О РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Е.В. Табаринцева

Постановка задачи

Рассматривается задача восстановления функции $v(t)=u(1,t)$, $\nu(t)\in L_2[0,\infty)$ (граничного условия), где функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u+f(u) \quad (0<x<1;\ t>0) \tag{1}$$

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0$$

и дополнительному условию

$$u_x(0,t)=q(t),\ t>0. \tag{2}$$

Здесь $a(x)\in C^2[0,1]$, $a(x)\geq 0$, $u(\cdot,t)\in C^2(0,1)\bigcap C([0,1])$; $u(x,\cdot)\in W_2^1\left(0,\infty\right)$; $f:L_2[0,\infty)\to L_2[0,\infty)$ – отображение, заданное с помощью непрерывной числовой функции (оператор Немыцкого), удовлетворяющее условию Липшица, т.е. для любых $u,\nu\in L_2[0,\infty)$

$$\left\|f(u)-f(v)\right\|\leq L\left\|u-v\right\|.$$

Рассмотрим вспомогательную «прямую» задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u+f(u);$$
$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0;\ u(1,t)=\nu(t), \qquad (3)$$

где $a(x)\in C^2[0,1],\ x\in(0,1),\ t>0$, $u(\cdot,t)\in C^2(0,1)\bigcap C([0,1]);\ u(x,\cdot)\in W_2^1\left(0,\infty\right)$

Лемма 1. Пусть $\nu(t),\nu'(t)\in L_2[0,\infty)$. Тогда задача (3) имеет решение $u(\bullet,t)\in C^2(0;1)\bigcap C([0;1]);\ u(x,\bullet)\in W_2^1\left(0,\infty\right)$.

Сведение задачи (1) к операторному уравнению

Пусть функции $q(t),\ q'(t)$ в задаче (1) принадлежат $L_2(0,\infty)$. Рассмотрим вспомогательную прямую задачу (3). Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (3);: $u(\bullet,t)\in C^2(0;1)\bigcap C([0;1]);\ u(x,\bullet)\in W_2^1\left(0,\infty\right)$.

Применяя к задаче (3) преобразование Фурье, имеем следующую задачу для нелинейного обыкновенного уравнения второго порядка:

$$U_{xx}(x,\lambda)=i\lambda U(x,\lambda)+a(x)U(x,\lambda)+g(U);$$
$$U(0,\lambda)=0;\ U_x(0,\lambda)=Q(\lambda). \qquad (4)$$

Здесь $U(x,\lambda)=Fu=\int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t}u(x,t)dt$ – образ Фурье функции $u(x,t)$; $g:L_2(0;\infty)\to L_2(0;\infty)$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица.

Рассмотрим следующие линейные нормированные пространства: $X=L_2(0,\infty)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом, определенных при $t\in[0,\infty)$ (принимающих действительные значения), Φ – пространство функций, допускающих аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im} z<0$ и таких, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F(s+i\sigma)|^2\,ds<C$ при всех $\sigma<0$.

Линейный оператор $F_0:L_2[0,1]\to\Phi$, действующий по правилу

$$F_0(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t}f(t)dt,$$

является изометрией.

Задача (4) равносильна интегральному уравнению

$$U(x,\lambda)=\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\mu_0\sqrt{\lambda}}Q(\lambda)+\int\limits_0^x\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}}\left[g(U(\xi,\lambda))+a(\xi)U(\xi,\lambda)\right]d\xi, \qquad (5)$$

где $\mu_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

Метод вспомогательных граничных условий

Пусть вместо точного начального условия $q(t)$ в задаче (1) известны δ – приближение $q_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что $\left\|q-q_\delta\right\|\le\delta$.

Пусть известно также, что при точно заданном начальном условии $q(t)$ задача (1) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации

$$M_r = \{v \in X;\ \ v' \in X,\ \ \|v\|^2_X + \|v'\|^2_X \le r^2\}$$

Таким образом, при заданном начальном условии Q задача (4) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации

$$\tilde{M}_r = \{V \in \Phi; \lambda V \in \Phi,\ \ \left\|\sqrt{1+\lambda^2}V\right\|_\Phi \le r\}.$$

Требуется построить устойчивое приближенное решение задачи (1) и оценить его уклонение от точного решения.

Вместо некорректно поставленной задачи (1) рассмотрим вспомогательную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u + f(u)\ \ (0 < x < 1;\ t > 0); \\ &u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0;\ u_x(0,t) + \varepsilon u(1,t) = q_\delta(t). \end{aligned} \tag{6}$$

В качестве приближенного решения задачи (1) будем рассматривать функцию

$$v_\delta^\varepsilon(t) = u_\delta^\varepsilon(1,t), \tag{7}$$

где $u_\delta^\varepsilon(x,t)$ – решение задачи (6).

Пусть $q(t), q'(t) \in L_2[0;\infty)$; $q(0) = 0$. Как и при исследовании исходной задачи (1), убедимся, что к задаче (6) применимо преобразование Фурье на полупрямой $t \in (0;\infty)$. Применяя к (7) преобразование Фурье, получим следующую краевую задачу для нелинейного уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} &U_{xx}(x,\lambda) = i\lambda U(x,\lambda) + a(x)U(x,\lambda) + g(U); \\ &U(0,\lambda) = 0; U_x(0,\lambda) + \varepsilon U(1,\lambda) = Q_\delta(\lambda). \end{aligned} \tag{8}$$

Задача (8) равносильна интегральному уравнению

$$U(x,\lambda) = s_\varepsilon(\lambda,x)Q_\delta(\lambda) + \int_0^x s_\varepsilon(\lambda, x-\xi)\left[g(U(\xi,\lambda)) + a(\xi)U(\xi,\lambda)\right]d\xi, \tag{9}$$

где $s_\varepsilon(x,\xi) = \dfrac{sh\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\mu_0\sqrt{\lambda} + \varepsilon sh\mu_0\sqrt{\lambda}}$.

Оценка погрешности метода вспомогательных граничных условий

Рассмотрим приближенное решение V_δ^ε задачи (4), определенное уравнением (9). В качестве характеристики точности приближенного решения рассмотрим величину

$$\Delta(\varepsilon,\delta) = \sup\left\{\left\|V_\delta^\varepsilon - V\right\| : V \in \tilde{M}_r;\ \|V - V_\delta\| \le \delta\right\}.$$

Воспользуемся очевидной оценкой

$$\Delta(\varepsilon,\delta) \le \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon,\delta),$$

где

$$\Delta_1(\varepsilon) = \sup\{\|V^\varepsilon - V\| : V \in \tilde{M}_r\},$$

$V^\varepsilon = U_\varepsilon(1,\lambda)$, где $u_\varepsilon(x,t)$ – решение задачи (6) с точно заданным начальным условием;

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta) = \sup\{\|V_\delta^\varepsilon - V^\varepsilon\| : \|Q - Q_\delta\| \le \delta\}.$$

Оценим величины $\Delta_1(\varepsilon)$, $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$.

Для величины $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$ имеем оценку $\Delta_2(\varepsilon,\delta) \le C\delta \sup\limits_{\lambda \ge 0} |s_\varepsilon(1,\lambda)| \le \dfrac{C\delta}{\varepsilon}$.

Далее,

$$\Delta_1(\varepsilon) \le r \sup_{\lambda \ge 0} \frac{\varepsilon |s_\varepsilon(1,\lambda)|}{\sqrt{1+\lambda^2}}. \tag{10}$$

Имеем следующее неравенство:

$$\sup_{\lambda \ge 0} \frac{\varepsilon |s_\varepsilon(1,\lambda)|}{\sqrt{1+\lambda^2}} \le \frac{C_1}{(\ln\varepsilon)^2}.$$

Следовательно, $\Delta_1(\varepsilon) \le \dfrac{C_r}{(\ln\varepsilon)^2}$.

Выбирая зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ из условия минимальности величины $\Delta(\varepsilon,\delta)$ (квазиоптимальный выбор параметра регуляризации), получаем, что оценка погрешности приближенного решения (9) на множестве $\tilde{M}_r$ имеет вид

$$\Delta(\varepsilon(\delta),\delta) \le \frac{C_2}{\ln^2\delta}. \tag{11}$$

В силу изометричности преобразования Фурье из оценки (11) следует

Теорема 2. При сформулированных выше условиях существуют постоянные $\delta_0; C$ такие, что для любого $\delta \in (0,\delta_0)$ справедлива оценка погрешности метода вспомогательных граничных условий на множестве M_r

$$\Delta(\varepsilon(\delta),\delta) \le \frac{C}{\ln^2\delta}.$$

Для выбора параметра регуляризации на практике может быть использована схема, не использующая явно априорную информацию о точном решении поставленной обратной задачи.

Библиографический список

1. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Наука, 1962.

2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. – 2006. – Т.407. – № 3. – С. 316–318.

3. Ильин, А.М. Уравнения математической физики / А.М. Ильин. – Челябинск: Издательский центр ЧелГУ, 2005.

4. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Наука, 1995.