

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент, к.т.н., ведущий инженер
кафедры ИИИТ ЮУрГУ


_____ А.С. Семенов
« _____ » _____ 2016г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,
доцент


_____ Л.А.Прокудина
« 28 » _____ 2016 г.

Метод матричных пучков и его реализация в Matlab

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ-231300.2016.069.ПЗ ВКР

Руководитель работы, к.ф-м.н,
доцент кафедры ПРИМА

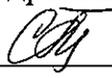

_____ / О.Л. Ибряева
« 01 » _____ 06 _____ 2016 г.

Автор работы

Студент группы ММиКН-473


_____ / Д.А. Кадурын
« 01 » _____ 06 _____ 2016 г.

Нормоконтролер, к.ф-м.н, доцент
кафедры ПРИМА

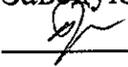

_____ / С.У. Турлакова
« 01 » _____ 06 _____ 2016 г.

Челябинск 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра прикладной математики
Направление подготовки Программная инженерия

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

 Прокудина А. А.
2015 г.

ЗАДАНИЕ

на выпускную квалификационную работу студента
Кадурина Данила Александровича
Группа ММиКН-473

1. **Тема работы** Разработка приложения «Метод матричных пучков и его программная реализация в Matlab»
утверждена приказом по университету от « ___ » _____ 20__ г. № _____
2. **Срок сдачи студентом законченной работы** « 1 » июня 2016 г.
3. **Исходные данные к работе**
 - 3.1. Структура данных характеризующих сигнал.
 - 3.2. Среда программирования – приложение Matlab.
4. **Перечень вопросов, подлежащих разработке**
 - 4.1. Обзор изучаемого метода и его аналогов.
 - 4.2. Разработка пользовательского интерфейса.
 - 4.3. Проектирование и разработка программы.
 - 4.4. Оценка результатов экспериментального внедрения программы.
 - 4.5. Разработка программной документации.
5. **Иллюстративный материал** (плакаты, альбомы, раздаточный материал, макеты, электронные носители и др.)
 - 5.1. Схема алгоритма программы. Демонстрационный плакат – 1 л.
 - 5.2. Мультимедийная презентация – 15 слайдов.Общее количество иллюстраций – 16.
6. **Дата выдачи задания** «1» октября 2015 г.
Руководитель _____ /О.Л. Ибряева /
(подпись)
Задание принял к исполнению _____ /Д.А. Кадурин /
(подпись)

7. Календарный план

Наименование этапов выпускной квалификационной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении руководителя
1. Обзор литературы и постановка задачи	01.10.15 – 07.11.15	<i>И</i>
2. Разработка пользовательского интерфейса	09.11.15 – 19.12.15	<i>И</i>
3. Проектирование и разработка алгоритма	08.02.16 – 05.03.16	<i>И</i>
4. Программная реализация алгоритма	07.03.16 – 26.03.16	<i>И</i>
5. Отладка и тестирование программы	28.03.16 – 16.04.16	<i>И</i>
6. Подготовка пояснительной записки дипломной работы	18.04.16 – 15.05.16	<i>И</i>
7. Разработка программной документации	02.05.16 – 15.05.16	<i>И</i>
8. Проверка работы руководителем, исправление замечаний	16.05.16 – 19.05.16	<i>И</i>
9. Нормоконтроль	20.05.16 – 26.05.16	<i>И</i>
10. Подготовка иллюстративного материала и доклада	23.05.16 – 28.05.16	<i>И</i>
11. Рецензирование, представление зав. кафедрой	30.05.16 – 01.06.16	<i>И</i>

Заведующий кафедрой _____

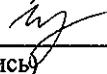
(подпись)



/И.А. Прокудина

Руководитель работы _____

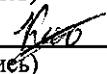
(подпись)



/О.Л. Ибряева/

Студент _____

(подпись)



/Д.А. Кадурын/

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	7
1 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В MATLAB	9
1.1 Параметрические и непараметрические методы анализа сигналов.....	9
1.1.1 Непараметрические методы анализа сигналов	9
1.1.2 Параметрические методы анализа сигналов	12
1.2 Методы обработки сигналов в Signal Processing Toolbox Matlab	14
1.2.1 Непараметрические методы, реализованные в пакете Signal Processing	14
1.2.2 Параметрические методы, реализованные в пакете Signal Processing	14
1.3 Выводы по разделу.....	15
2 МЕТОД МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В MATLAB	16
2.1 Модели сигнала	16
2.1.1 Модель сигнала в виде суммы затухающих синусоид (модель № 1).....	16
2.1.2 Модель сигнала в виде последовательности сумм затухающих синусоид, возникающих в случайные моменты времени (модель № 2).	17
2.2 Описание метода матричных пучков	19
2.3 Описание программы и сингулярное разложение матрицы.....	22
2.4 Определение числа частот в сигнале	23
2.5 Выводы по разделу.....	26
3 ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ.....	27
3.1 Выводы по разделу.....	33
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	34
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	35
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Текст программы, реализующий метод матричных пучков....	37
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Тест программы, реализующей сигнал модели 2	39

ВВЕДЕНИЕ

Спектральный и частотный анализ находят множество применений в физике, механике, электротехнике, акустике, медицине, экономике и т.д. [6]. Одним из современных параметрических методов спектрального анализа является метод матричных пучков (matrix pencil method), впервые предложенный в 1990 году в статье [2]. Метод уже хорошо зарекомендовал себя во многих прикладных задачах [1,3-5] и показал большую эффективность по сравнению, например, с параметрическим методом Прони.

Изначально метод разрабатывался для определения параметров суммы затухающих синусоид – амплитуд, фаз, коэффициентов затухания и частот гармоник. В данной работе исследовано только определение частот с помощью данного метода. Задача нахождения частот чрезвычайно актуальна, например, для диагностики измерительных устройств. В случае возникновения какого-либо дефекта, собственные частоты конструкции изменяются, таким образом, оценивая частоты, можно сделать выводы о состоянии системы.

Цель работы – изучить метод матричных пучков и реализовать его в Matlab. Требуется решить следующие задачи – провести серию численных экспериментов с модельными сигналами, изучить зависимость точности определения частоты сигнала от уровня шума в нем, сравнить метод матричных пучков с классическим методом Фурье, предложить способ автоматического определения числа полюсов сигнала.

Таким образом, объектом исследования является метод матричных пучков. Предметом исследования служат его работоспособность в условиях шумов, возможность автоматического определения числа полюсов сигнала, сравнение с методом Фурье, а также возможность определения частоты сигнала с неизвестным временем его начала.

В качестве модели сигнала, наряду с «классической» и простой моделью в виде суммы затухающих синусоид, рассматривается сложная модель сигнала, являющегося откликом линейной системы на случайный поток импульсных сигналов типа функции. Такой сигнал, представляющий собой последовательность сумм затухающих синусоид, возникших в случайные и не известные моменты времени, рассматривался в работе [17] в связи с задачей разработки методов для оценки состояния преобразователя давления в ходе технологического процесса.

Впервые в данной работе для анализа сигналов такого вида применяется метод матричных пучков. Новым является и предложенный в параграфе 2.4 метод автоматического определения числа полюсов сигнала, который показал хорошую работоспособность для обеих рассматриваемых моделей сигнала.

Работа устроена следующим образом. В первой главе приведен обзор методов спектрального анализа и возможностей пакета Signal Processing Toolbox в Matlab по обработке сигналов. Вторая глава содержит описание рассматриваемых моделей сигналов, метода матричных пучков и его программной реализации в Matlab, написанной автором данной работы. Также в этой главе описан алгоритм

определения числа частот в сигнале. Описание численных экспериментов содержится в третьей главе. Тексты программ приведены в приложениях 1,2.

Написанные программы могут использоваться для моделирования различных задач или же для обработки реальных сигналов. Несомненным достоинством приведенной программной реализации является автоматическое определение числа частот в сигнале.

1 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В MATLAB

1.1 Параметрические и непараметрические методы анализа сигналов

Методы спектрального анализа случайных сигналов делятся на два больших класса — непараметрические и параметрические. В непараметрических методах используется только информация, содержащаяся в отсчетах анализируемого сигнала. Параметрические методы предполагают наличие некоторой статистической модели случайного сигнала, а процесс спектрального анализа в данном случае включает в себя определение параметров этой модели [15].

1.1.1 Непараметрические методы анализа сигналов

К непараметрическим методам относят метод преобразования Фурье (некоторые из них наиболее известный непараметрический метод спектрального анализа), метод Е-импульса, метод периодограмм и т.д. В этой главе мы вкратце опишем некоторые из них.

Многие сигналы удобно анализировать, раскладывая их на синусоиды, так называемые гармоники. Тому есть несколько причин. Например, подобным образом работает человеческое ухо. Оно раскладывает звук на отдельные колебания различных частот. Кроме того, можно показать, что синусоиды являются «собственными функциями» линейных систем (т.к. они проходят через линейные системы, не изменяя формы, а могут изменять лишь фазу и амплитуду).

Преобразования Фурье.

Преобразование Фурье – это разложение функций на синусоиды (далее косинусные функции мы тоже называем синусоидами, т.к. они отличаются от «настоящих» синусоид только фазой). Рассмотрим дискретное преобразование Фурье вещественного сигнала.

Пусть мы имеем N отсчетов дискретного сигнала $x[n]$. В этом случае его можно представить в виде конечного ряда (т.е. линейной комбинации) дискретных синусоид:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} C_k * \cos \frac{2\pi k(n + 1.1\varphi_k)}{N}, \quad (1.1)$$

Эквивалентная запись (каждый косинус раскладываем на синус и косинус, но теперь без фазы):

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} A_k * \cos \frac{2\pi kn}{N} + \sum_{k=0}^{N/2} B_k * \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad (1.2)$$

Базисные синусоиды имеют кратные частоты. Первый член ряда ($k = 0$) – это константа, называемая постоянной составляющей сигнала. Самая первая синусоида ($k = 1$) имеет такую частоту, что ее период совпадает с периодом самого исходного сигнала. Самая высокочастотная составляющая ($k = N/2$) имеет такую частоту, что ее период равен двум отсчетам. Коэффициенты A_k и B_k называются спектром сигнала. Они показывают амплитуды синусоид, из которых состоит сигнал. Шаг по частоте между двумя соседними синусоидами из разложения Фурье называется частотным разрешением спектра.

Как мы увидим далее, для каждого сигнала можно однозначно определить коэффициенты A_k и B_k . Зная эти коэффициенты, можно однозначно восстановить исходный сигнал, вычислив сумму ряда Фурье в каждой точке. Разложение сигнала на синусоиды (т.е. получение коэффициентов) называется прямым преобразованием Фурье. Обратный процесс – синтез сигнала по синусоидам – называется обратным преобразованием Фурье.

Алгоритм обратного преобразования Фурье очевиден (он содержится в формуле ряда Фурье; для проведения синтеза нужно просто подставить в нее коэффициенты). Рассмотрим алгоритм прямого преобразования Фурье, т.е. нахождения коэффициентов A_k и B_k .

Система функций $\left\{ \sin \frac{2\pi kn}{N}, \cos \frac{2\pi kn}{N} \right\}, k = 0, \dots, \frac{N}{2}$ от аргумента n является ортогональным базисом в пространстве периодических дискретных сигналов с периодом N . Это значит, что для разложения по ней любого элемента пространства (сигнала) нужно посчитать скалярные произведения этого элемента со всеми функциями системы, и полученные коэффициенты нормировать. Тогда для исходного сигнала будет справедлива формула разложения по базису с коэффициентами A_k и B_k .

Коэффициенты A_k и B_k вычисляются как скалярные произведения (в непрерывном случае – интегралы от произведения функций, в дискретном случае: суммы от произведения дискретных сигналов):

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos \frac{2\pi ki}{N}, \text{ при } k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos \frac{2\pi ki}{N}, \text{ при } k = 0, \frac{N}{2}. \quad (1.3)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin \frac{2\pi ki}{N}, \text{ при } k = 0, \dots, \frac{N}{2}. \quad (1.4)$$

Мы выяснили, что спектральное представление сигнала полностью эквивалентно самому сигналу [13,14]. Между ними можно перемещаться, используя прямое и обратное преобразования Фурье. Алгоритм вычисления этих преобразований содержится в приведенных формулах.

Вычисление преобразований Фурье требует очень большого числа умножений (около N^2) и вычислений синусов. Существует способ выполнить эти преобразования значительно быстрее: примерно за $2\log_2 N$ операций умножения. Этот способ называется быстрым преобразованием Фурье (БПФ). Он основан на том, что среди множителей (синусов) есть много повторяющихся значений (в силу периодичности синуса). Алгоритм БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями, значительно сокращая число умножений. В результате быстрое действие БПФ может в сотни раз превосходить быстрое действие стандартного алгоритма (в зависимости от N). При этом следует подчеркнуть, что алгоритм БПФ является точным. Он даже точнее стандартного, т.к. сокращая число операций, он приводит к меньшим ошибкам округления [12,17].

Однако у большинства алгоритмов БПФ есть особенность: они способны работать лишь тогда, когда длина анализируемого сигнала N является степенью двойки. Обычно это не представляет большой проблемы, так как анализируемый сигнал всегда можно дополнить нулями до необходимого размера. Число N называется размером или длиной БПФ [15].

Метод периодограмм.

Периодограммой называется оценка спектральной плотности мощности, полученная по N отсчетам одной реализации случайного процесса согласно определению

$$W(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left| \sum_{k=-n}^n x(k) * e^{-j\omega kT} \right|^2 \quad (1.5)$$

(естественно, не путем взятия предела, а усреднением конечного числа слагаемых).

Для уменьшения изрезанности периодограммы необходимо применить какое-либо усреднение. Бартлетт предложил разделять анализируемый сигнал на неперекрывающиеся сегменты, вычислять для каждого сегмента периодограмму и затем эти периодограммы усреднять. Если корреляционная функция сигнала на

длительности сегмента затухает до пренебрежимо малых значений, то периодограммы отдельных сегментов можно считать независимыми.

Метод Уэлча.

Уэлч внес в метод Бартлетта два усовершенствования: использование весовой функции и разбиение сигнала на перекрывающиеся фрагменты. Применение весовой функции позволяет ослабить растекание спектра и уменьшить смещение получаемой оценки спектра плотности мощности ценой незначительного ухудшения разрешающей способности. Перекрытие фрагментов введено для того, чтобы увеличить их число и уменьшить дисперсию оценки.

Вычисления при использовании метода Уэлча (ещё его называют методом усреднения модифицированных периодограмм) организуется следующим образом: вектор отсчета сигнала делится на перекрывающиеся фрагменты; каждый фрагмент умножается на используемую весовую функцию; для взвешенных фрагментов вычисляются модифицированные периодограммы; периодограммы для всех фрагментов усредняются.

1.1.2 Параметрические методы анализа сигналов

Авторегрессионные методы.

Согласно авторегрессионной модели сигнал формируется путем пропускания дискретного белого шума через "чисто рекурсивный" фильтр N -го порядка. Спектральная плотность мощности такого сигнала пропорциональна квадрату модуля коэффициента функции передачи формирующего фильтра. Таким образом, данный метод спектрального анализа сводится к определению коэффициентов фильтра заданного порядка, оценке мощности возбуждающего белого шума и аналитическому расчету спектральной плотности мощности. Для определения коэффициентов модели производится минимизация ошибки линейного предсказания сигнала. Теоретический анализ показывает, что оптимальные коэффициенты модели определяются лишь корреляционной функцией сигнала.

На практике мы не знаем истинной корреляционной функции исследуемого сигнала, поэтому для минимизации ошибки предсказания используются оценки КФ, полученные путем временного усреднения. Был разработан целый ряд методов авторегрессионного анализа, отличающихся в основном подходом к обработке краевых эффектов (то есть к способу вовлечения в вычисления тех краевых отсчетов сигнала, для которых при вычислении КФ не оказывается сдвинутой пары).

Авторегрессионные методы анализа спектра больше всего подходят для сигналов, действительно являющихся авторегрессионными процессами. Вообще, хорошие результаты эти методы дают тогда, когда спектр анализируемого сигнала имеет четко выраженные пики. В частности, к таким сигналам относится сумма нескольких синусоид с шумом.

При использовании авторегрессионных методов важно правильно выбрать порядок авторегрессионной модели — он должен быть в два раза больше числа синусоидальных колебаний, которые предположительно содержатся в анализируемом сигнале.

Метод Music.

Метод MUSIC (Multiple Signal Classification) предназначен для спектрального анализа сигналов, представляющих собой сумму нескольких синусоид (нескольких комплексных экспонент) с белым шумом. Целью спектрального анализа подобных сигналов, как правило, является не расчет спектра как такового, а определение частот и уровней (амплитуд или мощностей) гармонических составляющих. Метод MUSIC предназначен именно для этого, поэтому получаемая с его помощью зависимость уровня сигнала от частоты называется псевдоспектром.

В основе метода лежит анализ собственных чисел и собственных векторов корреляционной матрицы сигнала. При выполнении анализа необходимо указать порядок модели, то есть число комплексных экспонент, предположительно содержащихся в сигнале.

Метод EV(eigenvectors).

Близким родственником MUSIC является метод анализа собственных векторов. Его отличие состоит лишь в том, что в расчетных формулах собственные векторы умножаются на весовые коэффициенты, обратно пропорциональные соответствующим собственным числам.

Метод Прони.

Метод Прони — это параметрический метод представления данных линейной комбинацией экспонент на ограниченном интервале наблюдения. Гаспар Рише (барон де Прони) в 1795 г. предложил способ, основанный на подгонке экспоненциальной модели к измеренным эквидистантным значениям и последующем вычислении дополнительных значений посредством оценивания параметров этой экспоненциальной модели в промежуточных точках. Позднее метод был обобщён на случай комплексных экспонент. Сам метод состоит из следующих трёх этапов:

1. определение параметров линейного предсказания, по которым будет осуществляться подгонка данных;
2. определение корней полинома, состоящего из коэффициентов линейного предсказания (каждый из корней будет соответствовать одному слагаемому результату);
3. определение амплитуд и начальных фаз (т. е. комплексных амплитуд), экспонент, соответствующих корням.

Изначально в методе Прони использовалось ровно такое количество экспонент, достаточное для точного описания экспериментальных данных. Позднее метод был модифицирован для получения меньшего количества

экспонент, при этом их коэффициенты определяются по методу наименьших квадратов.

Одним из параметрических методов обработки сигналов является метод матричных пучков (Matrix Pencil Method). Этот метод является предметом настоящей работы и описан в параграфе 2.1 главы 2.

1.2 Методы обработки сигналов в Signal Processing Toolbox Matlab

В пакете Signal Processing имеются функции, реализующие разнообразные методы спектрального анализа — как параметрические, так и непараметрические (необходимо подчеркнуть, что под спектральным анализом здесь имеется в виду оценка спектральной плотности мощности случайного процесса). Кроме того, имеются функции для получения других усредненных характеристик случайных дискретных сигналов. Опишем некоторые из них:

1.2.1 Непараметрические методы, реализованные в пакете Signal Processing

Дискретное преобразование Фурье в Matlab выполняет Функция `fft(X)`, используя FFT-алгоритм быстрого Фурье-преобразования. Если X двумерный, вычисляется дискретное преобразование каждого столбца. Функция `ifft(Y)` вычисляет обратное преобразование Фурье для Y .

В пакете Signal Processing реализованы такие алгоритмы, основанные на FFT, как периодограмма, методы Уэлча и Томпсона. Вычисление периодограммы (в том числе модифицированной) производится с помощью функции `periodogram`. Метод Уэлча является наиболее популярным периодограммным методом спектрального анализа. Он реализуется с помощью функции `pwelch`. Метод Томпсона, реализуемый функцией `pmtm`, основан на использовании вытянутых сфероидальных функций. Эти функции конечной длительности обеспечивают максимальную концентрацию энергии в заданной полосе частот. Помимо собственно спектральной оценки, функция `pmtm` может возвращать ее доверительный интервал. Для вычисления вытянутых сфероидальных функций требуется некоторое время, поэтому при многократном использовании функции `pmtm` можно ускорить расчеты, заранее рассчитав необходимые для анализа функции и сохранив их в базе данных. Для работы с такой базой предназначено семейство функций, имена которых начинаются с букв `dpss` (`dpss` — расчет функций, `dpssload` — загрузка семейства функций из базы данных, `dpsssave` — сохранение семейства функций в базе данных, `dpssdir` — вывод каталога базы данных, `dpssclear` — удаление семейства функций из базы данных).

1.2.2 Параметрические методы, реализованные в пакете Signal Processing

В пакете Signal Processing реализован ряд разновидностей авторегрессионного анализа и два метода, основанных на анализе собственных чисел и векторов

корреляционной матрицы сигнала: MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) и EV (EigenVectors).

Рассмотрим авторегрессионные модели анализа сигнала, реализован метод Берга, ковариационный метод, модифицированный ковариационный метод и авторегрессионный метод Юла—Уолкера.

Каждому методу авторегрессионного анализа в пакете Signal Processing соответствуют две функции — функция вычисления коэффициентов модели и функция собственно спектрального анализа. Функция спектрального анализа вызывает функцию расчета коэффициентов модели, а затем производит вычисление спектра.

Таблица 1.1

Имена функций авторегрессионного анализа

Название метода	Функция расчета коэффициентов модели	Функция спектрального анализа
Ковариационный метод	arcov	pcov
Модифицированный ковариационный метод	armcov	pmcov
Метод Берга	arburg	pburg
Авторегрессионный метод Юла—Уолкера	aryule	pyulear

Метод MUSIC реализован с помощью функции `pmusic`, а функция `rootmusic` позволяет получить оценки частот и мощностей гармонических составляющих сигнала.

Метод EV реализован с помощью функции `reig`, а функция `rooteig` позволяет получить оценки частот и мощностей гармонических составляющих сигнала.

Следует подчеркнуть, что псевдо спектры не являются оценками истинного спектра плотности мощности, а представляют собой лишь спектральные псевдо оценки, позволяющие оценивать частоты синусоидальных или узкополосных составляющих сигнала с разрешением, несколько превосходящим разрешение авторегрессионных методов.

1.3 Выводы по разделу

1. Рассмотрены классы методов спектрального анализа случайных сигналов.
2. Вкратце изучены наиболее распространенные методы параметрического и непараметрического анализа сигналов.
3. Изучены имеющиеся методы спектрального анализа в пакете Signal Processing Toolbox Matlab.

2 МЕТОД МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В MATLAB

2.1 Модели сигнала

2.1.1 Модель сигнала в виде суммы затухающих синусоид (модель № 1)

В качестве первой модели сигнала в данной работе была принята сумма затухающих синусоид. Данная модель широко распространена [2,3] и имеет вид:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K A_k e^{-\alpha_k t} \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) + w(t) \quad (2.1)$$

или в дискретном времени:

$$x(n) = \sum_{k=1}^K A_k e^{-\alpha_k n T} \cos(2\pi f_k n T + \varphi_k) + w(n), \quad (2.2)$$

где $n = 0, 1, \dots, N - 1$ – номера отсчетов сигнала $x[n]$; N – число отсчетов данных; K — число гармонических составляющих сигнала; $w[n]$ – отсчеты шума; A_k, α_k, f_k и φ_k – значения амплитуд, коэффициентов затухания, частот и начальных фаз компонент сигнала соответственно; T – период дискретизации.

Для данной модели сигнала отношение сигнал/шум вычисляется по формуле:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} y^2(n)}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)} \right), \quad (2.3)$$

где $y(n) = \sum_{k=1}^K A_k e^{-\alpha_k n T} \cos(2\pi f_k n T + \varphi_k)$ – отсчеты полезного сигнала.

Поскольку $\cos \psi = \frac{e^{j\psi} + e^{-j\psi}}{2}$, то выражение (2.2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=1}^K A_k e^{-\alpha_k n T} \frac{e^{j(2\pi f_k n T + \varphi_k)} + e^{-j(2\pi f_k n T + \varphi_k)}}{2} + w(n) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K A_k e^{j\varphi_k} e^{(-\alpha_k + j2\pi f_k) n T} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K A_k e^{-j\varphi_k} e^{(-\alpha_k - j2\pi f_k) n T} + w(n) = \\ &= \sum_{k=1}^{2K} b_k z_k^n + w(n). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полученное выражение является еще одной распространенной моделью сигнала, суммой комплексных экспонент, частным случаем которой является изучаемая нами модель (2.4). Заметим, что в рассматриваемом нами случае полюсы z_k и вычеты b_k существуют комплексно-сопряженными парами, поскольку значения отсчетов сигнала — действительные числа.

Параметрический метод матричных пучков предназначен для работы именно с этой моделью сигнала и позволяет найти параметры z_k и b_k этой модели. Этот метод описывается в параграфе 2.2, а в приложении 1 приведена программа, реализующая этот метод в Matlab. Численные эксперименты, проведенные в главе 3, показали, что рассматриваемый метод хорошо работает и на более сложной модели сигнала, к описанию которой мы и перейдем.

2.1.2 Модель сигнала в виде последовательности сумм затухающих синусоид, возникающих в случайные моменты времени (модель № 2).

В статье [17] рассматривается задача поиска собственных частот датчика давления (с целью диагностики его состояния). В используемой модели сигнала входным возбуждающим воздействием является последовательность δ -импульсов, возникающих в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_S, \dots, \tau_M$.

Датчик давления представляет собой сложную колебательную систему с набором собственных частот и под действием каждого из δ импульсов в системе возникает затухающее колебание с собственными частотами датчика. Показано [7], что возникновение различного рода дефектов (истончение мембраны, налипание грязи, разрушения сварного шва и т.д.) приводит к изменению той или иной собственной частоты. Таким образом, отслеживая значения собственных частот, можно заметить неисправность.

Модель сигнала из работы [17], важная для задачи диагностики измерительных устройств, была взята нами в качестве второй модели в нашей работе. Отметим, что метод матричных пучков применялся к обработке сигналов такого вида впервые в данной работе.

Опишем подробнее данную модель сигнала:

Амплитуда колебания $A_S = A(\tau_S)$ является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием равным нулю и среднеквадратичным отклонением σ . Величина A_S и есть «высота» δ -импульса, т.е. входное воздействие $u(t)$ имеет вид: $u(t) = \sum_{S=1}^M A_S \delta(t - \tau_S)$. Выходной сигнал представляет собой последовательность затухающих синусоид, возникающих в моменты времени τ_S :

$$\sum_{s=1}^M V(t - \tau_s) \sum_{k=1}^K A_k(\tau_s) e^{-\alpha_k(t - \tau_s)} \cos(2\pi f_k(t - \tau_s) + \varphi_k(\tau_s)). \quad (2.5)$$

Здесь $V(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t \leq 0 \end{cases}$, фаза $\varphi(\tau_s)$ – равномерная случайная величина на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, амплитуды A_k удовлетворяют условиям: $A_k = c_k A_S$, $\sum_{k=1}^K c_k^2 = 1$.

Пример входного потока импульсов и соответствующего ему выходного сигнала приведен на рисунке 2.1. Заметим, что синусоиды могут и «наползать» друг на друга.

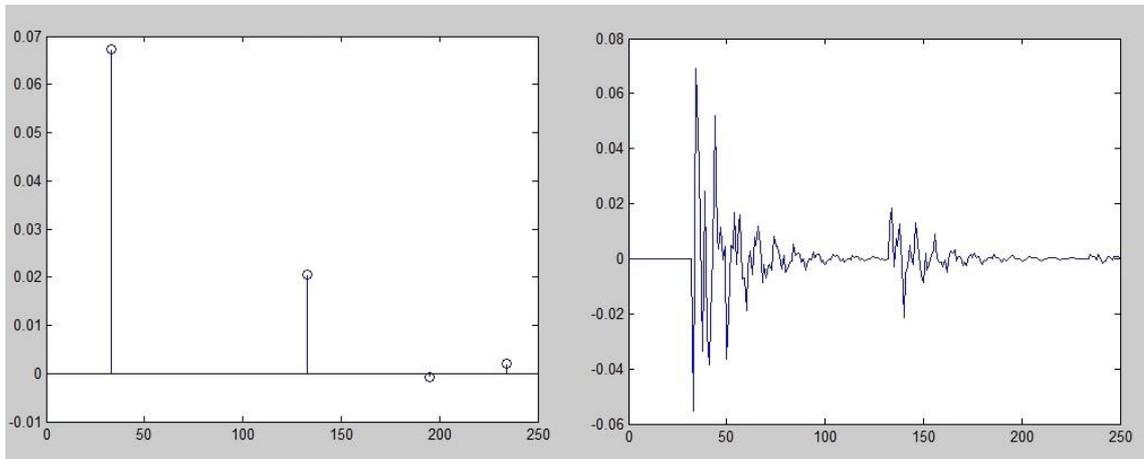


Рисунок 2.1 – Входное воздействие и выходной сигнал

В общем случае, к выходному сигналу должен быть добавлен шум, который считаем белым, нормально распределенным $N(0, \sigma_{ш})$. Отношение сигнал/шум (SNR) для данной модели сигнала будем вычислять по формуле:

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \frac{1}{N} \sum_{k=n_s}^{n_s+N} y_k^2}{\sigma_{ш}^2} \right), \quad (2.6)$$

где M – число δ – импульсов на рассматриваемом временном отрезке сигнала, N – число отсчетов, за которое синусоида затухает до уровня 5% от энергии в момент возникновения импульса, n_s – номер отсчета, соответствующий времени τ_s , y_k – значения выходного сигнала в отсутствии шума.

Пример зашумленного сигнала для $SNR=10$ дБ приведен на рисунке 2.2. Там же в увеличенном масштабе показан вид отклика на один импульс.

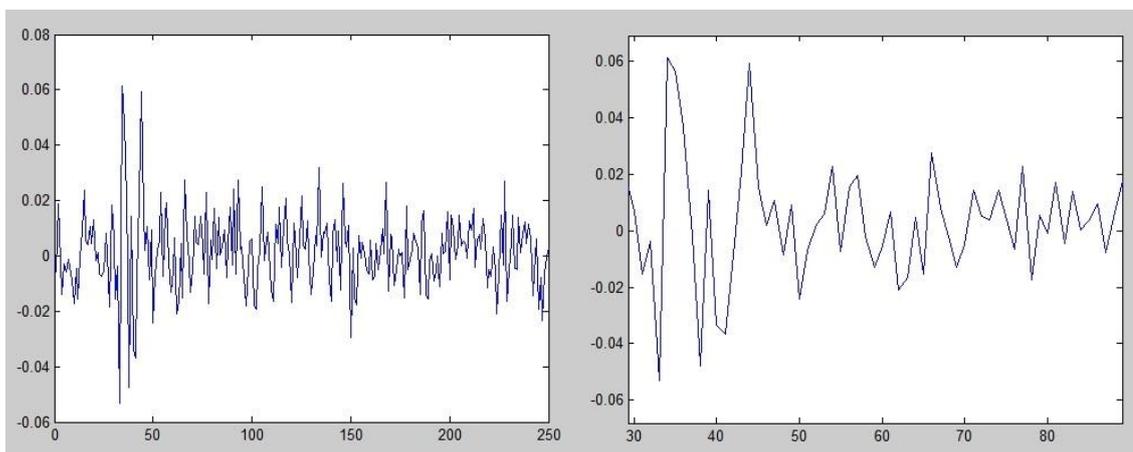


Рисунок 1.2 – Зашумленный сигнал с SNR=10 дБ

В главе 3 приведен пример обработки методом матричных пучков сигнала, представляющего собой последовательность затухающих синусоид, возникающих в случайные моменты времени. Заметим, что метод изначально не был предназначен для поиска частот сигналов такого вида. Однако эксперимент показал, что и в этом случае метод позволяет найти частоты синусоид.

2.2 Описание метода матричных пучков

Метод матричных пучков получил свое название потому, что полюсы сигнала оказываются собственными значениями пучка матриц $x_1 - \mu x_0$, т.е. числами, понижающими его ранг [10]. Пара матриц x_0, x_1 в данном методе конструируется из отсчетов сигнала следующим образом. Определим k -й вектор исходных данных как:

$$x_k = (x[k], x[k + 1], \dots, x[N - M + k - 1])^T, \quad (2.7)$$

где M – определяющий параметр метода, N – число отсчетов данных, индекс T означает операцию транспонирования.

Базируясь на векторах (2.7), определим две матрицы размером $(N-M) \times M$

$$\begin{cases} X_0 = (X_{M-1}, X_{M-2}, \dots, X_0), \\ X_1 = (X_M, X_{M-1}, \dots, X_1). \end{cases} \quad (2.8)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующих факторизаций этих матриц:

$$\begin{cases} X_0 = Z_{\text{лев}} B Z_{\text{пр}}, \\ X_1 = Z_{\text{лев}} B Z Z_{\text{пр}}. \end{cases} \quad (2.9)$$

где

$$Z_{\text{лев}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_2 & z_4 & \dots & z_{k-1} & z_k \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & \dots & z_{k-1}^2 & z_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-M-2} & z_1^{N-M-2} & z_1^{N-M-2} & z_1^{N-M-2} & \dots & z_1^{N-M-2} & z_1^{N-M-2} \\ z_1^{N-M-1} & z_2^{N-M-1} & z_3^{N-M-1} & z_4^{N-M-1} & \dots & z_{k-1}^{N-M-1} & z_k^{N-M-1} \end{bmatrix}; \quad (2.10)$$

$$Z_{\text{пр}} = \begin{bmatrix} z_1^{M-1} & z_1^{M-2} & z_1^{M-3} & z_1^{M-4} & \dots & z_1^1 & 1 \\ z_2^{M-1} & z_2^{M-2} & z_2^{M-3} & z_2^{M-4} & \dots & z_2^1 & 1 \\ z_3^{M-1} & z_3^{M-2} & z_3^{M-3} & z_3^{M-4} & \dots & z_3^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{k-1}^{M-1} & z_{k-1}^{M-2} & z_{k-1}^{M-3} & z_{k-1}^{M-4} & \dots & z_{k-1}^1 & 1 \\ z_k^{M-1} & z_k^{M-2} & z_k^{M-3} & z_k^{M-4} & \dots & z_k^1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_k); \\ Z = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_k). \end{cases} \quad (2.12)$$

Доказано, что каждое из $\{z_k, k = 1, \dots, K\}$ есть число, понижающее ранг матрицы $X_1 - zX_0$ (ее собственное число), при условии, если $K \leq M \leq (N - K)$.

При этом справедливо:

$$\begin{cases} (X_1 - z_k X_0)q_k = 0, \\ p_k^H (X_1 - z_k X_0) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

где q_k – k -й столбец матрицы $Z_{\text{пр}}^+ = Z_{\text{пр}}^H (Z_{\text{пр}} Z_{\text{пр}}^H)^{-1}$ (правый собственный вектор); p_k^H – k -я строка матрицы $Z_{\text{лев}}^+ = Z_{\text{лев}}^H (Z_{\text{лев}} Z_{\text{лев}}^H)^{-1} Z_{\text{лев}}^H$ (левый собственный вектор). Индекс «+» означает псевдоинверсию Мура-Пенроуза, индекс «H» означает операция эрмитого сопряжения. Заметим, что при $K < M < (N - K)$ матрицы X_0 и X_1 не имеют полного ранга.

Подставляя (2.10), (2.11), (2.12) в (2.9) получим:

$$(X_1 - zX_0) = Z_{\text{лев}} B (Z - zI_k) Z_{\text{пр}}, \quad (2.14)$$

где I_k – единичная матрица размера $K \times K$.

Если $z = z_k$, тогда $(Z - zI_k)_{k,k} = 0$ и k -й столбец $Z_{\text{лев}}$ и k -я строка $Z_{\text{пр}}$ исключаются из (2.14). Если $K \leq M \leq (N - K)$, то $Z_{\text{лев}}$ и $Z_{\text{пр}}$ имеют ранг K и, следовательно, $\text{Rank}\{X_1 - z_k X_0\} + 1 = K = \text{Rank}\{X_1 - zX_0\}$ для z , не принадлежащего $\{z_k, k = 1, \dots, K\}$. Если $M < K$, тогда ранг $\{Z_{\text{пр}}\}$ равен M и $\text{Rank}\{(Z - z_k I_k)Z_{\text{пр}}\} = \text{Rank}\{(Z - zI_k)Z_{\text{пр}}\} = M$. Если $M < N - K$, тогда ранг $Z_{\text{лев}}$ равен $N - M$ и $\text{Rank}\{Z_{\text{лев}}B(Z - z_k I_k)\} = \text{Rank}\{Z_{\text{лев}}B(Z - zI_k)\} = N - M$, т.е. ранг не уменьшается при $z = z_k$. Видно, что

$$\begin{cases} Z_{\text{пр}}Z_{\text{пр}}^+ = I_k, \\ Z_{\text{лев}}^+Z_{\text{лев}} = I_k. \end{cases} \quad (2.15)$$

и, поскольку ранг уменьшается только при $z = z_k$, решения (2.13) – единственны.

Домножая (2.15) на X_0^+ , получим:

$$X_0^+X_1q_k = z_kX_0^+X_0q_k = z_kq_k. \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) показывает, что $\{z_k, k = 1, \dots, K\}$ есть K собственных чисел матрицы $X_0^+X_1$. Поскольку матрица $X_0^+X_1$ имеет ранг $K \leq M$, то существует также $M - K$ нулевых собственных чисел.

Аналогично можно показать, что $X_1X_0^+$ имеет K собственных чисел, равных z_k и $N - M - K$ нулевых собственных чисел, $X_1X_0^+$ (или $X_0^+X_1$) имеет K собственных чисел, равных z_k^{-1} и $M - K$ (или $N - M - K$) нулевых собственных чисел.

Если данные зашумлены, определим $y[k]$, Y_0 и Y_1 подобно $x[k]$, X_0 и X_1 , заменяя X_0^+ и X_1^+ усеченными ранга K псевдо обратными матрицами Y_0^+ и Y_1^+ .

Например, для Y_0^+ справедливо следующее разложение:

$$Y_0^+ = \sum_{k=1}^K \frac{1}{\mu_{0k}} v_{0k} u_{0k}^H = V_0 A^{-1} U_0^H \quad (2.17)$$

где $\{\mu_{0k}, k = 1, \dots, K\}$ – K -наибольших сингулярных чисел матрицы Y_0 ; v_{0k} и u_{0k} соответствующие им сингулярные вектора

$$\begin{cases} V_0 = (v_{01}, \dots, v_{0k}), \\ U_0 = (u_{01}, \dots, u_{0k}), \\ A = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0k}). \end{cases} \quad (2.18)$$

Поскольку $Y_0^+ Y_1$ имеет $M - K$ нулевых собственных значений, которые не содержат информации о z_k , ее размер может быть уменьшен перед оценкой собственных значений.

Заменяя X_0 и X_1 в (2.16) на Y_0 и Y_1 подставляя (2.17) в (2.16) для Y_0^+ получим:

$$V_0 A^{-1} U_0^H Y_1 q_k = z_k q_k \quad (2.19)$$

Поскольку $V_0^H V_0 = I_k$ и $q_k = V_0 V_0^H q_k$, домножая (2.19) на V_0^H получим:

$$A^{-1} U_0^H Y_1 V_0 (V_0^H q_k) = z_k (V_0^H q_k) \quad (2.20)$$

Видно, что оценка K собственных чисел z_k делается для несимметричной матрицы

$$Z_E = A^{-1} U_0^H Y_1 V_0 \quad (2.21)$$

Собственные числа матрицы Z_E такие же, как и у матрицы $Y_0^+ Y_1$, и, вычислив их значения, задачу можно считать решенной.

После, вычислив значения полюсов z_k , легко определить вычеты b_k из выражения

$$y[n] = \sum_{k=1}^K b_k z_k^n \quad (2.22)$$

В заключении делаем вывод о необходимости проведения дополнительного исследования по оценке числа K , в параграфе 2.4 рассмотрим предложенный мной метод [5,2].

2.3 Описание программы и сингулярное разложение матрицы

Программа `mpencil`, реализующая метод матричных пучков в Matlab, приведена в Приложении 1. В начале данного файла-функции приведено описание входных данных. На вход подаются N отсчетов исследуемого сигнала y (возможно зашумленного), фактический порядок (число частот) L и повышающий порядок (параметр метода) K . Последний параметр является необязательным, и по умолчанию, берется равным $N/3$ (в случае, если $N/3$ не является целым, оно округляется в меньшую сторону). Затем в комментарии приведен пример вызова функции `mpencil`.

В самой программе в первую очередь выполняется проверка входных данных. Если параметр y не является вектором, программа выдает сообщение об этом.

Далее программа запускает оператор проверки, и в случае если значение K не было передано на вход, оно берется равным $N/3$. Затем формируется матрица размеров $(N-K) \times (K+1)$, содержащая матрицы X_0, X_1 . Далее выполняется разложение матрицы X_0 с помощью встроенной в Matlab функции `svd`. И определяется число частот в сигнале с помощью метода, предложенного в данной работе и описанного в следующем параграфе.

Из матриц, полученных при данном разложении, и матрицы X_1 составляется матрица Z_E , собственные числа которой находятся с помощью встроенной функции `eig` и дают оценку полюсов исследуемого сигнала.

Функция `svd` осуществляет так называемое сингулярное разложение матрицы. Сингулярным разложением матрицы порядка $m \times n$ является разложение следующего вида

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^H, \quad (2.23)$$

где Σ — матрица размера $m \times n$, у которой элементы, лежащие на главной диагонали — это сингулярные числа (а все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми). Здесь H — символ операции эрмитова сопряжения, которая заключается в транспонировании матрицы и заменой каждого ее элемента на комплексно-сопряженный. Сингулярные числа определяются однозначно с точностью до перестановки, обычно их упорядочивают по убыванию.

Матрицы U размера $m \times m$, и V размера $n \times n$, — это две унитарные матрицы, состоящие из левых и правых сингулярных векторов соответственно.

Напомним, что квадратная матрица U называется унитарной, если

$$UU^H = U^H U = E, \quad (2.24)$$

т.е. если $U^{-1} = U^H$.

Сингулярное разложение широко применяется при решении прикладных задач, в частности, является удобным при вычислении ранга матрицы, ядра матрицы и псевдообратной матрицы.

2.4 Определение числа частот в сигнале

Одним из основных достоинств метода матричных пучков является то, что число частот (гармоник) в сигнале не обязательно задавать заранее. Метод может сам его определить. Дело в том, что диагональная матрица, полученная в этом методе на этапе SVD-разложения, в случае чистого сигнала с p полюсами имеет ровно p ненулевых сингулярных чисел. Остальные сингулярные числа равны нулю. В случае добавления даже незначительного шума ненулевых сингулярных чисел уже не будет, однако будет заметен резкий скачок между первыми p

ненулевыми сингулярными числами, соответствующими полезному сигналу и остальными, меньшими по величине, сингулярными числами, соответствующими шуму.

Подтвердим сказанное следующим примером.

Рассмотрим сигнал $s(t) = e^{-20t} \sin(2\pi \cdot 170t) + e^{-30t} \cdot \sin(2\pi \cdot 400t)$. Две действительные синусоиды будут соответствовать четырем комплексным экспонентам, так что число полюсов сигнала равно четырем.

Добавим к сигналу незначительный шум. В качестве шума брались значения нормальной случайной величины с нулевым матожиданием и среднеквадратическим отклонением 0,02. Возьмем 50 отсчетов этого сигнала, полученные с частотой дискретизации 1000 Гц. Отношение сигнал/шум в данном примере составило 30 дБ.

Сингулярные числа диагональной матрицы, полученные на этапе SVD-разложения метода, приведены в первом столбце таблицы 2.1.

Таблица 2.1

Сингулярные числа диагональной матрицы при различном уровне шума.

SNR=30 дБ	SNR=10 дБ	SNR=3 дБ
7.8530	7.4749	8.1194
7.1350	6.7719	7.5479
6.4148	6.1159	5.0806
5.6266	5.3701	4.5247
0.1567	1.6672	3.7164
0.1481	1.5387	3.6872
0.1380	1.5309	2.3645
0.1251	1.3886	2.3024
0.1189	1.3706	2.2244
0.1102	0.9727	2.1962
0.1074	0.9235	2.1426
0.0871	0.9125	2.0133
0.0792	0.8389	1.9456
0.0759	0.7979	1.8673
0.0535	0.5847	1.8495
0.0491	0.5808	1.8196

Итак, первые четыре сингулярных числа заметно больше остальных. Между четвертым и пятым числом заметен большой скачок.

Во втором столбце таблицы 2.1 приведены сингулярные числа в случае более значительного шума (SNR=10дБ). Скачок между четвертым и пятым стал менее заметным и, как видно из третьего столбца, практически исчез при SNR=3дБ.

Моей задачей было «научить компьютер» определять этот скачок и, тем самым, истинное число полюсов сигнала. Далее описан предлагаемый мною алгоритм.

Рассмотрим, например, случай SNR=10 дБ.

1. «Нормируем» сингулярные числа (в моей программе в приложении это делает строчка $sdiag = sdiag/sdiag(1)$).

Получаем $sdiag$ (таблица 2.2).

Таблица 2.2

Значения нормированных сингулярных значений $sdiag$

1
0.905
0.8181
0.7184
0.2230
0.2058
0.2048
0.1857
0.1833
0.1301
0.1235
0.1220
0.1122
0.1067
0.0782

2. Вычисляем разности между соседними элементами ($sdd = -diff(sdiag)$).

Получаем sdd (таблица 2.3).

Таблица 2.3

Значения разности между соседними элементами $sdiag$

0.0940
0.0877
0.0997
0.4953
0.0171
0.0010
0.0190
0.0024
0.0532
0.0065
0.0014

	0.0098
	0.0054
	0.0285
	0.0005

На рисунке 2.3 для наглядности приведены полученные значения. Видно, что максимум приходится на четвертый элемент вектора sdd .

3. Находим этот максимум (точнее, нас интересует номер элемента, доставляющего это максимальное значение – L): $[dummy, L] = \max(sdd)$.

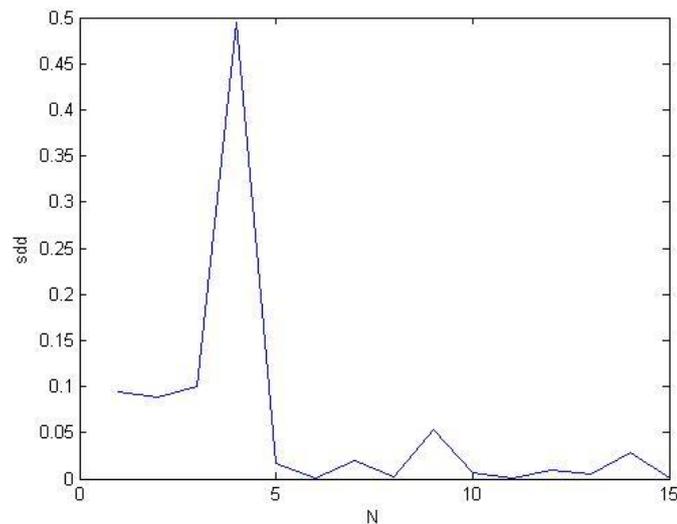


Рисунок 2.3 – Разности между нормированными сингулярными числами

Получаем $L = 4$.

Итак, мы верно определили число полюсов данного сигнала. Конечно, при большом уровне шума, когда скачок между сингулярными числами становится менее заметен, предложенный алгоритм может ошибаться, однако эксперименты показали удовлетворительную работу алгоритма до соотношения сигнал/шум 5-10 дБ.

2.5 Выводы по разделу

1. Рассмотрены две модели сигналов.
2. Был изучен метод матричных пучков, и сделан вывод, о необходимости дополнительного исследования по оценке количества полюсов сигнала.
3. Описали программу, реализующую метод матричных пучков и рассмотрели сингулярное разложение матриц.
4. Рассмотрели одну из особенностей сингулярного разложения, и на основе сделанных выводов осуществили метод оценки числа полюсов сигнала.

3 ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В этой главе описываются численные эксперименты, выполненные с использованием нашей программы, реализующей метод матричных пучков (Приложение 1).

Рассмотрим пример 1.

Рассмотрим сигнал $s(t) = e^{-50t} \sin(2\pi \cdot 170t)$, (рисунок 3.1).

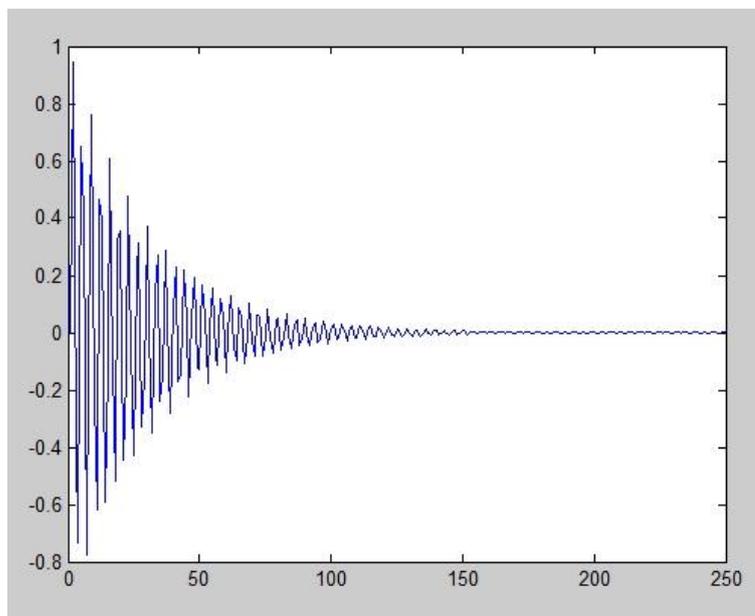


Рисунок 3.1 – вид рассматриваемого сигнала

В качестве шума возьмем значения нормальной случайной величины с нулевым матожиданием и среднеквадратическим отклонением σ . Возьмем 50 отсчетов этого сигнала, полученные с частотой дискретизации 1000 Гц. Будем менять значение σ и, следовательно, отношение сигнал/шум. Получим зависимость относительной погрешности оценки частоты сигнала от соотношения сигнал/шум.

Заметим, что в данном примере функция `trunc1` вызывалась с одним входным параметром (которым являлись отсчеты сигнала), а число полюсов сигнала (в данном случае - 2) программа определяла сама по предложенному нами в параграфе 2.4 алгоритму.

На рисунке 3.2 приведена зависимость относительной погрешности δ_f определения частоты сигнала методом матричных пучков от соотношения сигнал/шум SNR.

Относительная погрешность вычислялась по формуле:

$$\delta_f = \frac{|f - \hat{f}|}{f}, \quad (3.1)$$

где f – точное значение частоты исследуемого сигнала; \hat{f} – найденное значение частоты методом матричных пучков.

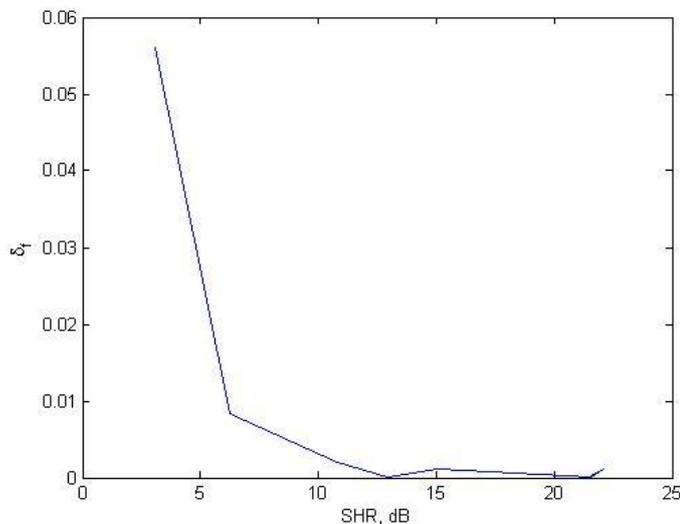


Рисунок 3.2 – Зависимость относительной погрешности определения частоты сигнала методом матричных пучков от соотношения сигнал/шум

Как видно из рисунка 3.2, погрешность уменьшается при увеличении SNR, т.е. при уменьшении шума в сигнале. Заметим, что в данном примере наш метод автоматически определял число полюсов сигнала даже при большом уровне шума по предложенному в параграфе 2.4 алгоритму.

Рассмотрим пример 2.

Теперь усложним задачу и попробуем обработать методом матричных пучков сумму двух затухающих синусоид с добавленным шумом, который считаем значениями нормально распределенной случайной величины с нулевым матожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным 0.1:

$$s(t) = e^{-20t} \cdot \sin(2\pi \cdot 170t) + e^{-15t} \cdot \cos(2\pi \cdot 270t) + 0.1 \cdot \text{randn}(\text{size}(t)).$$

Частота дискретизации взята равной 600 Гц, 50 отсчетов зашумленного сигнала представлены на рисунке 3.3. Отношение сигнал/шум составило 15 дБ.

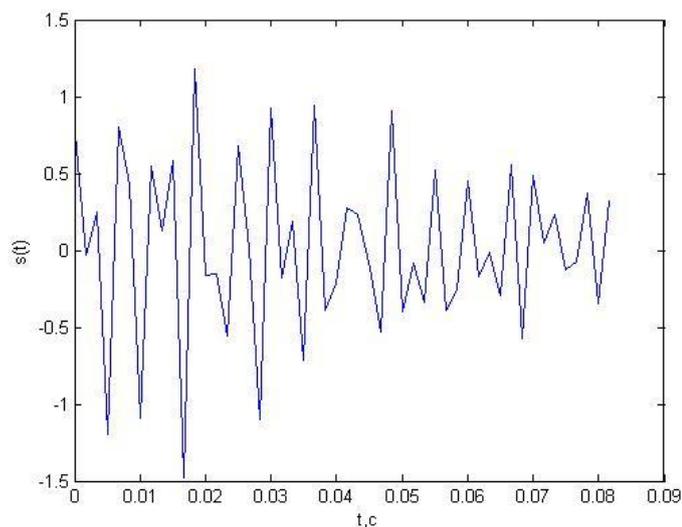


Рисунок 3.3 – Сумма двух затухающих синусоид с SNR=15 дБ

Теперь подадим полученный сигнал на вход в наш метод матричных пучков, не указывая явно число полюсов сигнала (в этом примере оно равно четырем).

Получаем следующие значения числа полюсов и частот (таблица 3.1):
 $L = 4$.

Таблица 3.1

Значения частот найденные методом матричных пучков для сигнала с шумом 15 дБ

fmpm	170.2545	270.2267
------	----------	----------

Далее увеличим шум до SNR=5 дБ, получим значения:
 $L = 4$;

Таблица 3.2

Значения частот найденные методом матричных пучков для сигнала с шумом 5 дБ

fmpm	169.7578	268.5055
------	----------	----------

Для сравнения построим спектр сигнала с помощью команды fft. Найденные методом Фурье частоты, отмечены на рисунке 3.4.

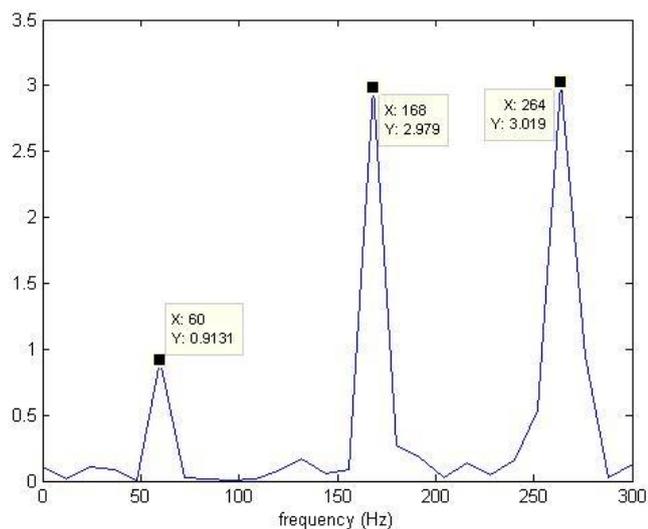


Рисунок 3.4 – Преобразование Фурье суммы двух синусоид с SNR=5 дБ

Подведем итоги работы методов в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Истинные значения частот и значения, полученные методами Фурье и матричных пучков.

Истинные значения частот	Метод матричных пучков	Метод преобразования Фурье
170	169.75	60
270	268.5	168
		264

Как и ожидалось, для такой короткой (50 отсчетов) реализации сигнала с довольно большим шумом, метод Фурье работает плохо, указывая на наличие несуществующей частоты 60 Гц.

Метод матричных пучков нашел обе частоты с лучшей точностью, даже в условиях сильного шума. Напомним, что число частот определялось автоматически нашим методом.

Рассмотрим пример 3.

В данном примере мы применим метод матричных пучков к анализу сигнала, построенного согласно модели № 2, описанной в параграфе 2.1.2. Отмечу, что метод матричных пучков не был предназначен для такого рода сигналов, и впервые был применен к ним в данной работе.

M-файл Matlab, реализующий модель №2, приведен в приложении 2.

На рисунке 3.5 приведены 250 отсчетов сигнала, полученного с частотой дискретизации 2000Гц. На 7, 40 и 153 отсчетах под действием δ -импульсов возникают колебания на трех собственных частотах 200, 450 и 800 Гц. Первая и вторая сумма трех синусоид (появившиеся на 7 и 40 отсчетах) сильно перекрываются («наползают» друг на друга).

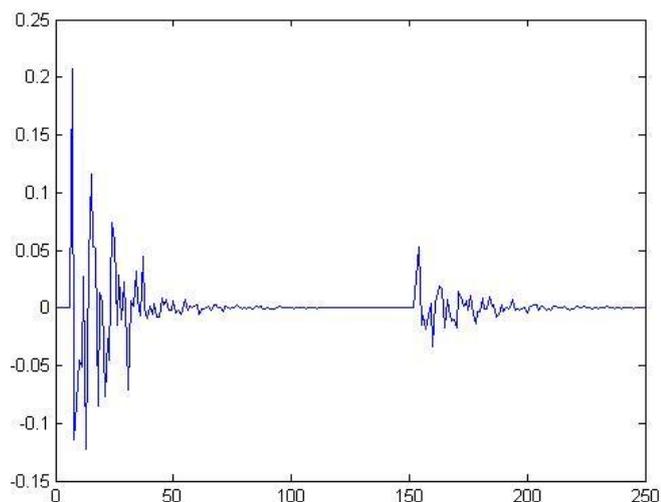


Рисунок 3.5 – Сигнал, представляющий собой последовательность трех сумм трех затухающих синусоид, возникших в случайные моменты времени

Добавленный к этому сигналу шум представляет собой значения нормальной случайной величины с нулевым матожиданием и среднеквадратическим отклонением 0.005. Зашумленный сигнал приведен на рисунке 3.6. Отношение сигнал/шум составило 15 дБ.

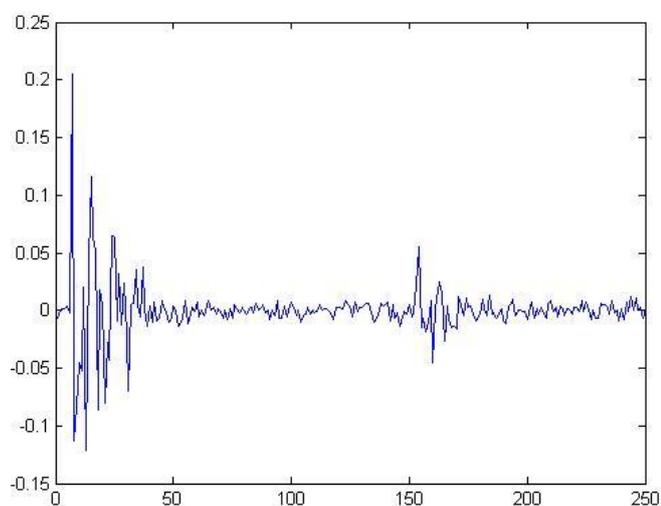


Рисунок 3.6 – Зашумленный сигнал

Методом матричных пучков были получены значения числа полюсов и частоты:

$$L = 6.$$

Значения найденных частот

f	798.1017	456.9548	200.1544
---	----------	----------	----------

Для сравнения найдем частоты с помощью преобразования Фурье. Спектр зашумленного сигнала, полученный с помощью fft, приведен на рисунке 3.7.

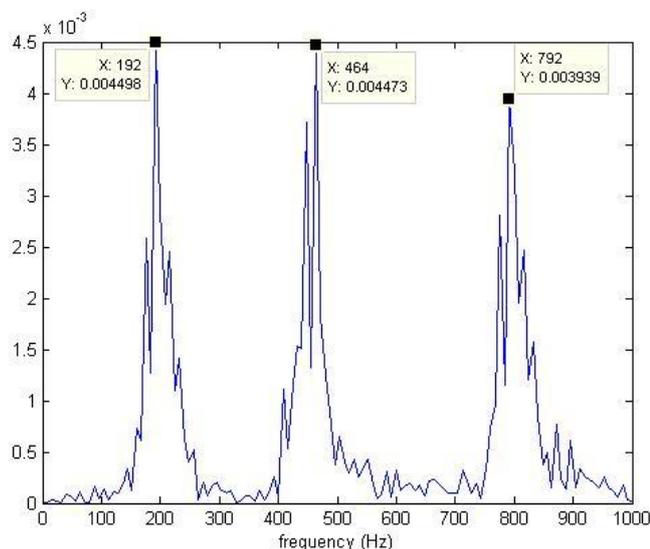


Рисунок 3.7 – Преобразование Фурье зашумленного сигнала

Для наглядности, сведем все результаты в таблицу 3.5.

Таблица 3.5

Истинные значения частот и значения, полученные методами Фурье и матричных пучков.

Истинные значения частот	Результат, полученный методом Фурье	Результат, полученный методом матричных пучков
200	192	200
450	464	456
800	792	798

Заметим, что предложенный нами в параграфе 2.4 метод вновь верно нашел число частот в приведенном примере.

Однако численные эксперименты показали, что данная модель сигнала оказывается уже более сложной для нашего метода. В отличие от модели № 1, в которой метод показал свою работоспособность при SNR=5-10дБ, для сигналов модели № 2 это значение составляет SNR=10-15дБ.

3.1 Выводы по разделу

1. Рассматривается модель сигнала с одной частотой и исследовали зависимость точности определения частоты от соотношения сигнал/шум методом матричных пучков.

2. Рассмотрели ту же модель сигнала, но для числу частот равным двум и провели сравнение метода матричных пучков и непараметрического метода Фурье

3. Применим метод матричных пучков к анализу сигнала, построенного согласно модели № 2, получили положительные отчеты работы метода матричных пучков для всех проводимых экспериментов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован метод матричных пучков. Получены следующие основные результаты:

1. Алгоритм метода матричных пучков реализован в среде Matlab. Программа снабжена подробными комментариями и примером вызова.

2. Описаны две модели сигнала и представлена программная реализация в Matlab модели сигнала, являющейся откликом линейной системы на последовательность δ – импульсов.

3. В программе реализован новый метод определения числа полюсов сигнала при его обработке методом матричных пучков. Метод верно определяет число полюсов до уровня шума SNR=5-10дБ.

4. Проведена серия численных экспериментов и исследована зависимость точности определения частоты от уровня шума в сигнале. При возрастании уровня SNR точность определения частоты увеличивается.

5. Проведено сравнение метода матричных пучков с методом Фурье. Показано, что в случае коротких реализаций сигнала метод Фурье дает менее хорошие результаты, чем метод матричных пучков.

6. Впервые метод матричных пучков (разработанный для модели № 1) применен для более сложной модели № 2. Численные эксперименты показывают хорошую работоспособность метода матричных пучков и при анализе таких сигналов.

Результаты работы могут быть использованы в задачах моделирования реальных процессов, обработке как модельных, так и реальных сигналов методом матричных пучков, в задачах определения числа частот в сигнале. Работа может быть продолжена в направлении обработки реальных сигналов и более существенной модификации метода для решения конкретных прикладных задач. Дальнейшего исследования требует также вопрос определения остальных параметров сигнала (коэффициентов затухания, фаз и амплитуд) методом матричных пучков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Bhuiyan M., Malyarenko E.V., Pantea M.A., Seviaryn F.M., Maev RG.: Advantages and limitations of using matrix pencil method for the modal analysis of medical percussion signals. / IEEE Trans Biomed Eng, 2013 Feb. – 60 p.
- 2 Hua, Y. and Sarkar, T.K.: Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped/Undamped sinusoid in Noise. / IEEE Trans. On Antennas Propag., vol. 38, № 5, May 1990.
- 3 Sarkar, T.K., Pereira O.: Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of Complex Exponentials. / New York.: Antennas and Propagation Magazine, vol. 37, № 1, February 1995.
- 4 Yong Qiang Zou, Xun Zhang Gao, Xiang Li, Yong Xiang Liu.: A Matrix Pencil Algorithm Based Multiband Iterative Fusion Imaging Method. // Scientific Reports. – 19 January 2016. С 1-23.
- 5 Активные фазированные антенные решетки. / Под ред. Д. И. Воскресенского и А.И. Канащенкова. – М.: Радиотехника, 2004. 488с.: ил.
- 6 Бриллинджер, Д.: Временные ряды. Обработка данных и теория. / Бриллинджер Д. – М.: Мир, 1980 г. – 536 с.
- 7 Бушуев О.Ю. Компьютерное моделирование преобразователей давления и численные методы для оценки их технического состояния: дис. канд. тех. наук. ЮУрГУ, Челябинск, 2015.
- 8 Глинченко, А.С.: Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. / Глинченко А.С. Ч.1. – Красноярск: Изд-во КГТУ, 2001. – 199с.
- 9 Золотых, Н.Ю. Использование пакета Matlab в научной и учебной работе. / Золотых Н.Ю. – Нижний Новгород.: НГУ им. Лобачевского, 2006. – 165 с.
- 10 Икрамов, Х. Д.: Матричные пучки теория, приложения, численные методы. / Х. Д. Икрамов.
- 11 Коновалюк М.А., Кузнецов Ю.В., Баев А.Б.: Идентификация объектов сложной формы в сверхкороткоимпульсной радиолокации. // Московский авиационный институт: Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь». – ИРЭ РАН, 26-30 октября 2009 г.
- 12 Марпл-мл., С.Л.: Цифровой спектральный анализ и его приложения. / С.Л. Марпл-мл. – М.: Мир, 1990. 584 с., ил.
- 13 Персичкин, А. А, Шпилевой А. А.: О методике оценки параметров сейсмических сигналов // Научная статья.: БФУ им. Канта, № 10. – 2015. С. 1-125.
- 14 Рабинер, Л., Гоулд, Б.: Теория и применение цифровой обработки сигналов. / Пер. с англ. Под ред. Ю.Н. Александрова. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
- 15 Сергиенко, А.Б.: Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. / 3 изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 784 с., ил.
- 16 Сюзев, В.В.: Цифровая обработка сигналов: методы и алгоритмы: учеб. пособие. / В.В. Сюзев. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана.
- 17 Шестаков А.Л. Семенов А.С., Ибряева О.Л.: Оценка несущей частоты случайной последовательности импульсов методом Прони. / Вестник Южно-Уральского государственного университета 2009, № 37 , С. 106 – 115.

18 Якимов, Е.В.: Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. / Якимов Е.В.
– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 307с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Текст программы, реализующий метод матричных пучков

```
% %Метод матричных пучков (matrix pencil method)

% Входные параметры:
% y - отсчеты сигнала
% L - число полюсов сигнала
% K - параметр метода (по умолчанию, K=floor(N/3), где N=length(y))

% Выход:
% z - полюсы сигнала

% Пример вызова:
% fs=600;
% t=0:1/fs:200/fs;
% L=4;
% y=exp(20*(-t)).*sin(2*pi.*170.*t)+0.4.*randn(size(t));
% z = mpencil(y,L,20);

function z = mpencil(y,L,K)

% Проверка входных данных
N = length(y) ;
if prod(size(y)) ~= N, error('МРМ: y должен быть вектором') ; end
y = y(:) ;

% Определение параметра K
if nargin < 3, K = floor(N/3) ; end

% Построение матрицы данных
for i=1:K+1, A(:,i) = y(i:i+N-K-1) ; end

% SVD-разложение
[u,s,v] = svd(A(:,2:K+1),0) ;

% Оценка числа L полюсов сигнала
if nargin < 2,
    sdiag = diag(s);
    sdiag = sdiag/sdiag(1);
    sdd = -diff(sdiag) ;
    [dummy,L] = max(sdd) ;
    % plot(sdd);
end
```

```
% Вычисление полюсов сигнала
```

```
z = eig(inv(s(1:L,1:L))*u(:,1:L)'*A(:,1:K)*v(:,1:L));
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Тест программы, реализующей сигнал модели 2

```
%%пример модельного сигнала из 3 затухающих синусоид
% Входные параметры:
% f1, f2, f3 – частоты синусоид
% alpha1, alpha2, alpha3 – коэффициенты затухания синусоид
% phi1, phi2, phi3 – фазы синусоид
% Fs – частота дискретизации
% L – число отсчетов сигнала
% N – число импульсов возникающих в случайные моменты времени
% A1, A2, A3 – амплитуды синусоид

clear tau          % хранит номера отсчетов, в которые происходят импульсы
f1=2*pi*200; f2=2*pi*450; f3=2*pi*800;
alpha1=100; alpha2=150; alpha3=100;
Fs=2000;
L=250;
N=5;

% уберем повторяющиеся
tau1=sort(ceil(L.*rand(N,1)));
jj=1; tau(1,1)=tau1(1,1); k=2;

while(jj<N)
    if (tau1(jj+1,1)~=tau1(jj,1))
        tau(k,1)=tau1(jj+1,1);
        k=k+1;
    end
    jj=jj+1;
end

N=length(tau); % это настоящее число импульсов (убрали повторяющиеся
случайные числа)
AA=0.1*randn(N,1); % амплитуда (нормальная случайная величина)
A1=3*AA/5; A2=sqrt(12)*AA/5; A3=2*AA/5;

% (равномерная случайная величина)
phi1=pi*rand(N,1)-pi/2; phi2=pi*rand(N,1)-pi/2; phi3=pi*rand(N,1)-pi/2;

% постоим гистограмму возникновения импульсов
figure(1)
stem(tau, AA);
title('pulse train')
```

```

% формируем сигнал здесь без откидывания "хвостов"
ii=1; h=1; k=1; tau(N+1,1)=L;
ipz=10*Fs/(alpha2); % интервал полного затухания
s=zeros(ipz,N); % взято ipz это "длина" каждой затухающей синусоиды

% возьмем теперь N штук этих синусоид и соберем из них сигнал
kk=1;
while(k<L)
    if (k==tau(ii,1))
        l=tau(ii+1,1)-tau(ii,1);
        t=(0:1/Fs:(ipz-1)/Fs)';
        s(:,kk)=A1(ii)*exp(-alpha1*t).*sin(t*f1+phi1(ii))+A2(ii)*exp(-
alpha2*t).*sin(t*f2+phi2(ii))+A3(ii)*exp(-alpha3*t).*sin(t*f3+phi3(ii));
        kk=kk+1;
        ii=ii+1;
        k=k+1-1;
    end
    k=k+1;
end
M=zeros(L+ipz,1);

k=1; ii=1;
while(k<L)
    if (k==tau(ii,1))
        l=tau(ii+1,1)-tau(ii,1);
        for jj=1:ipz
            M(tau(ii,1)+jj-1,1)= M(tau(ii,1)+jj-1,1)+s(jj,ii);
        end
        ii=ii+1;
        k=k+1-1;
    end
    k=k+1;
end
M=M(1:L,1); % остальное отбросили

noise=0.01*randn(length(M),1);

% Добавим шум к сигналу
Mn=M+noise;

%строим получившийся сигнал
figure(2)
plot (M);

```

```

%строим сигнал с добавленным шумом
figure(3)
plot(Mn)

%Находим отношение мощности сигнала к мощности шума
Signal=sum(M.^2);
Noise=sum(noise.^2);
SNR=Signal/Noise;

% Фурье
Y = fft(Mn(1:L),L);
Pyy = Y.* conj(Y) / L;
F = Fs*(0:L/2)/L;
spectr=Pyy(1:L/2+1);

%строим спектр сигнала
figure(4)
plot(F, spectr)
title('Frequency content of signal')
xlabel('frequency (Hz)')

% Метод матричных пучков
N = floor(k/3);

for i=1:N+1
    C(:,i) = Mn(i:i+k-N-1);
end
L=6;

[A,U,V] = svd(C(:,2:N+1),0);

z = eig(inv(U(1:L,1:L))*A(:,1:L)'+C(:,1:N)*V(:,1:L));
l=length(z);

% Переводим значения полюсов в частоты
for i=1:2:l
    f((i+1)/2)=angle(z(i))*fs/(2*pi);
end

```