac{(a_4 k^3 - a_{11} k) a_7 k - a_6 k^2 + a_1 k^4}{a_7^2 k^2 + 1}, \tag{3.8}$$

фазовая скорость C_r:

$$C_r = \frac{\omega_r}{k}. \tag{3.9}$$

Выводы по главе 3

1) Для данной модели (3.1) – (3.5) выведены аналитические зависимости для волновых характеристик жидкой пленки: частота, инкремент, фазовая скорость.

2) Входящие в зависимости для частоты, инкремента, фазовой скорости коэффициенты включают физические факторы исходной модели (N, M, σ), что позволит исследовать их влияние на волновые характеристики, режимы течения жидкой пленки.

4 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

С помощью дисперсионного уравнения (3.6) исследуются неустойчивые течения жидких пленок при умеренных числах Рейнольдса $Re \in [5; 15]$. Рассчитываются волновые характеристики (3.7) – (3.9). Исследование проводится при условии $\omega_i > 0$, когда течение тонкого слоя жидкости неустойчиво. В случае $\omega_i = 0$, что соответствует нейтральной устойчивости, расчёты останавливаются. Волновое число $k \in [0; 0{,}5]$ берется с шагом $h = 0{,}0025$.

Расчет волновых характеристик позволяет оценить эффективность протекающих процессов на наклонной непроницаемой поверхности.

4.1 Алгоритм для проведения вычислительных экспериментов

Для проведения эксперимента разработаны алгоритмы (рисунок 4.1 – 4.3) и реализована программа на языке Matlab (приложение 1–2).

Последовательность действий для нахождения волновых характеристик жидкой пленки представлен на рисунке 4.1.

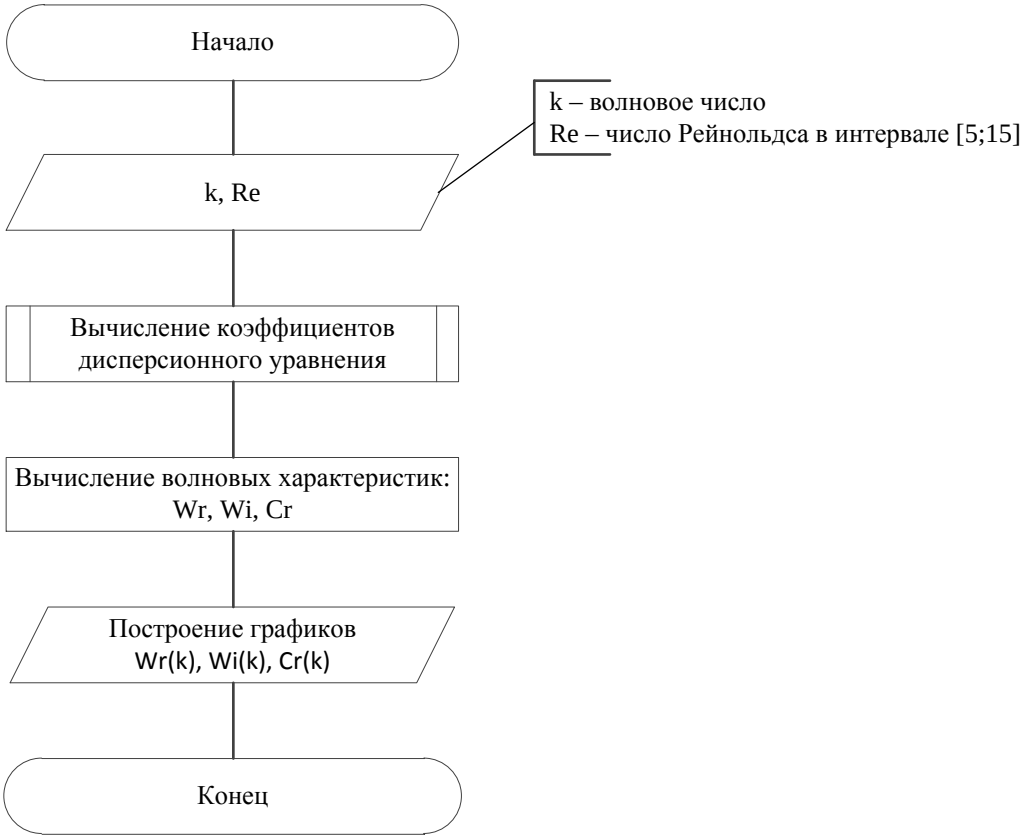

Рисунок 4.1 – Алгоритм для нахождения Волновых характеристик жидкой пленки

Функция для нахождения коэффициентов дисперсионного уравнения, которые необходимы для нахождения волновых характеристик, имеет следующую схему (рисунок 4.2):

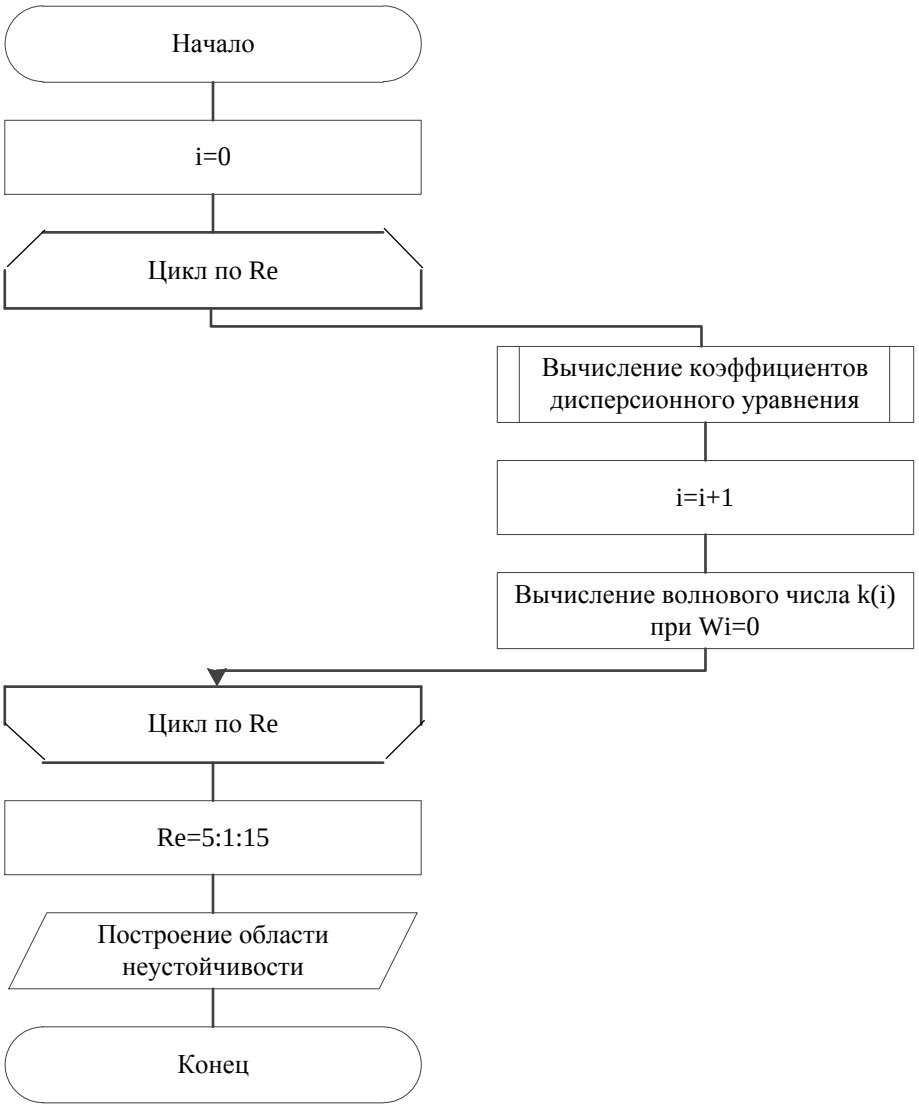

Рисунок 4.2 – Схема функции для вычисления коэффициентов дисперсионного уравнения

Алогоритм для построения области неустойчивости жидкой пленки при волновом течении изображен на рисунке 4.3.

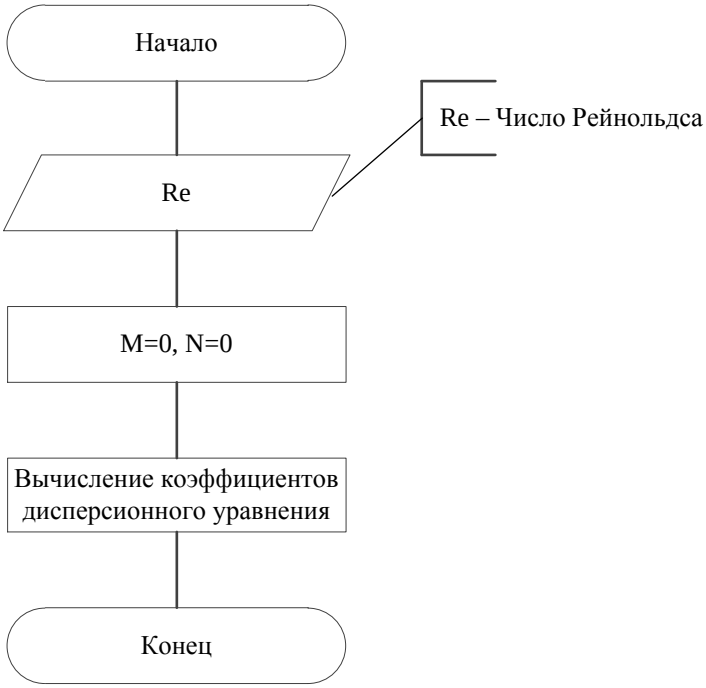

Рисунок 4.3 – Алгоритм для определения области неустойчивости жидкой пленки при волновом течении

4.2 Неустойчивость течения жидких пленок при свободном стекании

Рассчитаны волновые характеристики жидкой пленки для рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса при отсутствии температуры ($M = 0$) и ПАВ ($N = 0$). График частоты изображен на рисунке 4.4.

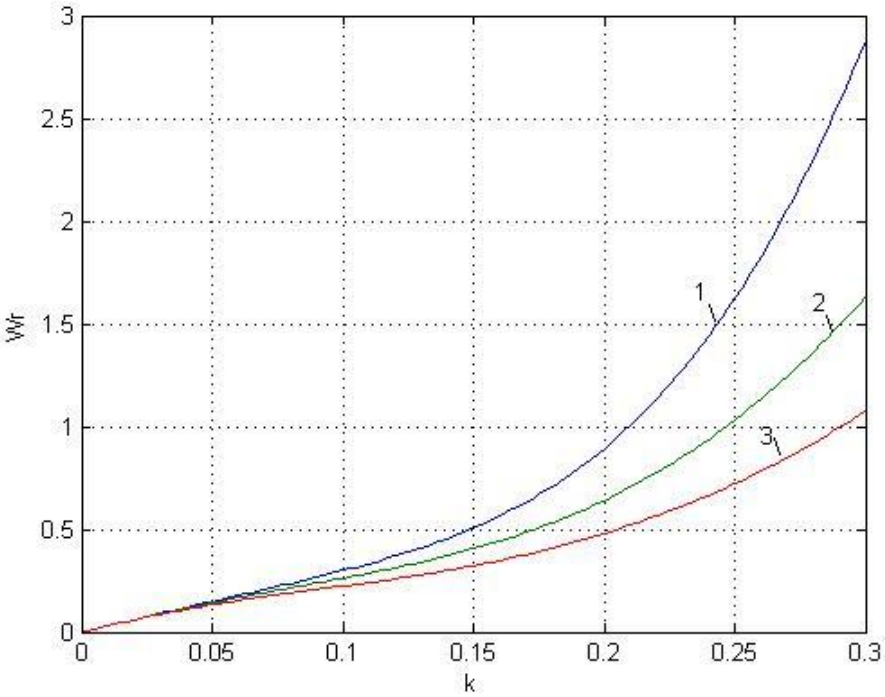

Рисунок 4.4 – Частота при $\mathrm{M} = 0$ и $\mathrm{N} = 0$:
$1 - \mathrm{Re} = 5;\ 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

Результаты расчёта величины инкремента приведены на рисунке 4.5.

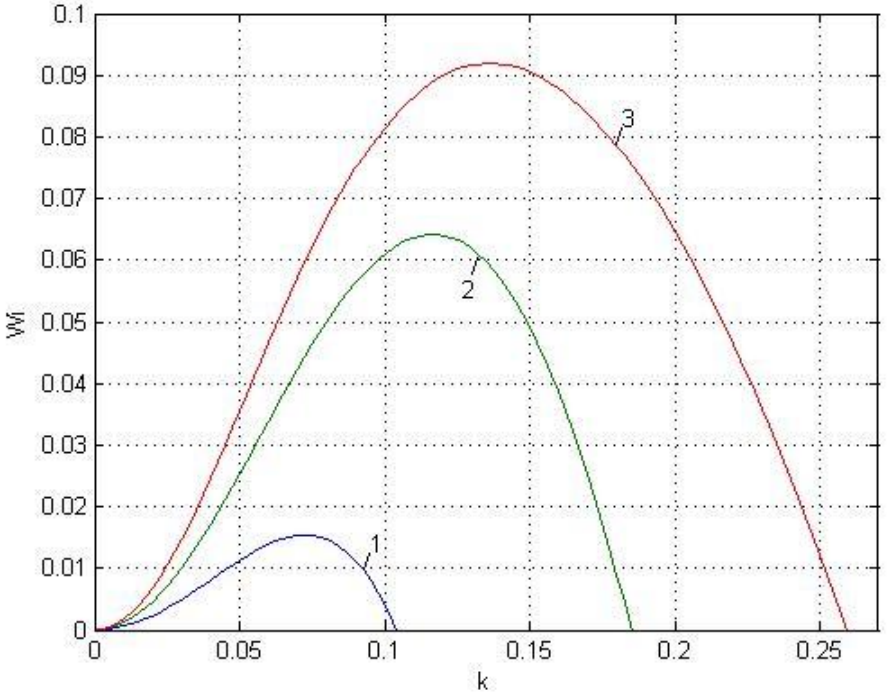

Рисунок 4.5 – Инкремент при $\mathrm{M} = 0$ и $\mathrm{N} = 0$:
$1 - \mathrm{Re} = 5;\ 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

График фазовой скорости представлен на рисунке 4.6:

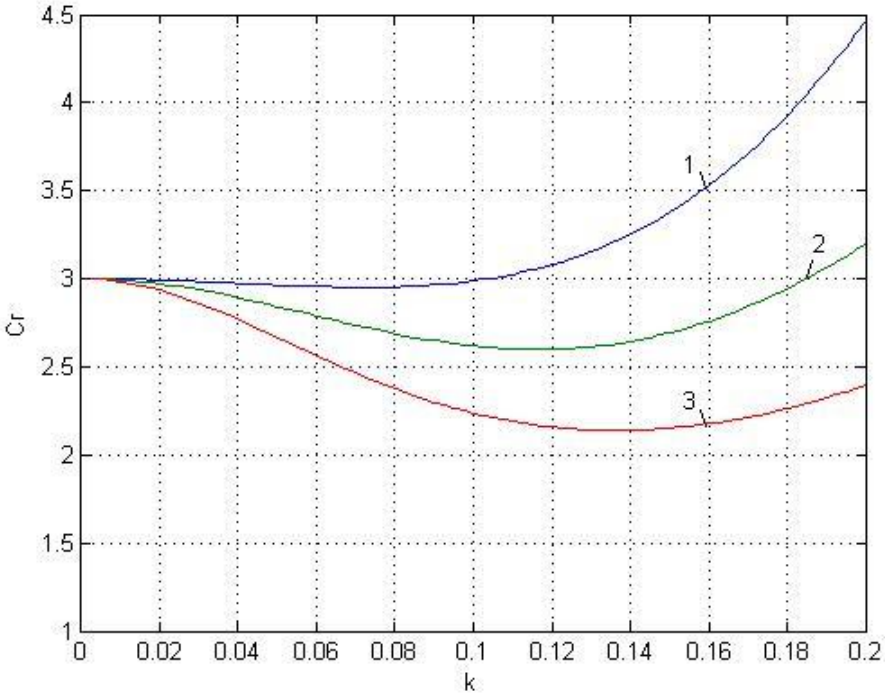

Рисунок 4.6 – Фазовая скорость при $\mathrm{M} = 0$ и $\mathrm{N} = 0$:
$1 - \mathrm{Re} = 5; 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

Возьмем максимальные значения для инкремента и минимальные значения для фазовой скорости при числах Рейнольдса $Re \in [5; 10]$ (таблица 4.1).

Таблица 4.1

Значения волновых характеристик при свободном стекании

Re	Волновое число k	Инкремент ω_{imax}	Фазовая скорость C_{rmin}
5	0,0725	0,015357	2,952009
6	0,0825	0,023866	2,910501
7	0,0925	0,033754	2,852326
8	0,1025	0,044277	2,778613
9	0,1100	0,054639	2,692657
10	0,1175	0,064171	2,598934

Течение жидкой пленки под воздействием силы тяжести неустойчиво в диапазоне чисел Рейнольдса $Re \in [5; 15]$, зона неустойчивости расширяется по диапазону волновых чисел k с увеличением значений числа Рейнольдса Re (рисунок 4.7).

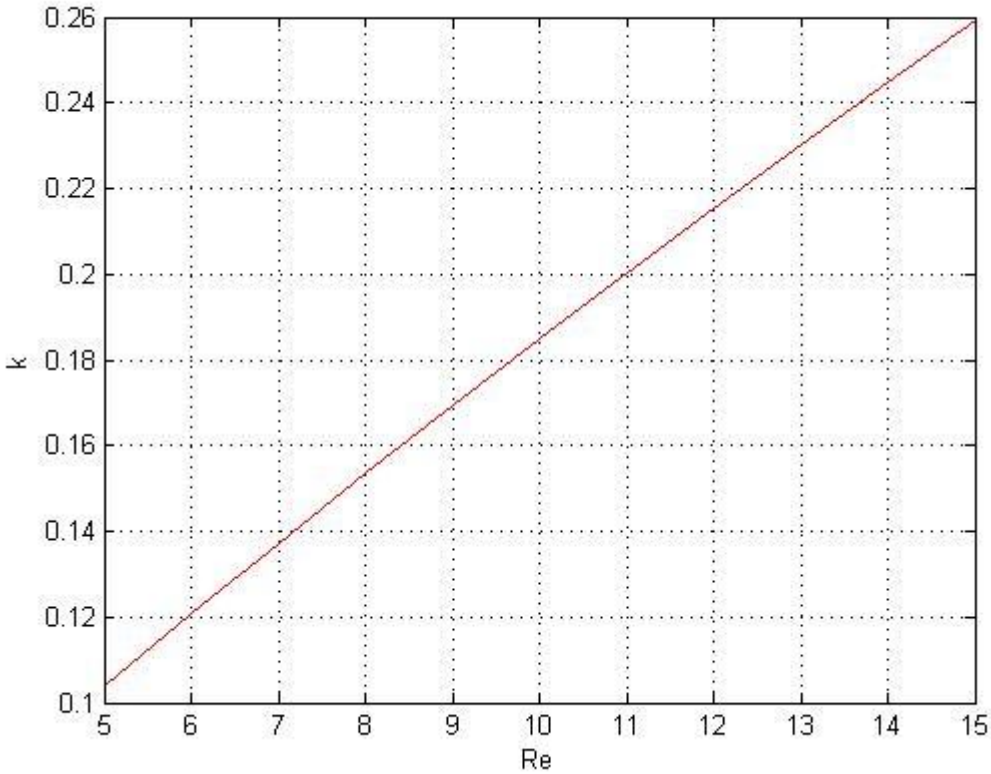

Рисунок 4.7 – Область неустойчивости
при $\omega_i = 0, M = 0, N = 0$

4.3 Влияние поверхностно-активных веществ на характеристики и неустойчивость течения жидких пленок

Рассчитаны волновые характеристики жидкой пленки для рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса при отсутствии температуры ($M = 0$) и в присутствии ПАВ ($N = 1$). Графики частоты, инкремента и фазовой скорости изображены на рисунках 4.8–4.10.

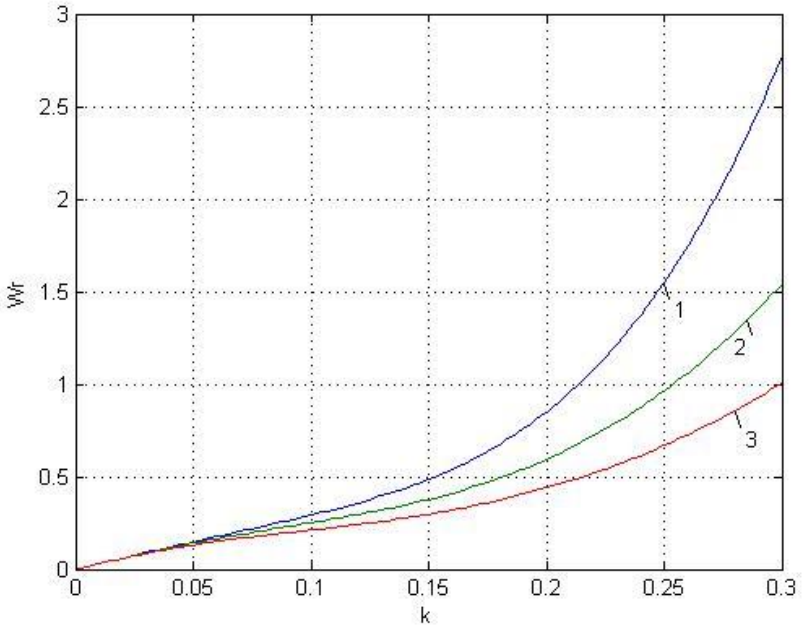

Рисунок 4.8 – Частота при $\mathrm{M} = 0$ и $\mathrm{N} = 1$:
$1 - \mathrm{Re} = 5;\ 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

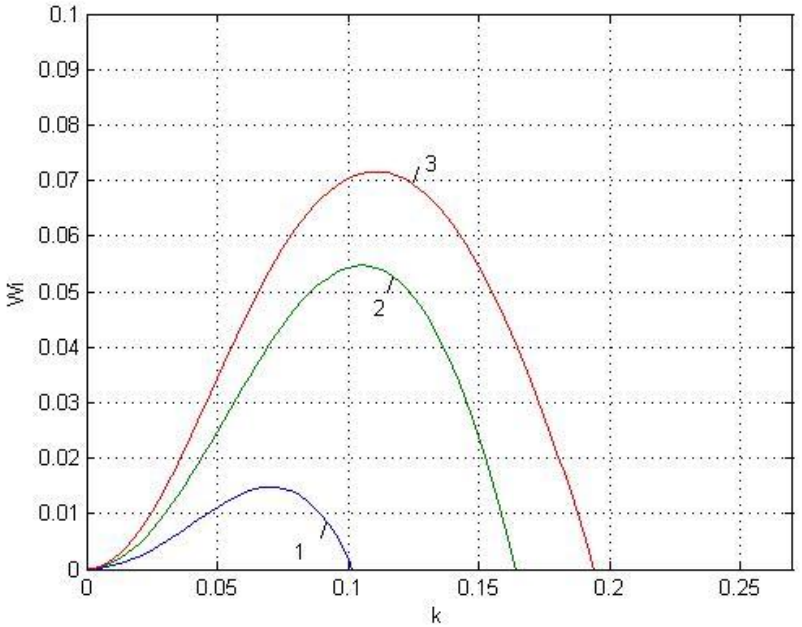

Рисунок 4.9 – Инкремент при $\mathrm{M} = 0$ и $\mathrm{N} = 1$:
$1 - \mathrm{Re} = 5;\ 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

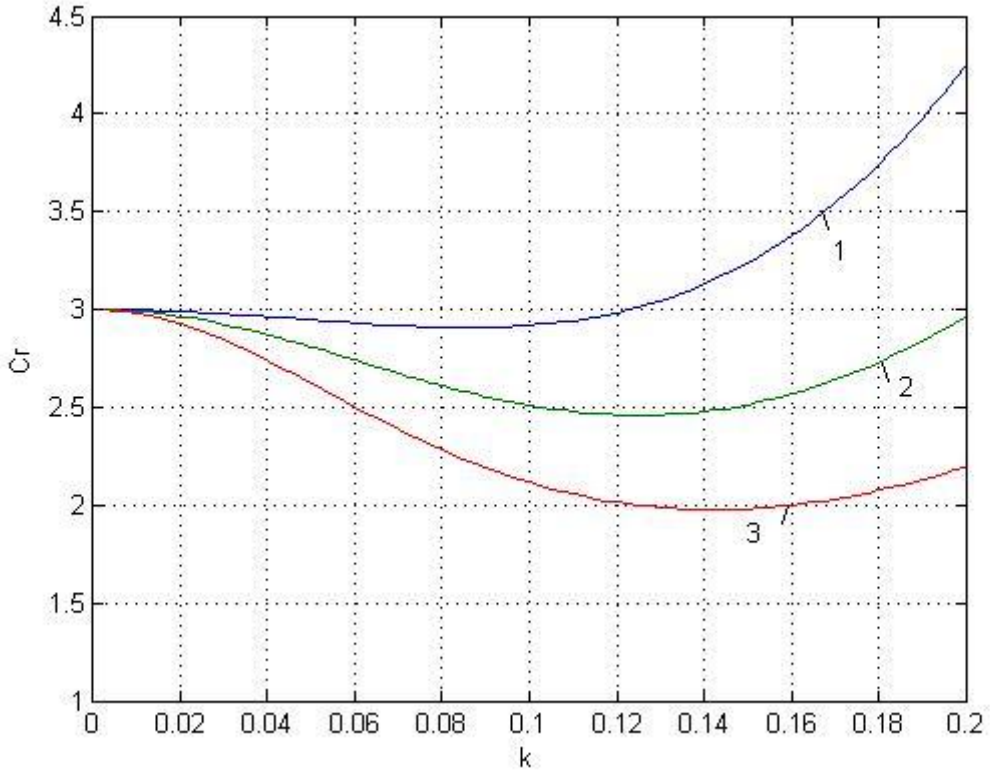

Рисунок 4.10 – Фазовая скорость при $\mathrm{M} = 0$ и $\mathrm{N} = 1$:
$1 - \mathrm{Re} = 5; 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

Возьмем максимальные значения для инкремента и минимальные значения для фазовой скорости при числах Рейнольдса $Re \in [5; 10]$ (таблица 4.2).

Таблица 4.2

Значения волновых характеристик при влиянии ПАВ

Re	Волновое число k	Инкремент ω_{imax}	Фазовая скорость C_{rmin}
5	0,0700	0,014755	2,907733
6	0,0800	0,022468	2,845408
7	0,0900	0,031011	2,765324
8	0,0950	0,039639	2,670917
9	0,1025	0,047678	2,567158
10	0,1050	0,054692	2,459291

Область неустойчивости изображена на рисунке 4.11.

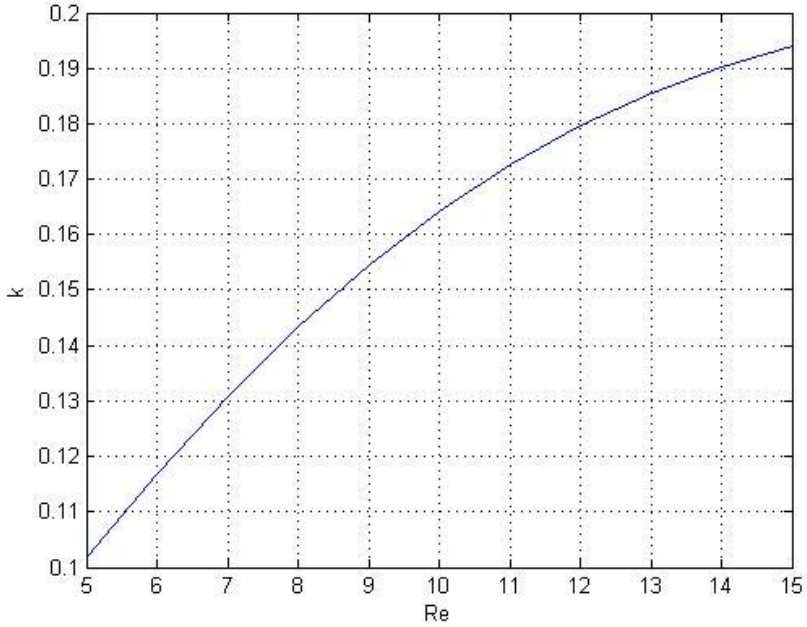

Рисунок 4.11 – Область неустойчивости
при $\omega_i = 0, \mathrm{M} = 0, N = 0$

Таким образом, ПАВ, растекаясь по поверхности жидкого слоя, образуют очень тонкие пленки, что приводит к уменьшению частоты (рисунок 4.12–4.13), инкремента (рисунок 4.14–4.15), фазовой скорости (рисунок 4.16–4.17) и сокращению по диапазону волнового числа (рисунок 4.18) области неустойчивости.

График частоты:

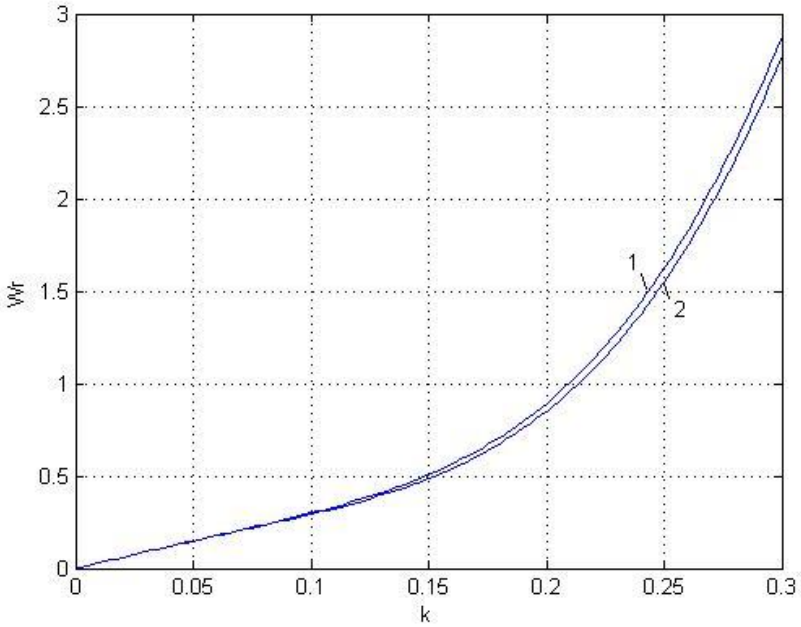

Рисунок 4.12 – Частота при $\mathrm{M} = 0, \mathrm{Re} = 5$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

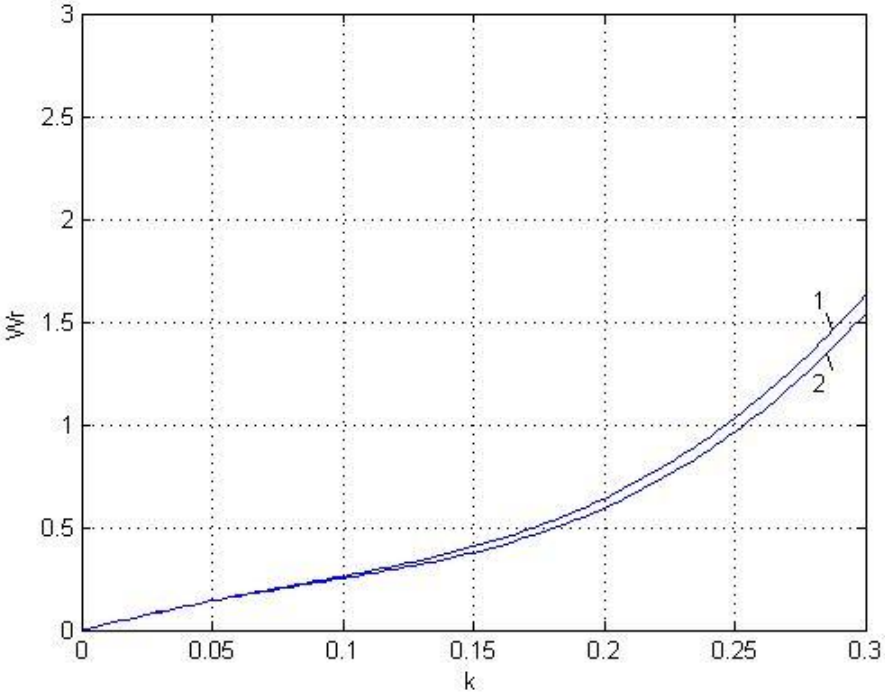

Рисунок 4.13 – Частота при $\mathrm{M} = 0, \mathrm{Re} = 10$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

График инкремента:

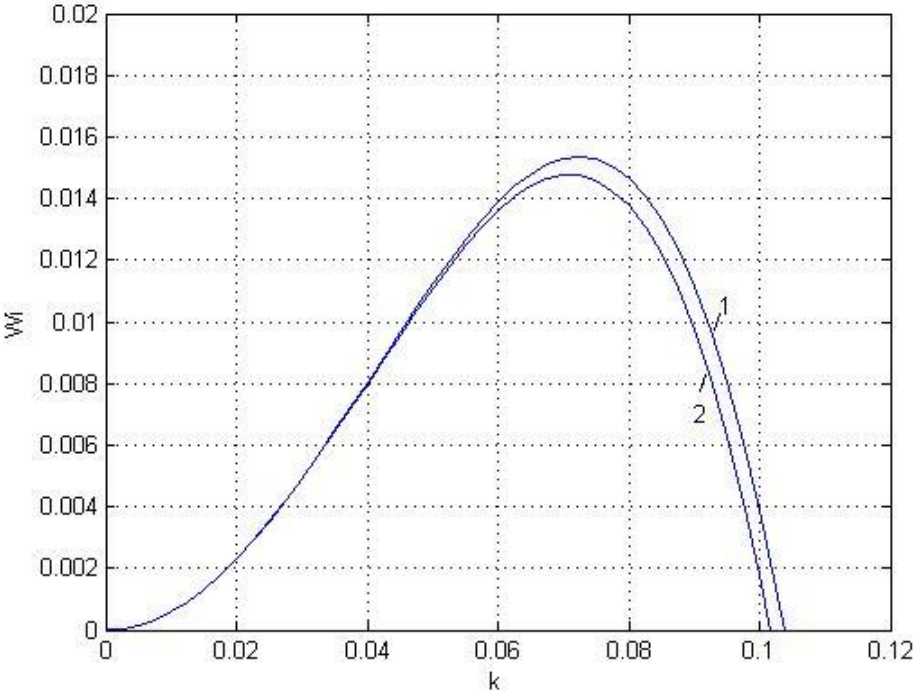

Рисунок 4.14 – Инкремент при $\mathrm{M} = 0, \mathrm{Re} = 5$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

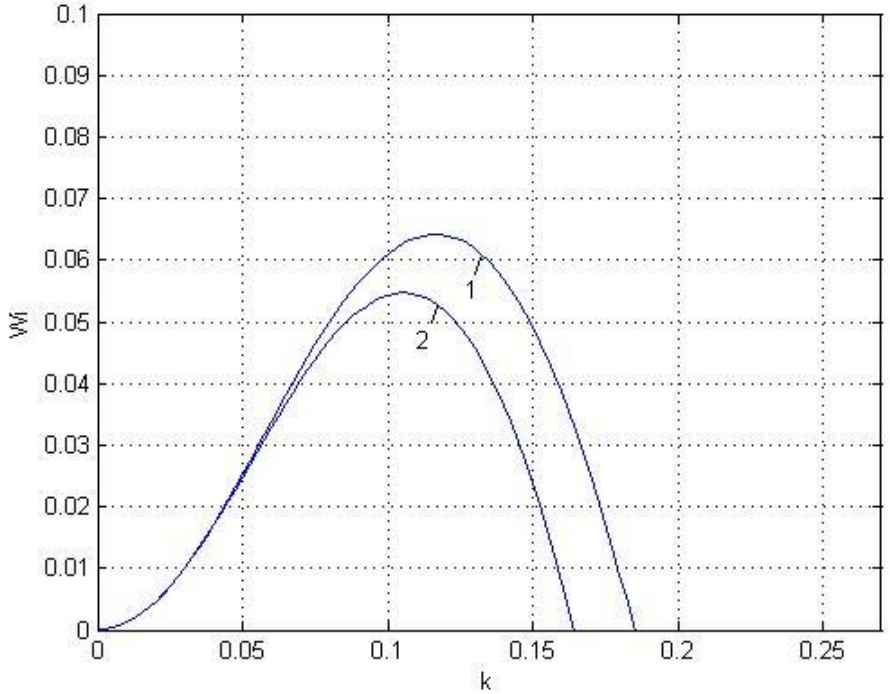

Рисунок 4.15 – Инкремент при $\mathrm{M} = 0, \mathrm{Re} = 10$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

График фазовой скорости:

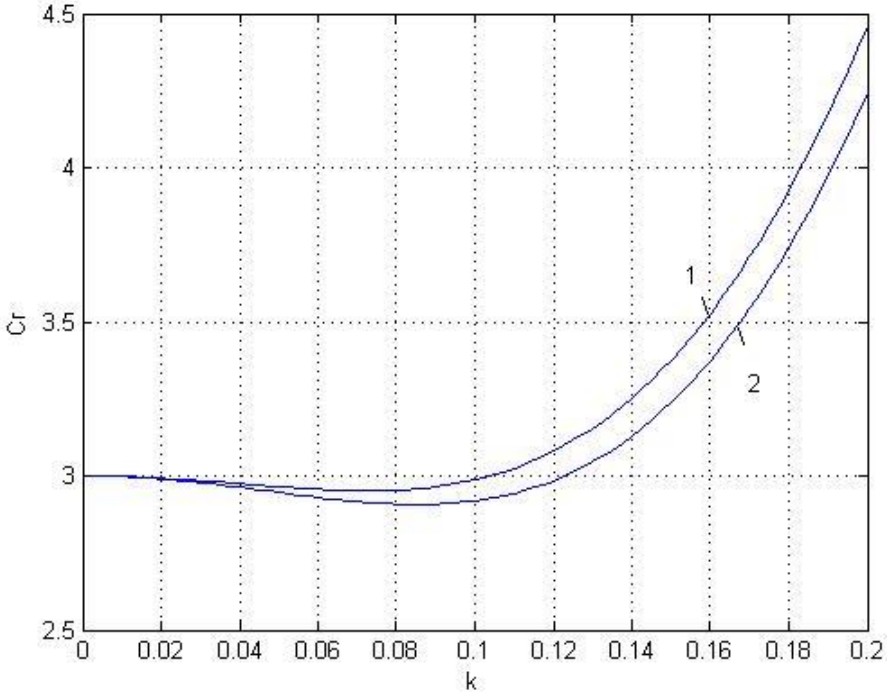

Рисунок 4.16 – Фазовая скорость при $\mathrm{M} = 0, \mathrm{Re} = 5$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

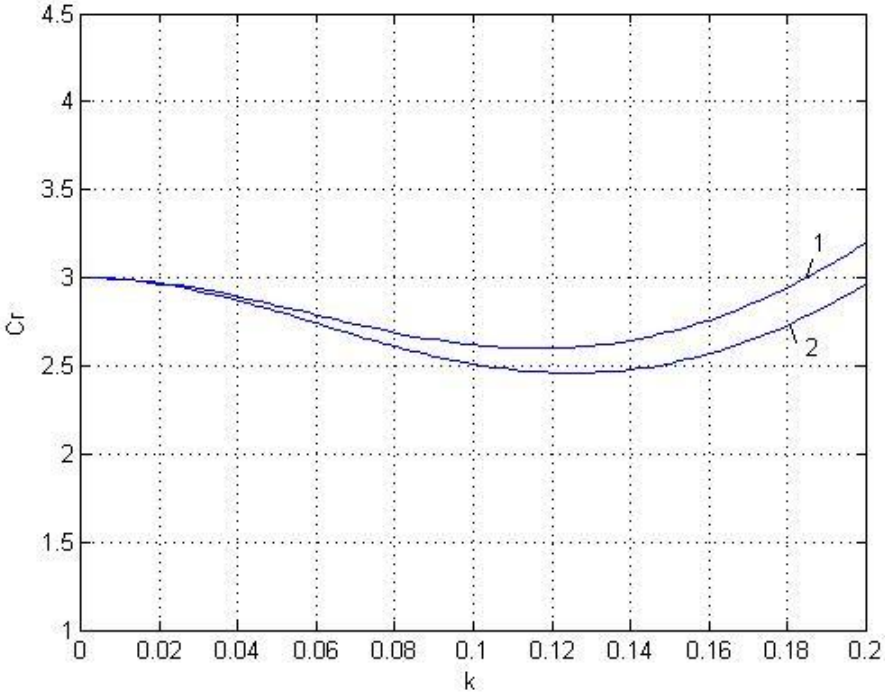

Рисунок 4.17 – Фазовая скорость при $\mathrm{M} = 0, \mathrm{Re} = 10$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

График неустойчивости:

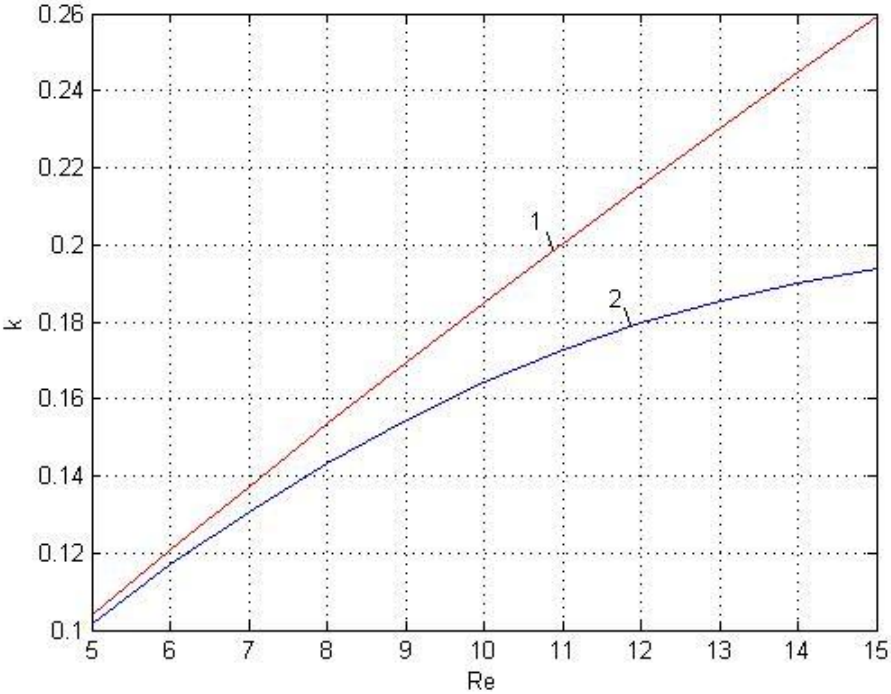

Рисунок 4.18 – Область неустойчивости при $\omega_{\mathrm{i}} = 0, \mathrm{M} = 0$:
$1 - N = 0, 2 - N = 1$

4.4 Неустойчивость течения жидких пленок при наличии температуры

Рассчитаны волновые характеристики жидкой пленки для рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса при наличии температуры ($M = 1$) и отсутствии ПАВ ($N = 0$). Графики частоты, инкремента и фазовой скорости изображены на рисунках 4.19–4.21.

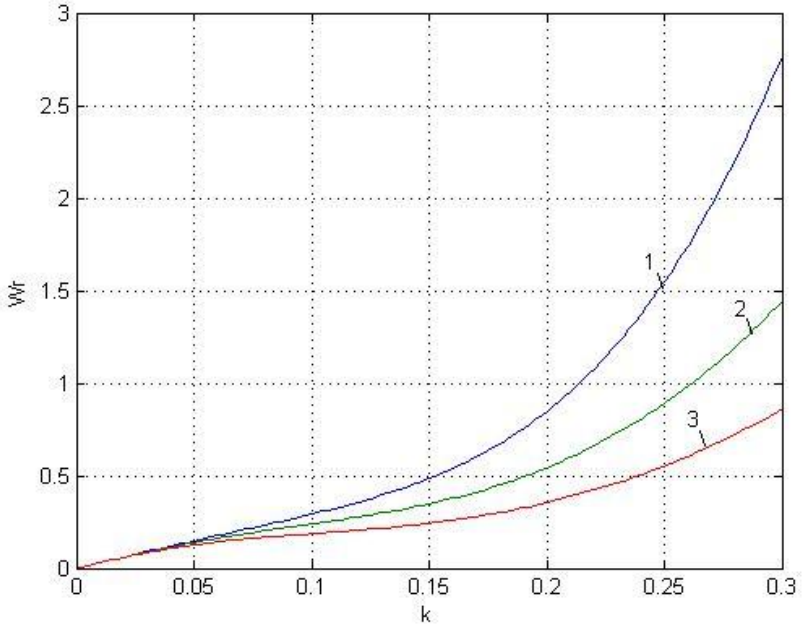

Рисунок 4.19 – Частота при $\mathrm{M} = 1$ и $\mathrm{N} = 0$:
$1 - \mathrm{Re} = 5;\ 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

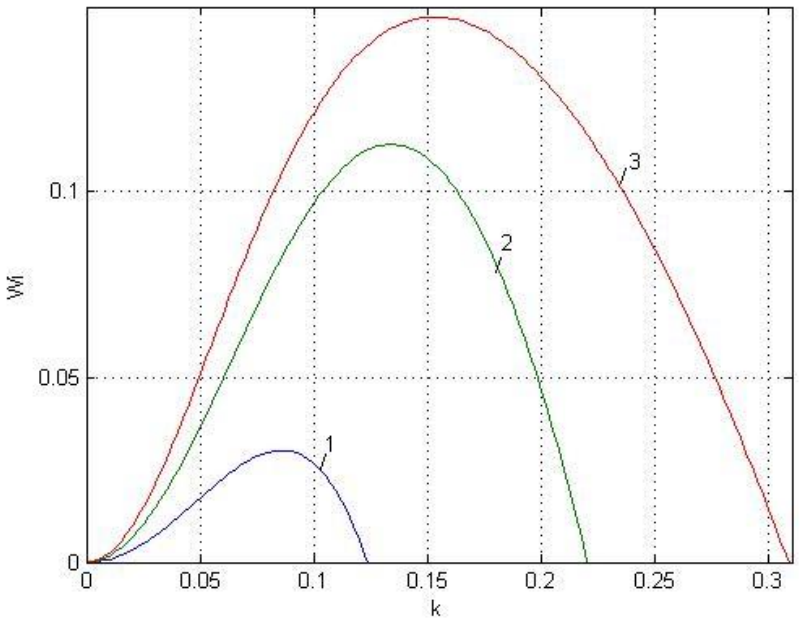

Рисунок 4.20 – Инкремент при $\mathrm{M} = 1$ и $\mathrm{N} = 0$:
$1 - \mathrm{Re} = 5;\ 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

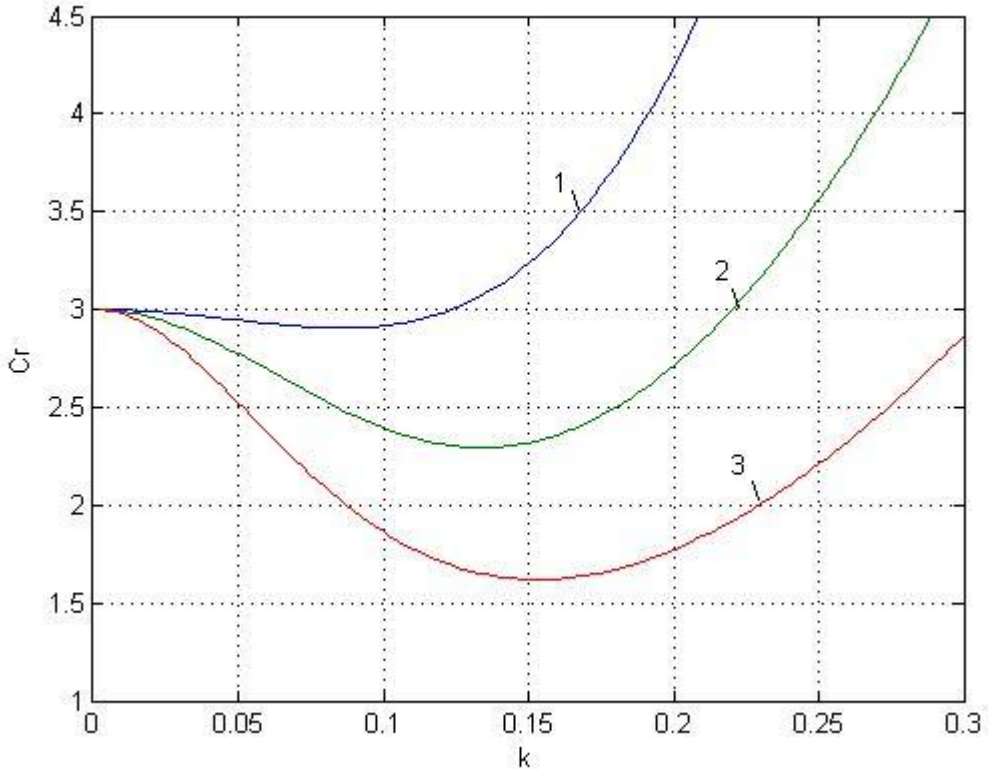

Рисунок 4.21 – Фазовая скорость при $\mathrm{M} = 1$ и $\mathrm{N} = 0$:
$1 - \mathrm{Re} = 5; 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

Возьмем максимальные значения для инкремента и минимальные значения для фазовой скорости при числах Рейнольдса $Re \in [5; 10]$ (таблица 4.3).

Таблица 4.3

Значения волновых характеристик при влиянии температуры

Re	Волновое число k	Инкремент ω_{imax}	Фазовая скорость C_{rmin}
5	0,0850	0,030200	2,905624
6	0,0975	0,046204	2,826736
7	0,1100	0,063992	2,720033
8	0,1200	0,081906	2,590468
9	0,1275	0,098541	2,445709
10	0,1350	0,112888	2,294451

Область неустойчивости изображена на рисунке 4.22.

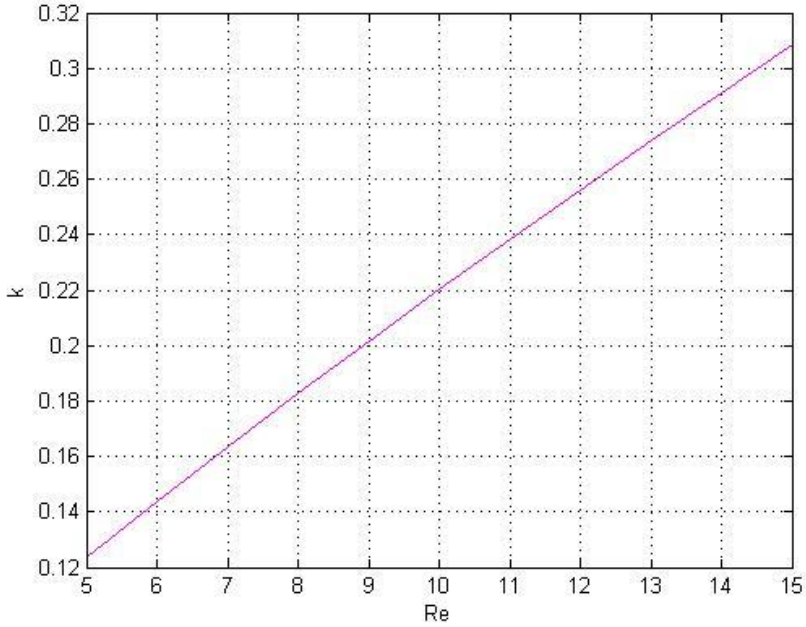

Рисунок 4.22 – Область неустойчивости
при $\omega_i = 0, \mathrm{M} = 0, N = 0$.

4.5 Неустойчивость течения жидких пленок при совместном влиянии температуры и поверхностно-активных веществ

Рассчитаны волновые характеристики жидкой пленки для диапазона чисел Рейнольдса при наличии температуры ($M = 1$) и ПАВ ($N = 1$). Графики частоты, инкремента и фазовой скорости изображены на рисунках 4.23 – 4.25.

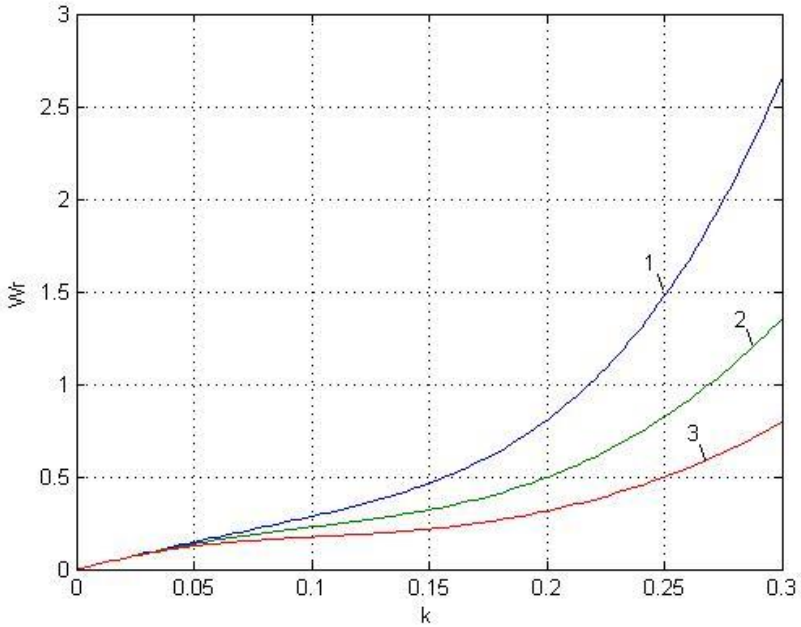

Рисунок 4.23 – Частота при $\mathrm{M} = 1$ и $\mathrm{N} = 1$:
$1 - \mathrm{Re} = 5;\ 2 - \mathrm{Re} = 10;\ 3 - \mathrm{Re} = 15$

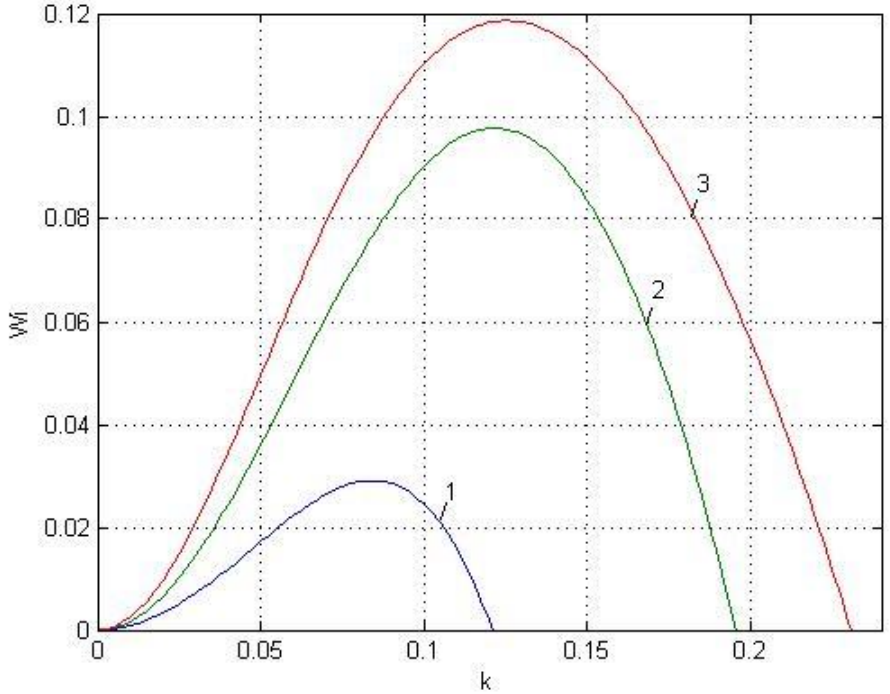

Рисунок 4.24 – Инкремент при $M = 1$ и $N = 1$:
$1 - Re = 5;\ 2 - Re = 10;\ 3 - Re = 15$

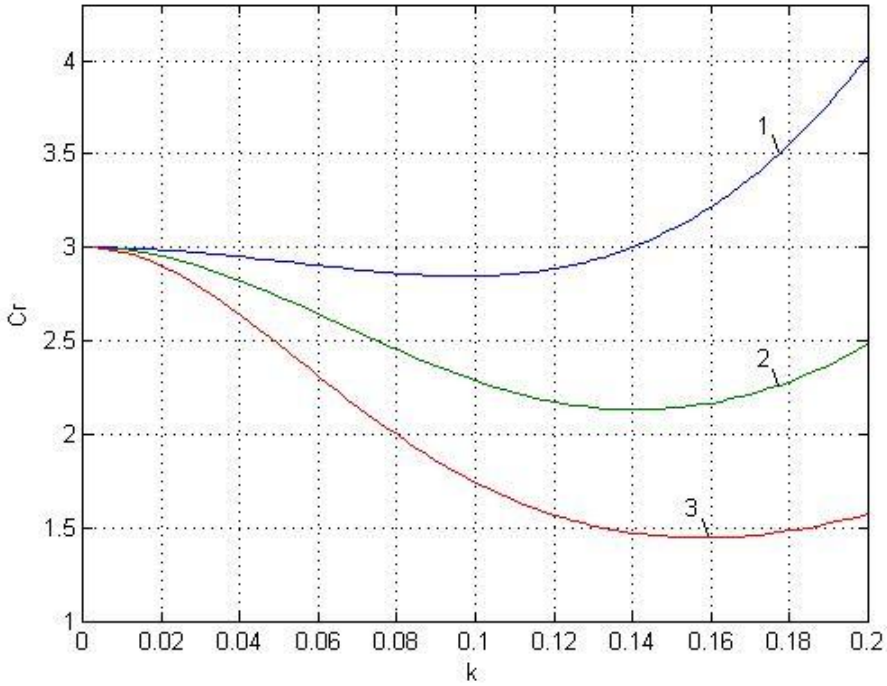

Рисунок 4.25 – Фазовая скорость при $M = 1$ и $N = 1$:
$1 - Re = 5; 2 - Re = 10;\ 3 - Re = 15$

Возьмем максимальные значения для инкремента и минимальные значения для фазовой скорости при числах Рейнольдса $Re \in [5; 10]$ (таблица 4.5).

Таблица 4.4

Значения волновых характеристик при совместном влиянии ПАВ и температуры

Re	Волновое число k	Инкремент ω_{imax}	Фазовая скорость C_{rmin}
5	0,0850	0,029057	2,847665
6	0,0950	0,043590	2,742829
7	0,1050	0,059044	2,610352
8	0,1125	0,073899	2,457917
9	0,1175	0,086994	2,295276
10	0,1225	0,097696	2,131270

Область неустойчивости изображена на рисунке 4.26.

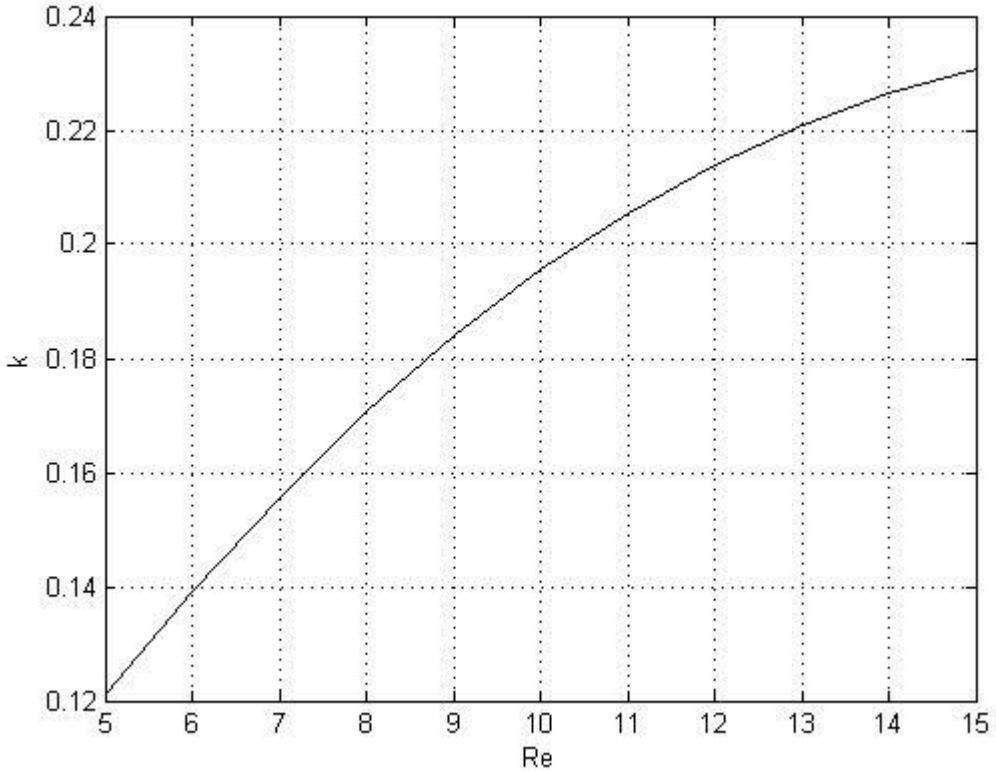

Рисунок 4.26 – Область неустойчивости при $\omega_i = 0, M = 1, N = 1$

Таким образом, температура, воздействующая на поверхность, по которой течет жидкая пленка, увеличивает значения волновых характеристик (рисунок 4.27–4.33). Однако если добавить ПАВ, опять же произойдет уменьшение значений частоты (рисунок 4.27–4.28), инкремента (рисунок 4.29–4.30), фазовой скорости (рисунок 4.31–4.32) и сокращение по диапазону волнового числа области неустойчивости (рисунок 4.33).

График частоты:

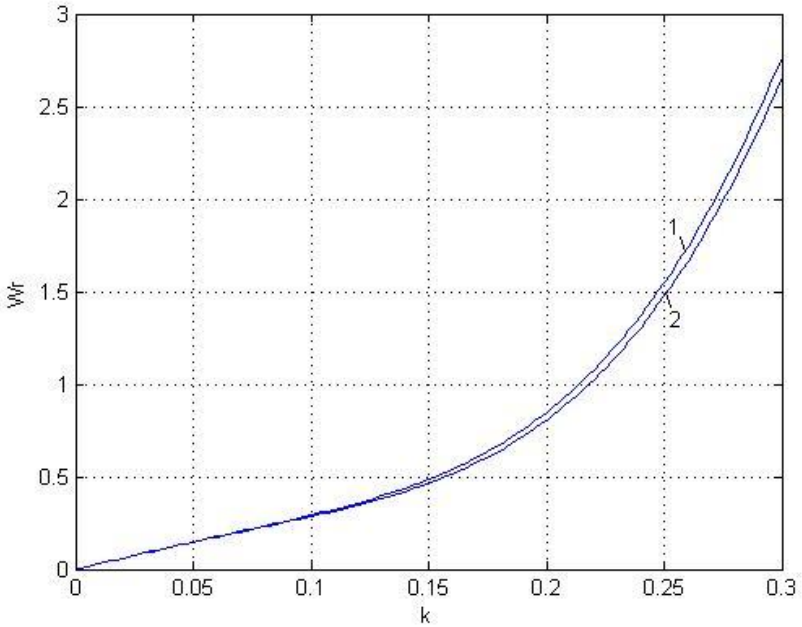

Рисунок 4.27 – Частота при $\mathrm{M} = 1, \mathrm{Re} = 5$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

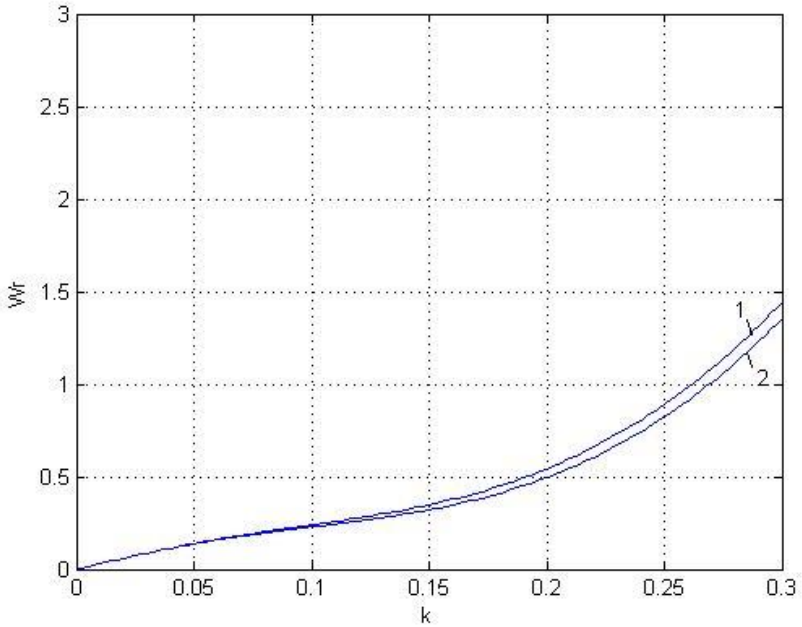

Рисунок 4.28 – Частота при $\mathrm{M} = 1, \mathrm{Re} = 10$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

График инкремента:

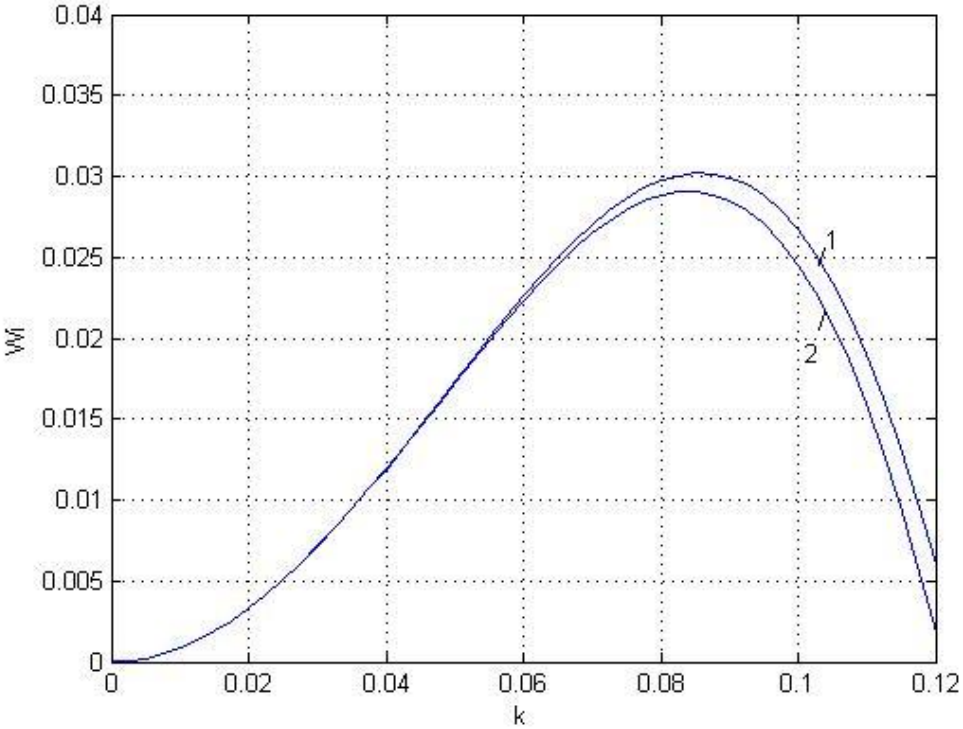

Рисунок 4.29 – Инкремент при $\mathrm{M} = 1, \mathrm{Re} = 5$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

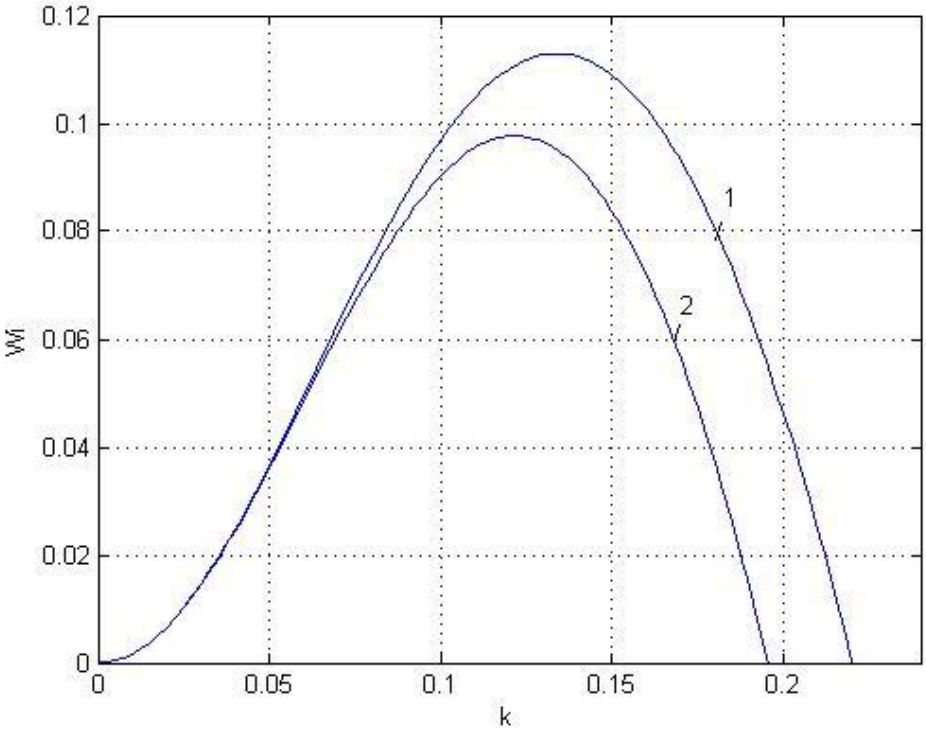

Рисунок 4.30 – Инкремент при $\mathrm{M} = 1, \mathrm{Re} = 10$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

График фазовой скорости:

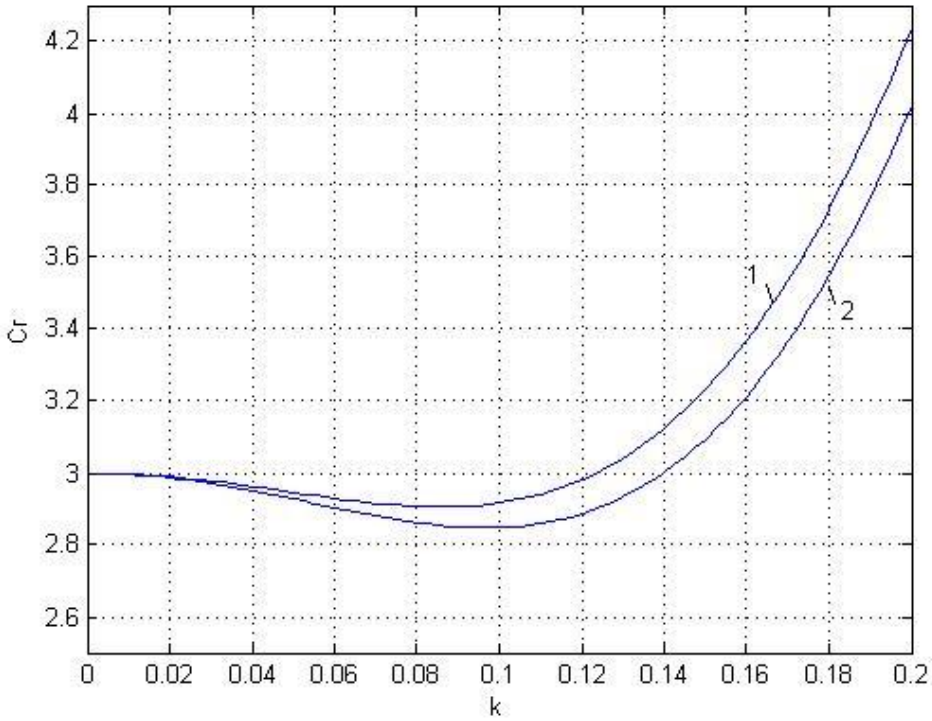

Рисунок 4.31 – Фазовая скорость при $\mathrm{M} = 1, \mathrm{Re} = 5$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

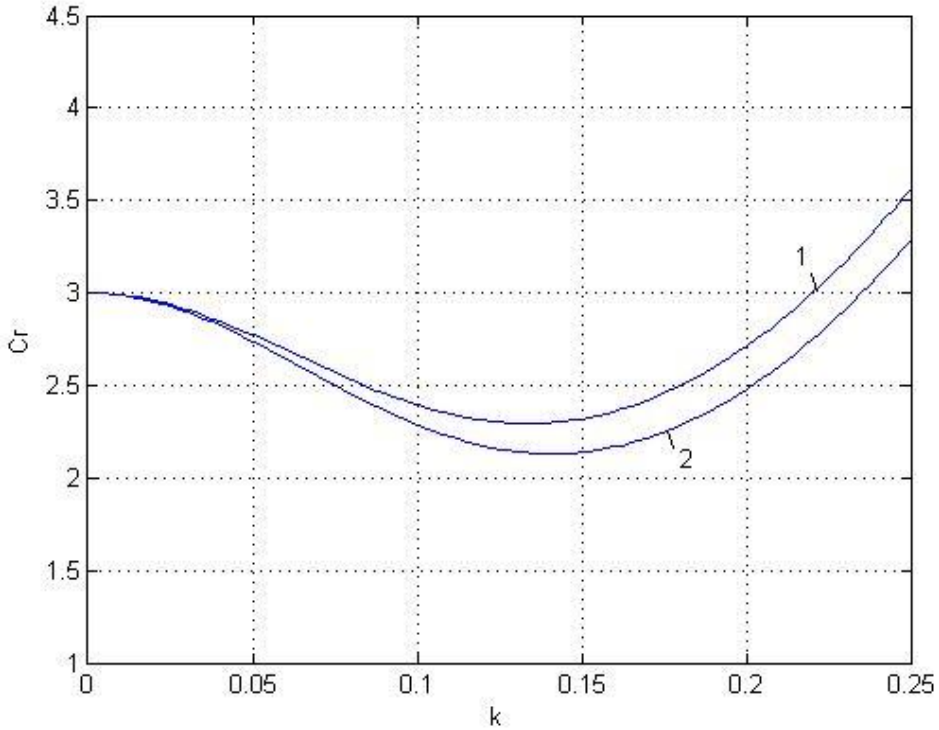

Рисунок 4.32 – Фазовая скорость при $\mathrm{M} = 1, \mathrm{Re} = 10$:
$1 - \mathrm{N} = 0;\ 2 - \mathrm{N} = 1$

Область неустойчивости:

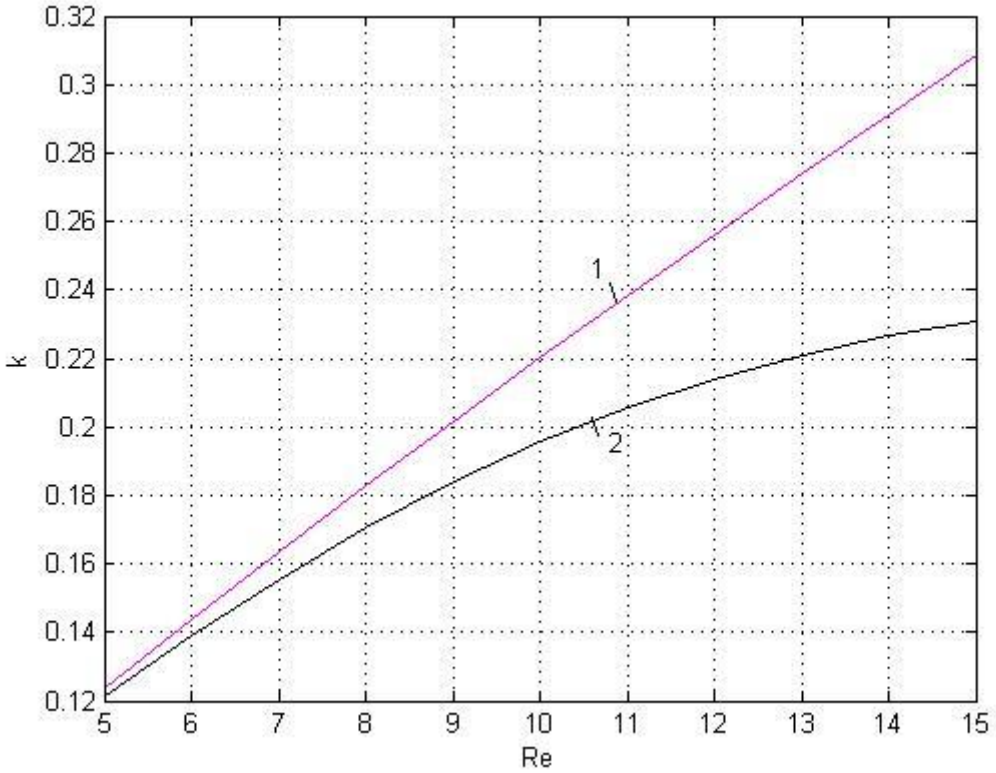

Рисунок 4.33 – Область неустойчивости при $\omega_i = 0, \mathrm{M} = 1$: $1 - N = 0, 2 - N = 1$

Максимальное значение инкремента и минимальные значения для фазовой скорости при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 5, \mathrm{Re} = 10$ приведены в таблицах 4.5–4.6 соответственно.

Таблица 4.5

Значения волновых характеристик при $\mathrm{Re} = 5$

M	N	Волновое число k	Инкремент ω_{imax}	Фазовая скорость C_{rmin}
0	0	0,0725	0,015357	2,952009
0	1	0,0700	0,014755	2,907733
1	0	0,0850	0,030200	2,905624
1	1	0,0850	0,029057	2,847665

Таблица 4.6

Значения волновых характеристик при $\mathrm{Re} = 10$

M	N	Волновое число k	Инкремент ω_{imax}	Фазовая скорость C_{rmin}
0	0	0,1175	0,064171	2,598934
0	1	0,1050	0,054692	2,459291
1	0	0,1350	0,112888	2,294451
1	1	0,1225	0,097696	2,131270

4.6 Сравнение результатов вычислительных экспериментов с теоретическими и экспериментальными данными других авторов.

Области неустойчивости при свободном стекании пленки, взятые для сравнения из работ [1, 13–17] изображены на рисунке 4.34.

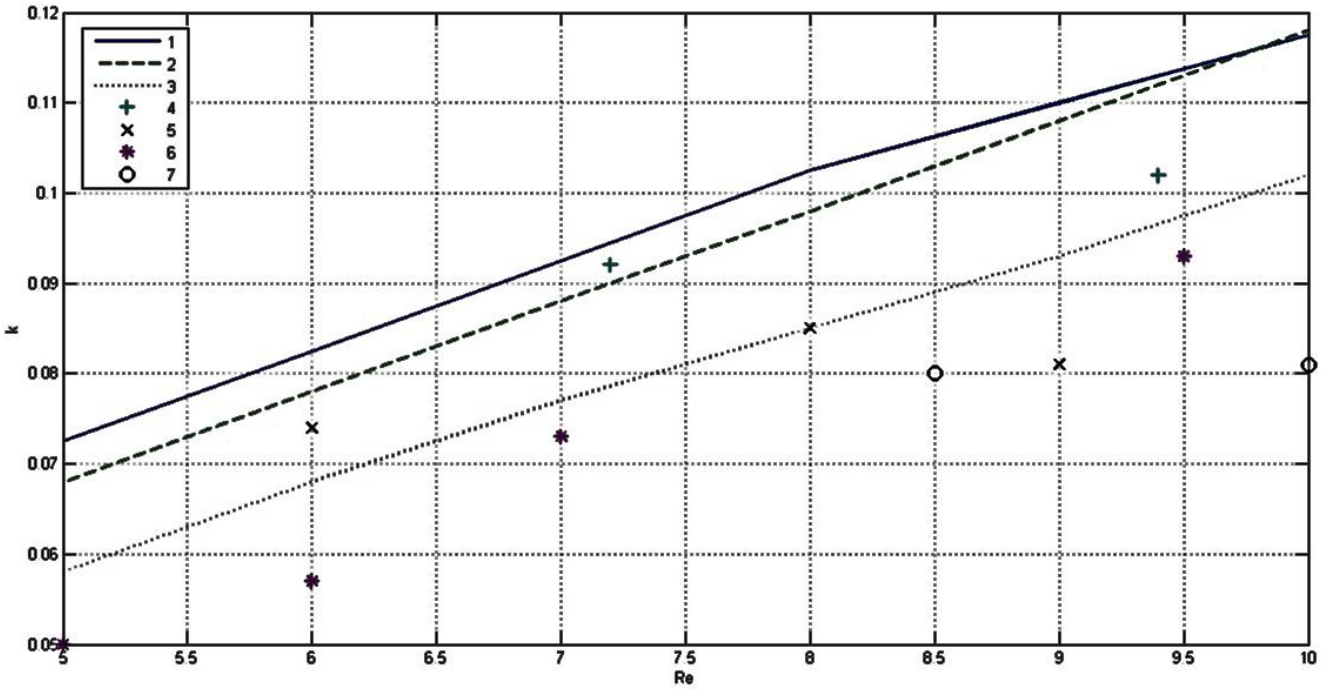

Рисунок 4.34 – Области неустойчивости при свободном стекании пленки

Кривые 1–3 являются теоретическими, а данные 4–7 являются экспериментальными.

Кривая 1 построена по данным, полученным в ходе вычислительного эксперимента. Кривая 2 построена по результатам работы Гжевика [13]. Кривая 3 построена по данным исследования Yih [14]. Значения 4 взяты из работы Джонса и Уитакера [15]. Значения 5 взяты из работы Капицы [16]. Значения 6 взяты из работы Стейнхопа и Аллена [17]. Значения 7 взяты из работы Олевского [1].

Фазовые скорости при свободном стекании пленки, взятые для сравнения из работ [15–22], изображены на рисунке 4.35.

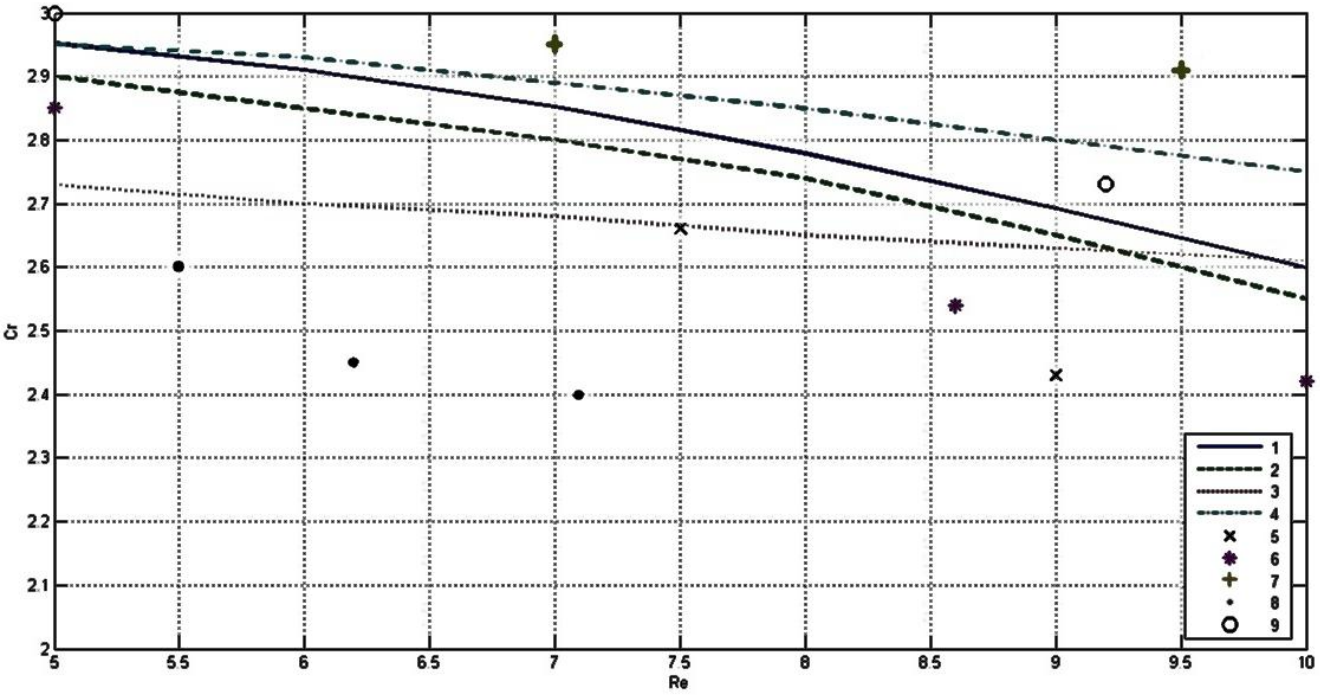

Рисунок 4.35 – Фазовые скорости
при свободном стекании пленки

Кривые 1–4 являются теоретическими, а данные 5–9 являются экспериментальными.

Кривая 1 построена по результатам вычислительных экспериментов, проведенных в данной работе. Кривая 2 построена по данным из работы Левича и Крылова [18]. Кривая 3 построена по результатам работы Холпанова и Шкадова [19]. Кривая 4 построена по данным исследований Алексеенко [20]. Значения 5 взяты из работы Джонса и Уитакера [15]. Значения 6 взяты из работы Капицы [16]. Значения 7 взяты из работы Стейнхопа и Аллена [17]. Значения 8 взяты из исследований Массота и Ирани [21]. Значения 9 взяты из исследований Пенева и Крылова [22].

Выводы по главе 4

1. Выведены аналитические зависимости волновых характеристик $(\omega_r, \omega_i, C_r)$ от физико-химических факторов (N, M, σ)

2. Исследована неустойчивость жидкой пленки при свободном стекании. Рассчитаны инкремент, частота, фазовая скорость при $Re \in [5; 10]$. Определены области неустойчивости жидкой пленки при волновом течении.

3. Исследовано влияние ПАВ на неустойчивость течения жидкой пленки. Выяснено, что под влиянием ПАВ уменьшается частота, инкремент, фазовая

скорость, сокращается область неустойчивости по сравнению со свободным стеканием.

4. Исследовано влияние температуры на неустойчивость течения жидкой пленки. По сравнению со свободным стеканием частота и инкремент увеличиваются под влиянием высоких температур (не достигая кипения), область неустойчивости расширяется по диапазону волновых чисел, а фазовая скорость уменьшается при влиянии температуры на поверхность, по которой течет жидкая пленка.

5. Проведено исследование совместного влияния ПАВ и температуры на неустойчивость течения жидкой пленки. Несмотря на то что под влиянием температуры увеличиваются значения частоты и инкремента и расширяется область неустойчивости, присутствие ПАВ уменьшает все эти характеристики. Однако фазовая скорость продолжает уменьшается при совместном воздействии температуры и ПАВ.

6. Удовлетворительное совпадение с теоретическими и экспериментальными данными других исследователей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проделанной работы можно сделать следующие выводы:

1. Представлена система уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности с граничными условиями, учитывающие нерастворимые поверхностно-активные вещества, температуру и поверхностное натяжение.

2. Получены аналитические зависимости для волновых характеристик жидкой пленки: частота, инкремент, фазовая скорость для диапазона чисел Рейнольдса $Re \in [5; 10]$.

3. Разработаны алгоритмы и программы для расчета волновых характеристик и для определения области неустойчивости.

4. Рассчитаны инкремент, частота, фазовая скорость и построена область неустойчивости при влияниях поверхностно-активных веществ и температуры, как при свободном стекании, так и при совместном их воздействии. Выяснено, что под влиянием ПАВ уменьшаются волновые характеристики жидкой пленки, сокращается область неустойчивости по сравнению со свободным стеканием. В отличии от свободного стекания частота и инкремент увеличиваются под воздействием температуры, область неустойчивости расширяется по диапазону волновых чисел, а фазовая скорость уменьшается при влиянии температуры на поверхность, по которой течет жидкая пленка. Несмотря на то, что под влиянием температуры увеличиваются значения частоты и инкремента и расширяется область неустойчивости, присутствие ПАВ уменьшает все эти характеристики. Однако фазовая скорость продолжает уменьшается при совместном воздействии температуры и ПАВ.

5. Выяснено, что теоретические и экспериментальные данные других исследователей в данной области имеют удовлетворительное совпадение с полученными результатами вычислительных экспериментов.

6. Полученные результаты можно использовать для расчета технологических процессов, происходящих в жидкой пленке, в различных тепло - и массообменных пленочных аппаратах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Олевский, В.М. Пленочная тепло- и массообменная аппаратура / В.М. Олевский, В.Р. Ручинский, А.М. Кашников, В.И. Чернышов. – М.: Химия, 1998. – 240 с.
2. Прокудина, Л.А. Влияние неоднородности поверхностного натяжения на волновое течение жидкой пленки / Л.А. Прокудина // Инженерно-физический журнал, 2014. – Т. 87, № 1. – С. 158-166.
3. Левич, В.Г. Физико-химическая гидродинамика / В.Г. Левич. – М.: Физматгиз, 1959. – 537 с.
4. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – Москва, 1960. – 675 с.
5. Седов, Л.И. Механика сплошной среды/ Л.И. Седов– М.: Наука, 1970.– 492 с.
6. Филиппов, Г.А. Гидродинамика и тепломассообмен в присутствии поверхностно-активных веществ / Г.А. Филиппов, Г.А. Салтанов, А.Н. Кукушкин. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 184 с.
7. Whitaker, S. Effect of surface active agents on the stability of falling liquid films / S. Whitaker // Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals – 1964. – V. 3, №2. – P. 132–142.
8. Капица, П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости / П.Л. Капица. – М.: Наука, 1949. – 325 с.
9. Benjamin, T.B. Fluid films / T.B. Benjamin // Journal Fluid Mechanics – 1957. – V. 2. – P. 554.
10. Reynolds, 0. Hydrodynamics / O. Reynolds // Lamb – 1945. – P. 631.
11. Савельев, И.В. Курс общей физики: Учебное пособие в 3-х т. Том 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – С. 214–215.
12. Прокудина, Л.А. Неустойчивость неизотермической жидкой пленки / Л.А. Прокудина, Г.П. Вяткин // Доклады РАН, 1998. – Т. 362., № 6. – С. 770–772.
13. Gjevik B. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films / B. Gjevik // The Physics of fluids. – 1970. – V. 13, №8. – P. 1918–1925.
14. Yih C. Stability of liquid flow down an inclined plane/ C. Yih // The Physics of fluids. – 1963. – V. 6, №3. – P. 321–334.
15. Jones L.O., Whitaker S. An experiment study of falling liquid films / L.O. Jones, S. Whitaker. // AIChE Journal. – 1966. –V. 12, №3. – P. 525–529.
16. Капица, П.Л., Капица С.П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости / П.Л. Капица, С.П. Капица. – ЖЭТФ, 1949. – Т. 19, №2.– 325 с.
17. Stainhorp F.P., Allen J.M. The development of ripples on the surface of liquid film flowing inside a vertical tube / F.P. Stainhorp, J.M. Allen. – London: Trans. Inst. Chem. Eng., 1965. – V. 43. – P. 785–791.
18. Левич В.Г., Крылов В.С., Воротилин В.П. О волновом режиме стекания тонких пленок жидкости / В.Г. Левич, В.С. Крылов, В.П. Воротилин. – ДАН СССР, 1968. – Т. 183, №6. – С. 1388–1391.

19. Холпанов Л.П., Шкадов В.Я. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов. – М.: Наука, 1990. – 341 с.

20. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке / С.В. Алексеенко, В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев. // ПМТФ, 1979. – Т. 20, №6. – С. 77–87.

21. Massot C., Irani F., Lightfoot E.N. The development of ripples on the surface of liquid film flowing inside a vertical tube / C. Massot, F. Irani, E.N. Lightfoot. // AIChE Journal. – 1966. –V. 12, №3. – P. 445–455.

22. Penev V., Krylov V.S., Boyadjiev Ch., Vorotilin V.P. Wavy flow of thin liquid films / V. Penev, V.S. Krylov, Ch. Boyadjiev, V.P. Vorotilin. // International journal of heat and mass transfer. – 1972. – V. 15, №7. – P. 1395–1406.

23. Прокудина Л.А., Сайтхужина А.Р. Математическое моделирование влияния поверхностно-активных веществ на неустойчивость жидких пленок // Научно-информационный центр «Знание» Сборник статей X Международная заочная конференция «Развитие науки в XXI веке» (15.02.2016 г.) г. Харьков Ч. 4, С.49 – 52.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Текст программы для нахождения волновых характеристик жидкой пленки

```
k=0:0.0025:0.5;

Re=5;
[ a1, a4, a6, a7, a11, Fx, sigma] = fun( Re );
X=a4.*(k.^3)-(a11.*k);
Y=a1.*(k.^4)-a6.*(k.^2)-(c./(Re.*PrKu));
Z=a7.*k;
Wr1=(X-Y.*Z)./(1+Z.^2);
Wi1=(Y+X.*Z)./(1+Z.^2);
Cr1=Wr1./k;

Re=10;
[ a1, a4, a6, a7, a11, Fx, sigma] = fun( Re );
X=a4.*(k.^3)-(a11.*k);
Y=a1.*(k.^4)-a6.*(k.^2)-(c./(Re.*PrKu));
Z=a7.*k;
Wr2=(X-Y.*Z)./(1+Z.^2);
Wi2=(Y+X.*Z)./(1+Z.^2);
Cr2=Wr2./k;

Re=15;
[ a1, a4, a6, a7, a11, Fx, sigma] = fun( Re );
X=a4.*(k.^3)-(a11.*k);
Y=a1.*(k.^4)-a6.*(k.^2)-(c./(Re.*PrKu));
Z=a7.*k;
Wr3=(X-Y.*Z)./(1+Z.^2);
Wi3=(Y+X.*Z)./(1+Z.^2);
Cr3=Wr3./k;

%Dependence Wr(k) by 5=<Re<=15
figure(1);
plot(k,Wr1,k,Wr2,k,Wr3);
xlabel('k'), ylabel('Wr');
axis([0 0.3 0 3]);
grid on,hold on;

%Dependence Wi(k) by 5=<Re<=15
figure(2);
plot(k,Wi1,k,Wi2,k,Wi3);
xlabel('k'), ylabel('Wi');
axis([0 0.27 0 0.1]);
grid on,hold on;

%Dependence Cr(k) by 5=<Re<=15
figure(3);
plot(k,Cr1,k,Cr2,k,Cr3);
xlabel('k'), ylabel('Cr');
axis([0 0.2 1 4.5]);
grid on,hold on;
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Текст программы для определения области неустойчивости жидкой пленки при волновом течении

```
i=0;
for Re=5:15
    [ Fx, sigma, a1, a4, a6, a7, a11 ] = fun( Re );
    i=i+1;
    k(i)=((a6+a7.*a11)/(a1+a4.*a7)).^(1/2);
end

r=5:1:15;
figure(1);
plot(r,k,'r');
grid on;
xlabel('Re'), ylabel('k');
```

Функция для вычисления коэффициентов дисперсионного уравнения

Файл fun.m

```
function [ Fx, sigma, a1, a4, a6, a7, a11 ] = fun(Re)
    Fx=3./Re;
    sigma=4887*Re.^(-5/3);
    c=0;
    M=0; %температура
    %M=1;
    N=0; %ПАВ
    %N=1;
    PrKu=2;
    a1=(-Re.*sigma)./3;
    a4=(-(Re.^2).*Fx.*N)./2;
    a6=((3/40).*(Re.^3).*(Fx.^2)) +((2/3).*Re.*
           *(c./((Re.*PrKu).^2)))-(1/2).*Re.*M;
    a7=(5/24).*(Re.^2).*Fx;
    a11=-Re.*Fx;
end
```