Институт математики Сибирского отделения РАН

На правах рукописи

Доманский Евгений Николаевич

УДК 517.948

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СХОДИМОСТИ РЕГУЛЯРИЗАЦИОННОГО ПРОЦЕССА СУЩЕСТВОВАНИЮ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ

/ 01.01.01 - математический анализ /

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 1992

Работа выполнена в Челябинском государственном техническом университете

Официальные оппоненты:

академик В.П.Маслов

доктор физико-математических наук,

профессор И.В.Мельникова

доктор физико-математических наук,

профессор А.Г.Кусраев

Ведущая организация - Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Защита состоится "_____"_____ 199 г.. в_____ часов на заседании Специализированного совета Д 002.23.02 в Институте математики СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Университетский пр., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Автореферат разослан "_____"_____ 199 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета
доктор физико-математических
наук, профессор В.А.Шарафутдинов

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Актуальность темы. Для приближенного решения некорректных задач уже около 30 лет применяется метод регуляризации А.Н.Тихонова, базирующийся на понятии Т-регуляризующего алгоритма (ТРА) $\{R_\delta\}$, $\delta \in T$. Для случая некорректного уравнения $Ax = y$ предполагается, что при некотором $y_0 \in Y$ существует точное решение x_0 уравнения $Ax = y$. Но y_0 на практике неизвестно, а заданы элемент $y_\delta \in Y$ и число $\delta > 0$ такие, что $\| y_\delta - y_0 \| \leq \delta$. За приближенное решение уравнения принимается элемент $R_\delta y_\delta$. По определению ТРА $R_\delta y_\delta \to x_0$, $\delta \to 0$. Отличительной особенностью метода регуляризации является то, что требуется знать не только элемент y_δ, но и число δ, чтобы определить отображение R_δ. На практике было бы желательно, чтобы из сходимости формально построенного "приближенного решения" вытекала сходимость его именно к точному решению уравнения. Дело в том, что как отмечалось специалистами на практике пара (y_δ, δ) известна нечётко: вообще говоря, нет уверенности, что $\| y_\delta - y_0 \| \leq \delta$. Может оказаться, что для заданных y_δ и δ $\| y_\delta - y \| \leq \delta$ и $y \notin R(A)$. Последнее исследователю, как правило, неизвестно, так как на практике не известен элемент y. И если используемый ТРА обладает "избыточной" сходимостью, то $R_\delta y_\delta$ сходится к некоторому элементу, но, конечно, не к решению уравнения $Ax = y$. Необходимо избегать использования таких ТРА в методе регуляризации. В.П. Масловым в 1968 году впервые приведен пример ТРА $\{R_\delta\}$, обладающего свойством: если $y \notin R(A)$ и $\| y_\delta - y \| \leq \delta$, то $R_\delta y_\delta$ расходится при $\delta \to 0$. В диссертации в связи с этим вводится понятие регуляризующего алгоритма по Маслову (МРА) для отображения, в частности, для уравнения. Его сходимость эквивалентна существованию решения задачи. Изучаются свойства МРА, условия их существования, способы построения.

Цель работы состоит в изучении нового математического объекта регуляризующего алгоритма по Маслову.

Общая методика исследования. В диссертации используются методы геометрической теории банаховых пространств и операторов в них, методы теории регуляризуемости по Тихонову разрывных отображений, развитые в работах В.А. Винокурова, Л.Д. Менихеса,

Ю.И.Петунина, А.Н. Пличко, а также методика исследования и решения некорректных задач, созданная А.Н. Тихоновым, В.К.Ивановым, М.М. Лаврентьевым.

Научная новизна. В диссертации введено понятие МРА для разрывного отображения, действующего в метрических пространствах, и ряд других понятий, связанных с МРА. Найдено необходимое и достаточное условие существования непрерывного МРА для отображения. Доказано, что обратные отображения обладают ТРА и непрерывным МРА одновременно, и если y^* слабо* сепарабельно, то ОНИЛ линейно конечномерно Т-регуляризуемы и линейно конечномерно М-регуляризуемы также одновременно. Указаны способы построения МРА для уравнения как точно заданного, так и возмущенного.

Получены необходимые и достаточные условия существования разложений по базису для решения уравнения $Ax=y$, обобщающих классическое разложение Гильберта-Шмидта.

Практическая и теоретическая ценность. Введенные в диссертации М-регуляризующие алгоритмы более предпочтительны при решении некорректных задач методом регуляризации. Полученные результаты представляют самостоятельный теоретический интерес. Кроме того, они могут быть применены для выяснения существования МРА для данной задачи, для их построения.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах Московского, Черновицкого и Уральского государственных университетов, Института математики Сибирского отделения РАН, ряда школ по теории операторов в функциональных пространствах: IX-ой - Тернополь, 1984 г.; X-ой - Новосибирск, 1985 г.; XI-ой - Челябинск, 1986 г.; XII-ой - Тамбов, 1987 г.; школы-семинара по некорректно поставленным задачам (Саратов, 1985 г.); Воронежской зимней математической школы (1987 г.); Международной конференции "Некорректно поставленные задачи в естественных науках" (Москва, 19-25 августа 1991 г.); Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Банаха (Львов, 6-8 мая 1992 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах 1-25.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, изложена на 248 машинописных страницах. Список литературы содержит 253 наименования отечественной и зарубежной литературы.

II. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть X и Y – метрические пространства, $f: \mathcal{D}(f) \subset X \to Y$ – произвольное разрывное отображение, T – некоторое подмножество множества положительных чисел, имеющее число 0 своей предельной точкой. Основой метода регуляризации А.Н. Тихонова (1963 г.) является понятие регуляризующего алгоритма по Тихонову (РА) для f.

Определение I. Семейство $\{R_\delta\}$, $\delta \in T$ отображений $R_\delta: X \to Y$, заданных на X, называется T-регуляризующим алгоритмом (РА) для f, если

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \lim_{\delta \to 0} \sup_{\{x' \in X:\, \rho(x', x) \le \delta\}} \rho(R_\delta(x'), f(x)) = 0 \quad (1)$$

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – инъективное непрерывное отображение. Полагая в определении I $f = A^{-1}$, получим определение РА для A^{-1} или уравнение

$$Ax = y. \quad (2)$$

Отображения R_δ при этом будут действовать из Y в X, а условие (1) заменится следующим:

$$\forall x \in X \lim_{\delta \to 0} \sup_{\{y \in Y:\, \|y - Ax\| \le \delta\}} \|R_\delta y - x\| = 0.$$

Диссертация состоит из введения, четырех глав и насчитывает 22 параграфа. Глава I состоит из 6 параграфов. В первом параграфе вводится понятие более предпочтительного на практике М-регуляризующего алгоритма (МРА) для отображения f, в частности, для уравнения (2).

Определение 2. РА $\{R_\delta\}$, $\delta \in T$ для отображения f называется М-регуляризующим алгоритмом для f, если

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y\ \forall x_\delta \in X\ (\rho(x_\delta, x) \le \delta \,\&\, R_\delta(x_\delta) \to y,\ \delta \to 0 \Rightarrow x \in \mathcal{D}(f) \,\&\, f(x) = y).$$

Из определения МРА следует, что если $\{R_\delta\}$ – МРА для уравнения (2), то сходимость "регуляризованного решения" $R_\delta y_\delta$ эквивалентна разрешимости уравнения (2), причем его предел, является решением соответствующего уравнения (2). Пример МРА для

уравнения (2), причем линейного, впервые предложил В.П. Маслов (1968 г.).

В первом и во втором параграфах главы I изучаются некоторые свойства МРА, используемые в дальнейшем при доказательстве основных результатов.

Доказано, что по каждому ТРА для f можно построить ТРА для f, не являющийся МРА.

Будем говорить, что отображение f Т-регуляризуемо, если для f существует хотя бы один ТРА, f Т-регуляризуемо с некоторым свойством, если для f существует хотя бы один ТРА, обладающий этим свойством. Например, f линейно Т-регуляризуемо, если для f существует ТРА $\{R_\delta\}$, $\delta \in T$, каждое *отображение* R_δ *которого является линейным и непрерывным.* Аналогично определяется М-регуляризуемость f, линейная М-регуляризуемость f и так далее. В § I.3 главы найдено необходимое и достаточное условие непрерывной М-регуляризуемости f, т.е. существования для f хотя бы одного непрерывного МРА.

Теорема I. Пусть $f: \mathcal{D}(f) \subset X \to Y$ – произвольное отображение, действующее из метрического пространства X в линейное нормированное пространство Y, $Y \neq 0$ с областью определения типа $F_{\sigma\delta}$ в X. Тогда если f Т-регуляризуемо, то f непрерывно М-регуляризуемо.

Используя известный результат В.А.Винокурова о том, что f Т-регуляризуемо тогда и только тогда, когда f -аналитически представимое отображение первого класса, отсюда получаем

Следствие I. Пусть X *-метрическое,* Y *-линейное нормированное пространство,* $Y \neq 0$. Тогда f непрерывно М-регуляризуемо в том и только в том случае, когда f - аналитически представимое отображение первого класса, заданное на множестве типа $F_{\sigma\delta}$ в X.

В.К.Ивановым, М.М. Лаврентьевым и В.Н.Страховым всякое поточечно сходящееся семейство $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in T$ непрерывных отображений $f_\alpha : X \to Y$ к разрывному отображению $f(x)$ названо регуляризатором для f. Если отображения f_α линейны (конечномерны), то семейство $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in T$ называется линейным (конечномерным) регуляризатором для f.

Результат В.А. Винокурова переформулируется следующим образом: если Y - линейное нормированное пространство, то f

Т-регуляризуемо тогда и только тогда, когда f обладает регуляризатором. Легко видеть, что f линейно Т-регуляризуемо если и только если f обладает линейным регуляризатором.

В четвертом параграфе вводится понятие разрешимого регуляризатора.

Определение 3. Регуляризатор (линейный регуляризатор) $\{f_\alpha\}$ $\alpha \in T$ для отображения f называется разрешимым (линейным разрешимым) регуляризатором, если $\mathcal{M}(f_\alpha) \subset \mathcal{D}(f)$, где $\mathcal{M}(f_\alpha) = \{x \in X \mid \exists y \in \mathcal{Y}\ f_\alpha(x) \to y, \alpha \to 0\}$ множество сходимости семейства $\{f_\alpha\}$.

Показано, что вопрос о существовании непрерывного МРА (линейного МРА) для f сводится к существованию разрешимого (линейного разрешимого) регуляризатора для f.

В связи с этим во всех последующих главах диссертации изучается вопрос о существовании регуляризаторов, в частности, линейных регуляризаторов, линейных разрешимых регуляризаторов и др.

В пятом параграфе главы показано, что если $\mathcal{Y}$ -линейное нормированное пространство и $A: X \to \mathcal{Y}$ - непрерывное инъективное отображение, то образ $R(A)$ оператора A есть множество типа $F_{\sigma\delta}$ в $\mathcal{Y}$, и на основе этого результата из теоремы I, примененной к отображению A^{-1}, получено следующее важное

Следствие 2. Пусть X - банахово, $\mathcal{Y}$ - линейное нормированное пространство, $A: X \to \mathcal{Y}$ - инъективный непрерывный оператор. Если оператор A^{-1} Т-регуляризуем, то A^{-1} непрерывно М-регуляризуем, а в случае сепарабельности X A^{-1} непрерывно конечномерно М-регуляризуем.

Т.о., обратные отображения Т-регуляризуемы, М-регуляризуемы и даже непрерывно М-регуляризуемы одновременно.

В шестом, последнем параграфе главы I вводится понятие секвенциального МРА для отображения f, в точности описывающее теорему В.П. Маслова (1968 г.).

Определение 4. ТРА $\{R_\delta\}$, $\delta \in T$ для отображения f называется секвенциальным МРА для f, если $\forall x \in X\ \forall y \in \mathcal{Y}\ \forall \{\delta_n\} \subset T$, $\delta_n \to 0, n \to \infty\ \forall \{x_n\} \subset X (\rho(x_n, x) \le \delta_n \& R_{\delta_n}(x_n) \to y, n \to \infty \Rightarrow x \in \mathcal{D}(f) \& f(x) = y)$.

Теорему В.П. Маслова в случае $\overline{R(A)} = X$ можно переформу-

лировать так: семейство $R_\delta = A^*(\delta E + AA^*)^{-1}, \delta > 0$ образует секвенциальный МРА для уравнения (2), где $E: X \to X$ тожде твенный оператор.

Изучаются свойства секвенциальных МРА для f. Вводится понятие строго разрешимого регуляризатора для f.

Определение 5. Регуляризатор $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in T$ для отображения f называется строго разрешимым для f, если для любой $\{\alpha_n\} \subset T$, $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$ $\mathcal{M}(f_{\alpha_n}) \subset \mathcal{D}(f)$.

Всякий строго разрешимый регуляризатор, очевидно, является разрешимым. Приведен пример разрешимого, но не строго разрешимого регуляризатора. Показано, что существует МРА для f, не являющийся секвенциальным МРА для f. В заключение параграфа найдены три достаточных условия существования секвенциального МРА для f. Например,

Теорема 2. Пусть X -метрическое, $\mathcal{Y}$ -бесконечномерное сепарабельное линейное нормированное пространство $f: \mathcal{D}(f) \subset X \to \mathcal{Y}$ - произвольное Т-регуляризуемое отображения с областью определения, принадлежащей первому борелевскому классу множеств. Тогда f непрерывно секвенциально М-регуляризуемо.

Глава 2 состоит из 5 параграфов. В § 2.I на основе известных результатов В.П. Маслова, А.Б. Бакушинского, Ю.И. Худака вводятся понятия В-разрешимого и усиленно В-разрешимого семейства линейных операторов при некотором линейном операторе B для линейного уравнения (2) и в терминах усиленной В-разрешимости семейства дается необходимое и достаточное условие, при котором данное семейство линейных непрерывных операторов является линейным регуляризатором. На основе этого результата для случая линейного ТРА дана интерпретация пределу "регуляризованного решения" $R_\delta y_\delta$ как обобщенному решению уравнения (2). Предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} R_\delta y_\varepsilon$ является точным решением уравнения $BAx = By$ при некотором линейном операторе B с $\mathcal{D}(B) = \mathcal{Y}$ и $\operatorname{Ker} B \cap R(A) = \{0\}$.

Во втором параграфе главы рассматриваются усиленно В-разрешимые линейные регуляризаторы, изучаются их свойства. Линейные регуляризаторы вида $\Psi(BA, \alpha)B$, $\alpha > 0$, содержащие известный класс регуляризаторов А.Б. Бакушинского, исследованы на их усиленную В-разрешимость.

В третьем параграфе главы дается общая схема обобщения теоремы Пикара о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода на основе линейного регуляризатора. При этом используются результаты второго параграфа главы.

В § 2.4 изучаются линейные МРА для линейного уравнения (2). Указано необходимое и достаточное условие, при котором линейный ТРА для уравнения (2) является МРА.

Пусть X и Y - линейные нормированные пространства. Через $B(X,Y)$ обозначим множество всех линейных непрерывных операторов из X в Y ; $B_c(X,Y)$ - подмножество инъективных операторов из $B(X,Y)$.

Теорема 3. Пусть X и Y - линейные нормированные пространства, $A \in B_c(X,Y)$. Линейный ТРА для уравнения (2) является МРА для уравнения (2) тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}(R_\delta) \subset R(A)$.

Указан некоторый способ построения линейных секвенциальных МРА для уравнения (2), исходя из линейного регуляризатора.

Теорема 4. Пусть X и Y - линейные нормированные пространства, $A \in B_c(X,Y)$; $\{R_\alpha\}, \alpha \in T'$ - некоторый строго разрешимый линейный регуляризатор для уравнения (2). Тогда если для функции $\alpha(\delta)$, $\delta \in T$, $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ семейство $\{R_{\alpha(\delta)}\}, \delta \in T$ образует ТРА для уравнения (2), то оно является секвенциальным МРА для этого уравнения.

Т.о., все линейные ТРА, построенные на основе строго разрешимого линейного регуляризатора, являются секвенциальными МРА.

Линейные регуляризаторы вида $\Psi(BA,\alpha)B$ исследованы на строгую разрешимость. Показано, что многие из них являются строго разрешимыми.

В § 2.5 предложены способы построения линейных секвенциальных МРА для линейного уравнения (2) при условии, что оператор в уравнении задан с ошибкой.

Глава 3 состоит из 4 параграфов. Она содержит ряд необходимых условий существования линейных регуляризаторов, линейных разрешимых регуляризаторов для уравнения вида (2), J- регуляризаторов для задачи управления. На основе этих условий указан ряд отрицательных примеров.

Так, например, получены такие результаты:

I) если A^{-1} линейно регуляризуем, и Y - WCG

пространство, то X – WCG пространство;

2) если A^{-1} линейно регуляризуем и Y^{**} слабо* сепарабельно, то X^{**} слабо* сепарабельно;

3) если A^{-1} обладает дискретным линейным разрешимым регуляризатором и X^* слабо* сепарабельно, то Y^* слабо* сепарабельно.

Эти утверждения дополняют известное необходимое условие Т-регуляризуемости A^{-1}, полученное В.А. Винокуровым (1972 г.).

Глава 4 диссертации состоит из 7 параграфов. В ней в основном изучаются линейные конечномерные разрешимые регуляризаторы.

В § 4.1 изучаются так называемые $\mathcal{T}$-регуляризаторы для некорректных задач управления, рассматриваемых В.К. Ивановым. Установлено существование линейных конечномерных $\mathcal{T}$-регуляризаторов для задачи управления, т.е. задачи решения неравенства $\|Ax-y\|\le\delta$, $\delta>0$, с любым оператором $A\in B(X,Y)$, плотно по норме действующим из нормированного пространства X в сепарабельное банахово пространство со свойством ограниченной аппроксимации Y.

Во втором параграфе главы на основе анализа теоремы Пикара о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода вводится понятие разрешимого базиса для уравнения (2) с произвольным оператором A из $B_0(X,Y)$ в случае бесконечномерных банаховых пространств.

Определение 6. Базис $\{x_n\}$ в X с сопряженной системой $\{x_n^*\}$ называется разрешимым базисом для уравнения (2), если существует последовательность $\{g_n\}$ функционалов $g_n\in(A^*)^{-1}(x_n^*)$, $n\in\mathbb{N}$ такая, что множество сходимости последовательности операторов

$$A_n y=\sum_{k=1}^{n} g_k(y)x_k,\ n\in\mathbb{N}$$

совпадает с $R(A)$.

По определению всякий разрешимый базис для уравнения является базисом Шаудера. С другой стороны, каждый базис является разрешимым базисом для тривиального уравнения $Ex=x$. Пример разрешимого базиса содержит упоминавшаяся классическая теорема Пикара. Именно, разрешимым базисом является базис из собственных элементов оператора уравнения. Замечено, что решение x и

только решение уравнения $Ax=y$, обладающего разрешимым базисом $\{x_n\}$ с сопряженной $\{f_n\}$, можно представить в виде:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)x_n,$$

где $\{g_n\}$ - некоторая последовательность из Y^* такая, что $A^*g_n=f_n$, $n\in N$.

Разложение решения уравнения $Ax=y$ по разрешимому базису можно понимать как обобщение классического разложения Гильберта-Шмидта.

Найдены два необходимых и достаточных условия на последовательность, при которых она является разрешимым для данного уравнения (2).

Теорема 5. Пусть X и Y - банаховы пространства, причем X с базисом, Y^* слабо* сепарабельно, $A\in B_0(X,Y)$. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\{x_n\}$ - разрешимый базис в X для уравнения (2);

2) последовательность $\{x_n\}$ образует базис в X, сопряженная которого $\{f_n\}\subset A^*Y^*$ такова, что для некоторой тотальной в Y^* последовательности $\{g_n\}$ $A^*g_n=f_n$, $n\in N$;

3) последовательность $\{x_n\}$ образует базис в X, причем оператором A он переводится в минимальную систему с тотальной сопряженной.

Из теоремы 5 получен ряд следствий.

Следствие 2. Существуют банаховы пространства X и Y с базисом, с сепарабельными сопряженными пространствами и оператор $A\in B_0(X,Y)$, для которых уравнение обладает базисом с сопряженной из A^*Y^* и не имеет разрешимого базиса.

А.Н. Пличко доказано, что разрешимым базисом обладает любое уравнение (2) с оператором A, плотно по норме действующим из рефлексивного банахова пространства с базисом X в линейное нормированное пространство Y.

В заключение параграфа по аналогии с определением 6 вводятся понятия разрешимого операторного базиса и разрешимого линейного операторного базиса для уравнения вида (2), обобщающие понятие разрешимого базиса.

В третьем параграфе главы приводится замечательный результат В.П.Фонфа.

Теорема 6 (В.П. Фонф). Пусть X и $\mathcal{Y}$ - банаховы пространства, X сепарабельно, $\mathcal{Y}^*$ слабо* сепарабельно, $A \in B_0(X, \mathcal{Y})$. Следующие утверждения равносильны:

I) оператор A^{-1} Т-регуляризуем;

2) в X существует разрешимый операторный базис для уравнения (2);

3) уравнение (2) обладает разрешимым конечномерным регуляризатором. Найдены некоторые новые классы операторов $A \in B_0(X, \mathcal{Y})$, для которых оператор A^{-1} T- регуляризуем. Для уравнений с такими операторами в силу теоремы В.П. Фонфа существует разрешимый операторный базис.

Теорема 7. Пусть X и $\mathcal{Y}$ - сопряженные пространства к некоторым банаховым пространствам, причем X WCG пространство, $A \in B_0(X, \mathcal{Y})$ - сопряженный оператор к некоторому линейному непрерывному оператору. Тогда A^{-1} T -регуляризуем и, следовательно, $\mathcal{M}$- регуляризуем.

М.И. Островским доказано, что обратные операторы к сопряженным операторам линейно конечномерно Т-регуляризуемы.

В § 4.4 главы получен аналог теоремы В.П. Фонфа для линейного случая.

Теорема 8. Пусть X и $\mathcal{Y}$ - банаховы пространства, $\mathcal{Y}^*$ слабо* сепарабельно, $A \in B_0(X, \mathcal{Y})$. Следующие предложения равносильны:

I) оператор A^{-1} линейно конечномерно регуляризуем;

2) в X существует разрешимый линейный операторный базис для уравнения (2);

3) оператор A^{-1} обладает линейным конечномерным разрешимым регуляризатором;

4) оператор A^{-1} линейно конечномерно $\mathcal{M}$ -регуляризуем.

В § 4.5 главы найдены некоторые достаточные условия, при которых в известных критериях В.А. Винокурова, Л.В. Гладуна, Ю.И. Петунина, А.Н. Пличко Т-регуляризуемости A^{-1} и В.А. Винокурова, А.Н. Пличко линейной конечномерной Т-регуляризуемости A^{-1} подпространство $A^*\mathcal{Y}^*$ можно заменить на возможно более обозримое подпространство $A^*\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ -произвольное тотальное подпространство (не обязательно замкнутое) из $\mathcal{Y}^*$.

Таким условием, например, является условие слабой компактности оператора A. В результате сформулирован ряд эффективно проверяемых достаточных условий Т-регуляризуемости или линейной конечномерной Т-регуляризуемости обратных операторов к суперпозиции линейных непрерывных операторов.

В § 4.5 главы рассматривается вопрос о существовании так называемых линейных канонически конечномерных регуляризаторов для A^{-1}. Показано, что обратные операторы к сопряженным операторам обладают такими регуляризаторами. В последнем, седьмом параграфе главы изучаются проекционные регуляризаторы для A^{-1}, т.е. линейные регуляризаторы вида $R_n = A^{-1}P_n, n \in N$, где P_n - некоторые проекторы на некоторую возрастающую последовательность $\{M_n\}$ замкнутых подпространств M_n из $R(A)$. Указаны некоторые условия существования проекционных регуляризаторов для A^{-1}.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Т.о., в ходе выполненного исследования изучены некоторые вопросы нового направления в теории регуляризации некорректных задач - регуляризации по Маслову.

Получены следующие основные результаты.

I) Введен ряд понятий теории: понятие М-регуляризующего алгоритма, секвенциального М-регуляризующего алгоритма для отображения, действующего в метрических пространствах, понятие разрешимого и строго разрешимого регуляризатора, разрешимого базиса для уравнения и др.

2) Найдено необходимое и достаточное условие существования непрерывного МРА для отображения, достаточное условие существования секвенциального МРА для отображения.

3) Доказано, что обратные отображения к непрерывным отображениям обладают ТРА и непрерывным МРА одновременно. Если пространство Y^* слабо* сепарабельно, то обратные операторы к линейным непрерывным операторам линейно конечномерно T-регуляризуемы и линейно конечномерно M-регуляризуемы также одновременно.

4) Указан способ построения МРА и секвенциальных МРА для уравнения как точного, так и возмущенного.

5) Получены условия существования разложений по базису или некоторому его обобщению для решения уравнения $Ax=y$, обобщающих классическое разложение Гильберта-Шмидта. Сформулированы необходимые и достаточные условия на последовательность элементов пространства, при которых она является разрешимым базисом для уравнения $Ax=y$.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Доманский Е.Н. К вопросу о разрешимости линейного операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 1979, № 2. С. 25-30.
2. Доманский Е.Н. Характеристическое свойство линейного регуляризатора // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по некорректно поставленным задачам. Фрунзе: Илим. 1979. С. 56-57.
3. Доманский Е.Н. Условия усиленной В-разрешимости линейных регуляризующих алгоритмов // Исследования по математическому анализу. Свердловск: УрГУ. 1979. С. 23-29.
4. Доманский Е.Н. О регуляризующих алгоритмах, сходимость которых эквивалентна разрешимости некоторых линейных операторных уравнений // Известия вузов. Математика. 1980, № 7. С. 14-20.
5. Доманский Е.Н. О классе усиленно В-разрешимых линейных регуляризующих алгоритмов // Известия вузов. Математика. 1980, № 8. С. 20-26.
6. Доманский Е.Н. Некоторые необходимые условия линейного регуляризатора // Прикладная математика. Челябинск: ЧПИ. 1980. С. 33-35.
7. Доманский Е.Н. О свойствах тотальных последовательностей

операторов и некоторых их приложениях // Матем. заметки. 1983. Т. 34, № 2. С. 219-226.

8. Доманский Е.Н. О некоторых свойствах образа сопряженного оператора и регуляризуемости обратных задач // IX школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Тернополь: Збруч. 1984. 1984. С. 92.

9. Доманский Е.Н. К регуляризуемости некорректно поставленных задач управления // Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения. Труды Всесоюзной школы-семинара по некорректно поставленным задачам. Саратов: Сарат. гос. университет. 1985. С. 61-62.

10. Доманский Е.Н. О регуляризуемости некорректно поставленных задач управления. Известия вузов. Математика. 1986, № 12. С. 27-31.

11. Доманский Е.Н. О некоторых свойствах образа сопряженного оператора // Некоторые вопросы теории операторов. Свердловск: УрГУ. 1987. С. 29-36.

12. Доманский Е.Н. Об эквивалентности сходимости регуляризующего алгоритма существованию решения обратной задачи // XII школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Ч. I. Тамбов. 1987. С. 65.

13. Доманский Е.Н. Об эквивалентности сходимости регуляризующего алгоритма существованию решения некорректной задачи // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42, вып. 5. С. 101-118.

14. Доманский Е.Н. Необходимое и достаточное условие непрерывной регуляризуемости по Маслову разрывных отображений // XIV школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Ч. I. Новгород. 1989. С. 81.

15. Доманский Е.Н. О разрешимых базисах для линейного операторного уравнения первого рода // XVI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Нижний Новгород. 1991. С. 69.

16. Доманский Е.Н. Из сходимости формальных "регуляризованных решений" некорректной задачи следует сходимость их к решению этой задачи // Некорректно поставленные задачи в естественных науках. Тезисы докладов Международной конференции. Москва. 1991. С. 129.

17. Доманский Е.Н. О непрерывной регуляризуемости по Маслову некорректных задач // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С. 246-249.

18. Доманский Е.Н. О существовании разрешимых базисов для линейного операторного уравнения первого рода // Тезисы Международной математической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Банаха. Львов. 1992. С. 58-59.

19. Доманский Е.Н., Кадец В.М. О базисных подпространствах в сопряженном пространстве // XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Часть I. Челябинск: ЧПИ. 1986. С. 39.

20. Доманский Е.Н., Кадец В.М. О базисной регуляризуемости обратных операторов // Сиб. матем. журнал. 1988. Т. 29, № 5. С. 104-108.

21. Доманский Е.Н., Островский М.И. О нормируемости образа сопряженного оператора // XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Часть I. Челябинск: ЧПИ. 1986. С. 40.

22. Доманский Е.Н., Островский М.И. О регуляризуемости обратных

операторов к линейным инъекциям и их суперпозициям // Сиб. матем. журнал. 1988. Т. 29, № 3. С. 190-193.

23. Доманский Е.Н., Пличко А.Н. К обобщению теоремы Пикара о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 4. С. 781-784.

24. Доманский Е.Н., Пличко А.Н. К обобщению теоремы Пикара о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода - полный текст // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. Свердловск: УрГУ. 1985. С. 19-28.

25. Доманский Е.Н., Фонф В.П. Операторные базисы и разрешимость операторных уравнений первого рода // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 3. С. 531-534.