

# РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ В ОПТИМАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ

*Е.А. Саламатов*

В различных отраслях промышленности применяются аппараты, в которых реализуются процессы течения тонких слоев вязких жидкостей (жидких пленок). Широкое применение аппаратов пленочного типа объясняется высокой интенсивностью протекающих в них процессов. Высокая интенсивность процессов обеспечивается за счет возникновения и развития волновых возмущений на свободной поверхности жидкой пленки. Расчет и изучение влияния различных физических факторов на развитие возмущений в жидкой пленке способствует совершенствованию методов конструирования аппаратов пленочного типа, разработке новых алгоритмов и систем управления аппаратами.

Рассмотрим тонкий слой однородной несжимаемой вязкой жидкости, стекающей по вертикальной гладкой стенке под действием силы тяжести. В конечно-модовом приближении эволюция возмущений на свободной поверхности жидкой пленки описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dt} = & \omega_i a_0 + \beta_2 (2a_0 a_1 a_2 \sin \Delta + 2a_0 a_3 a_4 \sin \Delta_1) - \\ & - \beta_1 (a_0^3 + 2a_0 a_1^2 + 2a_0 a_2^2 + 2a_0 a_3^2 + 2a_0 a_4^2 + 2a_0 a_1 a_2 \cos \Delta + 2a_0 a_3 a_4 \cos \Delta_1); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} = & (kd_1 a_1 - k^2 \alpha_1 + \omega_i) a_1 - \\ & - \beta_1 (2a_0^2 a_1 + a_1^3 + 2a_1 a_2^2 + 2a_1 a_3^2 + 2a_1 a_4^2 + a_0^2 a_2 \cos \Delta + 2a_2 a_3 a_4 \cos(\Delta_1 - \Delta)) - \\ & - \beta_2 (a_0^2 a_2 \sin(-\Delta) - 2a_2 a_3 a_4 \sin(\Delta_1 - \Delta)); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} = & -\beta_1 (2a_0^2 a_2 + 2a_1^2 a_2 + a_2^3 + 2a_2 a_3^2 + 2a_2 a_4^2 + a_0^2 a_1 \cos(-\Delta) + \\ & + 2a_1 a_3 a_4 \cos(\Delta_1 - \Delta)) - \beta_2 (a_0^2 a_1 \sin(-\Delta) - 2a_1 a_3 a_4 \sin(\Delta_1 - \Delta)) - \\ & - (kd_1 + k\alpha_1^2 - \omega_i) a_2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_3}{dt} = & -\beta_1 (2a_0^2 a_3 + 2a_1^2 a_3 + 2a_2^2 a_3 + a_3^3 + 2a_3 a_4^2 + a_0^2 a_4 \cos \Delta_1 + \\ & + 2a_1 a_2 a_4 \cos(\Delta - \Delta_1)) - \beta_2 (a_0^2 a_4 \sin \Delta_1 + 2a_1 a_2 a_4 \sin(\Delta_1 - \Delta)) + \omega_i a_3; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_4}{dt} = & -\beta_1 (2a_0^2 a_4 + 2a_1^2 a_4 + 2a_2^2 a_4 + 2a_3^2 a_4 + a_4^3 + a_0^2 a_3 \cos \Delta_1 + \\ & + 2a_1 a_2 a_3 \cos(\Delta_1 - \Delta)) - \beta_2 (a_0^2 a_3 \sin \Delta_1 + 2a_1 a_2 a_3 \sin(\Delta_1 - \Delta)) + \omega_i a_4; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} = & 4\beta_1 (a_1 a_2 \sin \Delta + a_3 a_4 \sin \Delta_1) + 4\beta_2 (a_1 a_2 \cos \Delta + a_3 a_4 \cos \Delta_1) + \\ & + \frac{\beta_1}{a_1} (a_0^2 a_2 \sin(-\Delta) - 2a_2 a_3 a_4 \sin(\Delta_1 - \Delta)) - \\ & - \frac{\beta_2}{a_1} (a_0^2 a_2 \cos \Delta + 2a_2 a_3 a_4 \cos(\Delta_1 - \Delta)) + \\ & + \frac{\beta_1}{a_2} (a_0^2 a_1 \sin(-\Delta) - 2a_1 a_3 a_4 \sin(\Delta_1 - \Delta)) - \\ & - \frac{\beta_2}{a_2} (a_0^2 a_1 \cos \Delta + 2a_1 a_3 a_4 \cos(\Delta_1 - \Delta)) + \beta_2 (-2a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) - 2k^2 \alpha_2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_1}{dt} = & 4\beta_1 (a_1 a_2 \sin \Delta + a_3 a_4 \sin \Delta_1) + 4\beta_2 (a_1 a_2 \cos \Delta + a_3 a_4 \cos \Delta_1) + \\ & + \frac{\beta_1}{a_3} (a_0^2 a_4 \sin \Delta_1 + 2a_1 a_2 a_4 \sin(\Delta_1 - \Delta)) - \\ & - \frac{\beta_2}{a_3} (a_0^2 a_4 \cos \Delta_1 + 2a_1 a_2 a_4 \cos(\Delta - \Delta_1)) + \beta_2 (-2a_0^2 + 2a_1^2 + a_3^2 + a_4^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_1}{a_4} \left( a_0^2 a_3 \sin \Delta_1 + 2 a_1 a_2 a_3 \sin(\Delta_1 - \Delta) \right) - \\
& - \frac{\beta_2}{a_4} \left( 2 a_1^2 a_3 + a_0^2 a_3 \cos \Delta_1 + 2 a_1 a_2 a_3 \cos(\Delta_1 - \Delta) \right), \quad (7)
\end{aligned}$$

где  $a_0$  – амплитуда несущей волны;  $a_1, a_2$  – амплитуды боковых волн;  $a_3, a_4$  – амплитуды наклонных волн;  $\Delta, \Delta_1$  – сдвиги фаз волн;  $\beta_1$  характеризует нелинейное затухание возмущений;  $\beta_2$  – характеризует нелинейную

зависимость фазы от амплитуды;  $d_1 = \frac{d\omega_i}{dk}$ ;  $\alpha_1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2\omega_i}{dk^2}$ ;  $\alpha_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^2\omega_r}{dk^2}$ ;

$$\omega_i = \frac{(b_1 k^3 - b_2 k)k - b_3 b_4 k}{(b_3 k)^2 + 1} \text{ – инкремент; } \omega_r = \frac{(-b_1 k^4 + b_2 k^2) b_3 k - b_4 k}{(b_3 k)^2 + 1} \text{ – час-}$$

тота;  $b_1 = -\frac{Re\sigma}{3}$ ;  $b_2 = \frac{3}{40} Re^3 F^2$ ;  $b_3 = \frac{5}{24} Re^2 F$ ;  $b_4 = -ReF$ ;  $Re$  – число Рейнольдса,  $Re \in [5; 10]$ ;  $\sigma$  – параметр поверхностного натяжения;  $F$  – число Фруда;  $k$  – волновое число.

В рамках системы (1)–(7) рассмотрены оптимальные режимы течения жидкой пленки (воды).

Система (1)–(7) решена с помощью программы [2] методом Рунге–Кутты–Мерсона 4-го порядка на промежутке  $t \in [0; 100]$  при начальных условиях  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,001$ ,  $\Delta = \Delta_1 = 0$ .

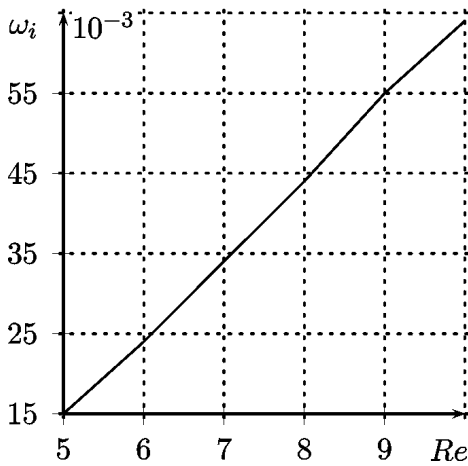


Рис. 1. Максимальный инкремент

Оптимальным режимам течения отвечают максимальные значения инкремента  $\omega_i$  (рис. 1). Интерес к оптимальным режимам обусловлен тем, что такие режимы оказывают наибольшее влияние на работу аппаратов пленочного типа, с наибольшей вероятностью реализуются в эксперименте [1, 3].

Развитие возмущений на свободной поверхности жидкой пленки осуществляется таким образом, что наблюдается рост амплитуды несущей волны  $a_0$  (рис. 2) и амплитуд наклонных волн  $a_3, a_4$  (рис. 4), амплитуды боковых волн  $a_1, a_2$  уменьшаются (рис. 3).

Увеличение числа Рейнольдса  $Re$  приводит увеличению скоростей роста амплитуд несущей  $a_0$  (рис. 2, кривые 2, 3) и наклонных  $a_3, a_4$  волн (рис. 3, кривые 2, 3), увеличивается скорость затухания боковых  $a_1, a_2$  волн (рис. 4, кривые 2, 3).

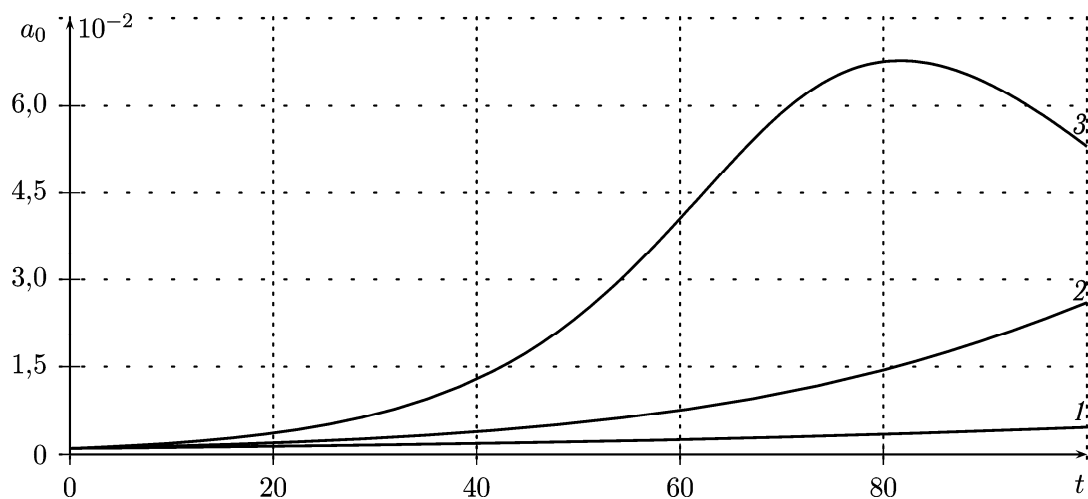


Рис. 2. Развитие амплитуды несущей волны  $a_0$ :  
 1 –  $Re=5$ ; 2 –  $Re=7$ ; 3 –  $Re=10$

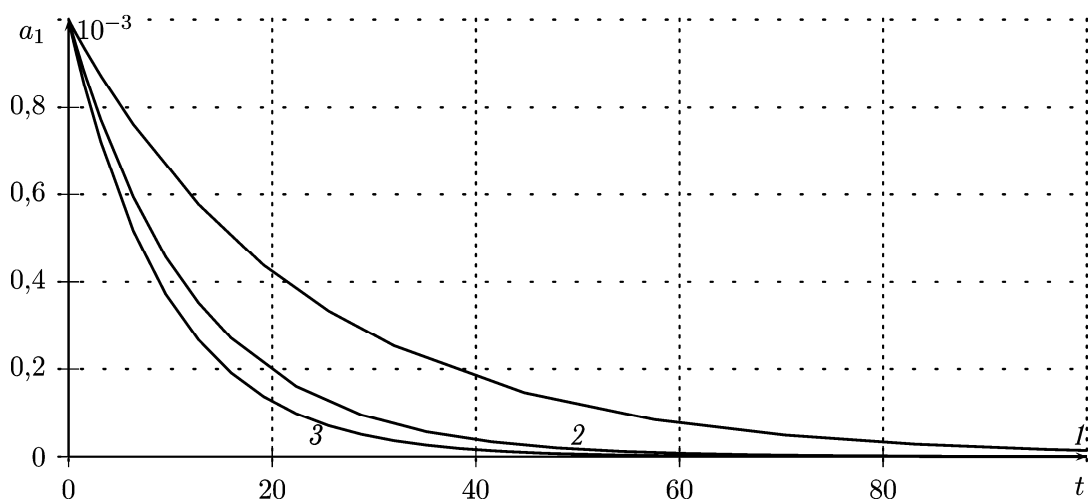


Рис. 3. Развитие амплитуды боковой волны  $a_1$ :  
 1 –  $Re=5$ ; 2 –  $Re=7$ ; 3 –  $Re=10$

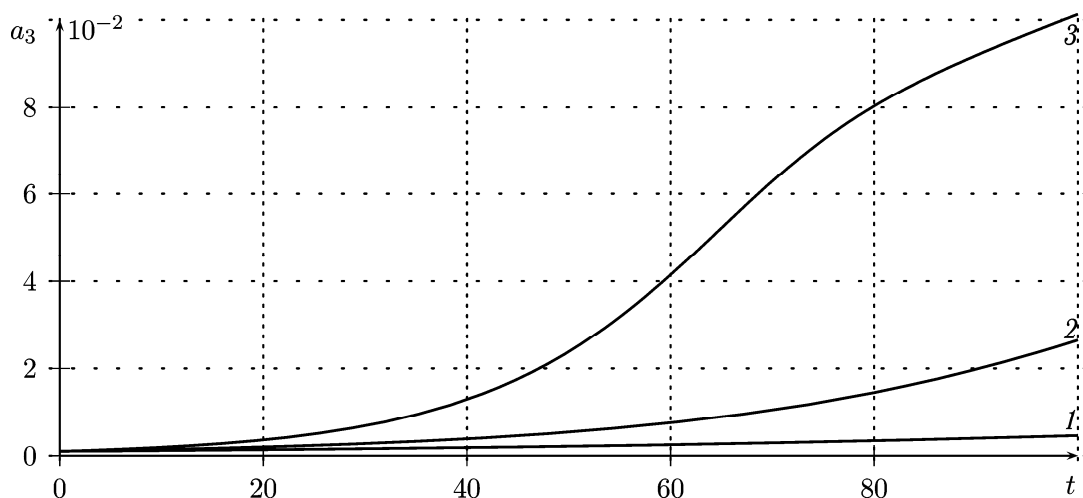


Рис. 4. Развитие амплитуды наклонной волны  $a_3$ :  
 1 –  $Re=5$ ; 2 –  $Re=7$ ; 3 –  $Re=10$

Выявленные закономерности развития возмущений на свободной поверхности жидкой пленки могут быть использованы при проектировании аппаратов пленочного типа.

#### Библиографический список

1. Прокудина, Л.А. Математическое моделирование неустойчивости тонкого слоя вязкой жидкости / Л.А. Прокудина, Е.А. Саламатов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2009. – Вып. 9. – № 3(136). – С. 48–54.

2. Нелинейное развитие возмущений в жидкой пленке: свидетельство РФ о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010615017 от 03.08.2010 / Е.А. Саламатов, Л.А. Прокудина.

3. Прокудина, Л.А. Моделирование оптимальных режимов течения жидкой пленки в контакте с газовым потоком / Л.А. Прокудина, Е.А. Саламатов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2010. – Вып. 3. – № 30. – С. 79–82.