Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и методики преподавания математики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, к. ф.-м.н.,доцент
________________ /М.А.Сагадеева/
директор ИЕТН ЮУрГУ

________________ /А.В.Келлер/
«____» ____________ 2017 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф. -м.н.,доцент

____________________ /В.Л. Дильман/
«____» ____________ 2017 г.

Трехточечная начально-конечная задача для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной в квазисоболевских пространствах

ЮУрГУ – 01.03.01. 2017. 12-031-1881. ВКР

Руководитель, д.ф. -м.н., доцент
____________________ /С.А. Загребина/
«____» ____________ 2017 г.

Автор, студент группы ЕТ-481
____________________ /П.А. Боровинских/
«____» ____________ 2017 г.

Нормоконтролер, к. ф.-м.н., доцент
______________________ /М.А.Корытова /
«____» ____________ 2017 г.

Челябинск 2017

УДК 517.9

Боровинских П. А.

Трехточечная начально-конечная задача для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной в квазисоболевских пространствах/ П.А. Боровинских. – Челябинск, 2017. – 37с.

Работа посвящена разрешимости трехточечной начально-конечной задачи для уравнения для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной в квазисоболевских пространствах.

Список лит. – 14 назв.

Содержание

Введение

Исследования вырожденных голоморфных групп операторов тесно связаны с исследованиями в области теории уравнений, неразрешенных относительно производной. Начало изучению таких уравнений положил А.Пуанкаре, но систематическое их изучение началось в середине двадцатого века, благодаря основополагающим работам С.Л.Соболева. В связи с этим в современных математических исследованиях касательно уравнений, неразрешенных относительно производной, появился термин "уравнения соболевского типа".

На текущий момент уравнения соболевского типа и вырожденные голоморфные группы операторов - это глубоко изучаемые области неклассических уравнений математической физики и функционального анализа. За последнее время написано большое количество монографий, посвященных этому вопросу, сформированы научные направления. Проблемами вырожденных голоморфных групп операторов активно занимаются Р.Е. Шоулдер (R.E.Showalter), А.Фавини(A. Favini), С.Г. Пятков, Т.Г. Сукачева, В.Е. Федоров, Г.А. Свиридюк.

Термин "голоморфные разрешающие группы"был введен Р.Е. Шоулдер. Голоморфные вырожденные группы операторов как разрешающие группы линейных уравнений соболевского типа впервые были изучены Г.А.Свиридюком в Классическими примерами замены одного условия на более общим при изучении математических объектов являются квазинормированное и квазибанахово пространства

Квазинормированным пространством $(\mathfrak{U};_{\mathfrak{U}}|\cdot\|)$ называется линеал $\mathfrak{U}$ над полем $\mathbb{R}$, с квазинормой $_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$, которая отличается от нормы аксиомой "неравенство треугольника":

$$\forall u, v \in \mathfrak{U} \quad _{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C(_{\mathfrak{U}}\|u\| +_{\mathfrak{U}} \|v\|,)$$

где константа $C \geq 1$.

Строго говоря, квазинормированное пространство не нормируемо, но метризуемо. Отсюда немедленно следует корректность понятий полноты и фундаментальной последовательности для квазинормируемого пространства. Также стоит подчеркнуть, что квазинормируемые пространства используются при решении прикладных задач, вместе с тем являясь самостоятельным объектом теоретических исследований.

Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым*. Следует отметить, что любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное утверждение ошибочно.

Несмотря на то, что понятия "банахово пространство"и "квазибанахово пространство"неразрывно связаны друг с другом, самостоятельное изучение квазибанаховых пространств как объектов исследования началось не так давно, например, в работах Н. Кэлтона(N. Kalton).

В общем случае в квазибанаховых пространствах нельзя построить никакие другие отображения, кроме тождественного и нулевого, например, в пространстве $L_p[a,b],\ 0 < p < 1$. Однако, это верно не для всех квазибанаховых пространств. В пространстве последовательностей $\ell^m_{q,\,0<q<1},\ m \in \mathbb{R}$ имеются линейные отображения, не являющиеся тривиальными. Мы будем рассматривать только те квазибанаховы пространства, которые затем будем называть квазибанаховыми пространствами последовательностей.

Полученные ранее результаты в банаховых пространствах спустя какое-то время оказались востребованы в теории динамических измерений, теории устойчивости уравнений соболевского типа изучении уравнений соболевского типа высокого порядка. Уравнения соболевского типа используются при моделировании разнообразных процессов в технических и естественных науках. Например, уравнение Баренблатта - Желтова - Кочиной, моделирующее динамику вязко-упругой жидкости в трещинновато-пористой среде.

Целью работы является разрешимость трехточечной начально-конечной задачи

$$P_a(u(a)-u_a)=0,\;\; P_b(u(b)-u_b)=0,\;\; P_c(u(c)-u_c)=0$$

для линеаризованного уравнения для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной

$$(\lambda-\Lambda)\dot{u}=\alpha\Lambda u$$

в квазисоболевских пространствах где $-\infty\le a<b<c\le+\infty,\ P_a,\ P_b,\ P_c$ – относительно спектральные проекторы.

1 Квазибанаховы пространства последовательностей и линейные операторы

1.1 Квазибанаховы пространства последовательностей

Пусть $\mathfrak{U}$ - некоторый вещественный линеал; упорядоченная пара $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если

(i) $\forall u\in\mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\|\ge 0,$ причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\|=0\Longleftrightarrow u=\mathbf{0},$ где $\mathbf{0}\in\mathfrak{U}$

(ii) $\forall u\in\mathfrak{U}\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ {}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\|=|\alpha|\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|u\|$

(iii) $\forall u,v\in\mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\|\le C({}_{\mathfrak{U}}\|u\|+{}_{\mathfrak{U}}\|v\|),$ где константа $C\ge 1$ и не зависит

ни от u, ни от v. Функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|:\mathfrak{U}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ называется *квазинормой* в случае $C\ge 1$, а в случае $C=1$ еще и нормой. Таким образом, понятие квазинормированного пространства является обобщением понятия нормированного пространства. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ будем отождествлять с линеалом $\mathfrak{U}$.

Квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ естественным образом задает топологию на $\mathfrak{U}$. Базисом окрестностей служит совокупность всех множеств вида $\{u\in\mathfrak{U}:{}_{\mathfrak{U}}\|u-v\|<\varepsilon\}$, где $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. В случае $C=1$ это топология определяется посредством метрики $\rho(u,v)={}_{\mathfrak{U}}\|u-v\|$. Однако, квазинормированное пространство метризуемо и в случае $C>1$.

Лемма 1.1 *Пусть $\mathfrak{U}$ - квазинормированное пространство и пусть число α определяется уравнением $(2C)^2 = 2$. Тогда на $\mathfrak{U}$ существует метрика $d : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ такая, что при всех $u \in \mathfrak{U}$*

$$d(\mathbf{0}, u) \leq_{\mathfrak{U}} \|u\|^\alpha \leq 2d(\mathbf{0}, u). \tag{1.1.1}$$

Из леммы 1.1. вытекает, что мы располагаем понятием *фундаментальной последовательности* $\{u_n\} \subset \mathfrak{U} : \lim\limits_{n,l\to\infty} {}_{\mathfrak{U}}\|u_n - u_l\| = 0$, а значит, и понятие полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым.* Предел $u \in \mathfrak{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ будем обозначать символом $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

Пример 1.1.1 *Пространства последовательностей ℓ_q, $q \in \mathbb{R}_+$, банаховы при*
$q \in [1, +\infty)$ и квахибанаховы при $q \in (0, 1)$. Во втором случае $C = 2^{\frac{1}{q}}$.

Пространства последовательностей ℓ_q при $q \in (0, 1)$ будем называть квазибанаховыми пространствами последовательностей.

Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. По аналогии с пространствами Соболева W_p^m введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$\ell_p^m = \left\{ \quad \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|\right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$${}_p^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|\right)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0, 1)$, то константа $C = 2^{\frac{1}{p}}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_p^0 = \ell_p$.

Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ - два квазибанаховых пространства последовательностей. Будем говорить, что

- $\mathfrak{U}$ *вложено* в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;

- $\mathfrak{U}$ *плотно вложено* в $\mathfrak{F}$, если вдобавок замыкание $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;

- $\mathfrak{U}$ *плотно и непрерывно вложено* в $\mathfrak{F}$, если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ выполнено ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq C \cdot_{\mathfrak{F}} \|u\|$, где $C \in \mathbb{R}_+$ - некоторая константа, не зависящая от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1 *При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_p^m \hookrightarrow \ell_p^l$.*

1.2 Линейные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей

Теперь пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\, {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\, {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right)$ для любой сходящейся в $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ и *ограниченным*, если при любом $u \in \mathfrak{U}$

$$ {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \leq K \cdot_{\mathfrak{U}} \|u\|, $$

где $K \in \mathbb{R}_+$ не зависит от u.

Лемма 1.2 (*лемма о локальной непрерывности* [74]). *Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}; d_1)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}; d_2)$ два метрических пространства и оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, определенный в окрестности точки $u_0 \in \mathfrak{U}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i)L *непрерывное отображение в точке $u_0 \in \mathfrak{U}$, т.е.*

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \forall u \in \mathfrak{U} \quad d_1(u, u_0 < \delta \Rightarrow d_2(Lu, Lu_0) < \varepsilon;$

(ii) *прообраз открытого в $\mathfrak{F}$ множества открыт в $\mathfrak{U}$;*

(iii)*для любой последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$, последова–тельность $\{Lu_n\}$ является сходящейся в $\mathfrak{F}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right)$.*

Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающее пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, таких что $\operatorname{dom} L = \mathfrak{U}$ является линеалом, который мы обозначим символом $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. На этом линеале определим неотрицательную функцию

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{\mathfrak{U}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|.$$

Теорема 1.2 *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ такой, что* $\operatorname{dom} L = \mathfrak{U}$, *непрерывен точно тогда, когда он ограничен.*

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей, операторы

$T : \mathfrak{V} \to \mathfrak{F}$ и $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, тогда формулой

$$Mu = T(Lu) \quad (u \in \mathfrak{U})$$

определяется оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, который называется *композицией* операторов T и $L (M = TL)$.

Лемма 1.3 *Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ и $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, тогда оператор M ограничен, т.е. $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, и*

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|M\| = {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|TL\| \leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\|L\|.$$

Утвеждение леммы, в силу определению квазинормы, очевидно следует из оценки

$$_{\mathfrak{F}}\|Mu\| = {}_{\mathfrak{F}}\|T(Lu)\| \leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathfrak{V}}\|Lu\| \leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\|L\|_{\mathfrak{U}}\|u\|.$$

Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется обратимым, если существует оператор $L^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$, такой что $L^{-1}L = \mathbb{I}_{\mathfrak{U}}, LL^{-1} = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}}$. Обратимый оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется непрерывно обратимым, если $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$.

Непрерывный оператор называется топлинейным изоморфизмом, если $\operatorname{dom} L^{-1} = \mathfrak{F}$.

Теорема 1.3 *(аналог теоремы Банаха). Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей, тогда биективный оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ - топлинейный изоморфизм.*

Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ монотонно возрастающая последовательность такая, что

$\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа $\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}$.

Теорема 1.4 *При всех $p \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_p^{m+2} \to \ell_p^m$ — топлинейный изоморфизм.*

1.3 Пространства линейных ограниченных операторов

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей, $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ - линеал всех линейных ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.5 *(теорема о продолжении) Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей. Любой линейный непрерывный оператор $L : \operatorname{dom} L \to \mathfrak{F}$ с плотной областью определения ($\overline{\operatorname{dom} L} = \mathfrak{U}$) можно продолжить, и при том единственным образом, до линейного непрерывного оператора $\widetilde{L} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, определенного на всем пространстве $\mathfrak{U}$.*

Лемма 1.4 *Функция $_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}) \to \mathbb{R}_+$ - квазинорма.*

Теорема 1.6 *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - квазибанаховы пространства последовательностей, тогда $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ - квазибанахово пространство с квазинормой $_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\cdot\|$*

тогда по определению квазинормы в пространстве $L(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$

1.4 Функции линейных ограниченных операторов

Пусть $\mathfrak{F}$ - квазибанахово пространство последоваетльностей, $\mathcal{L}(\mathfrak{F})(\equiv \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{F}))$ - квазибанахово пространство линейных ограниченных операторов.

Теорема 1.7 *Пусть $\mathfrak{F}$ - квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| < 1/C$. Тогда оператор $T = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M$ непрерывно обратим и где C — константа из определения квазинормы.*

Определение 1.1 *Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной точкой оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, если существует оператор $R_\lambda(M) = (\lambda\mathbb{I} - M)^{-1}$ (резольвента оператора M). Множество регулярных точек $\rho(M)$ оператора M называется резольвентным множеством оператора M.*

Определение 1.2 *Комплексное число λ, не являющееся регулярным называется спектральной точкой или спектральным значением оператора M. Множество спектральных точек $\sigma(M)$ называется спектром оператора M.Таким образом, $\sigma(M) = \mathbb{C}\backslash\rho(M)$.*

Спектр всегда непуст, замкнут и лежит в круге $|\lambda| \leq C \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \|M\|$. Точнее, *спектр $\sigma(M)$ лежит в круге, радиус которого равен $C \cdot r_M$*, где

$$r_M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M^n\|}.$$

При $|\lambda| > C \cdot r_M$ всегда существует резольвента и $R_\lambda(M) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{\lambda^{k+1}}$. Для резольвенты выполняется *тождество Гильберта*

$$R_\lambda(M) - R_\mu(M) = (\mu - \lambda)R_\lambda(M)R_\mu(M), \quad \lambda, \mu \in \rho(M), \tag{1.4.2}$$

которое проверяется непосредственно.

Теорема 1.8 *Пусть $\mathfrak{F}$ - квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Тогда резольвентное множество $\rho(M)$ открыто, а резольвента $R_\lambda(M)$ оператора M является аналитической функцией переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ в окрестности регулярной точки $\mu \in \rho(M)$,* *причем для* $|\mu-\lambda| < 1/(C \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \|R_\mu(M)\|)$ *справедливо*

$$R_\lambda(M) = R_\mu(M) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu-\lambda)^k R_\mu^{k+1}(M). \qquad (1.4.3)$$

1.5 Аналитические функции операторов

Пусть D - ограниченная область в $\mathbb{C}$. Пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и принимает значения в квазибанаховом пространстве последовательностей $\mathfrak{F}$. Будем говорить, что $f(z)$ *аналитична* в D, если для любого $z_0 \in D$ существует окрестность V_{z_0}, в которой функция $f(z)$ может быть представлена как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-z_0)^n, \quad f_n \in \mathfrak{F}.$$

Степенной ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $a \in \mathbb{C}$, элементы $c_n \in \mathfrak{F}$, будем называть *рядом Лорана.* Если вектор-функция представима сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, то *вычетом* функции в этой точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Классификацию изолированных особых точек будем понимать также, как в теории функций комплексного переменного.

Интеграл от вектор-функции $f(z)$ по замкнутому гладкому контуру $\Gamma \subset \mathbb{C}$ будем понимать как сумму вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри контура Γ, умноженную на коэффициент $2\pi i$. Тогда ясно, что для аналитических вектор-функций справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

Пусть $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, обозначим через K_M класс всех функций $\varphi(\lambda)$ комплексного переменного, *кусочно-аналитических на спектре* $\sigma(M)$. Это означает, что функция $\varphi \in K_M$, если она обладает следующими свойствами:

1) область определения функции $\varphi(\lambda)$ состоит из конечного числа открытых связных компонент, объединение которых содержит спектр $\sigma(M)$ оператора M, причем каждая компонента содержит по крайней мере одну точку спектра;
2) функция $\varphi(\lambda)$ кусочно-голоморфна, то есть голоморфна в каждой компоненте своей области определения.

Если две функции $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda) \in K_M$ совпадают на некоторой открытой окрестности спектра $\sigma(M)$, то, очевидно, они будут аналитическим продолжением друг друга. Такие функции считаются равными.

Для $\varphi \in K_M$ всегда найдется гладкий, сложный, вообще говоря, контур Γ_M, охватывающий спектр $\sigma(M)$. Другими словами, Γ_M распадается на конечное число границ некоторых открытых множеств, объединение которых принадлежит области определения φ и накрывает спектр $\sigma(M)$, каждый из жордановых контуров "положительно"ориентирован, т. е. так, чтобы при движении в заданном направлении по контуру соответствующее множество оставалось слева. После этого положим для $\varphi \in K_M$

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \varphi(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda.$$

Из теоремы Коши следует независимость интеграла от выбора контура. В частности, операторная экспонента e^{Mt} и сам оператор M задаются следующим образом:

$$e^{Mt} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} e^{\lambda t} R_\lambda(M) d\lambda, \quad M = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \lambda R_\lambda(M) d\lambda.$$

Рассмотрим оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, спектр которого образует несвязное множество. Замкнутую часть спектра, имеющую в нем замкнутое дополнение, называют *спектральным множеством.*

Предположим, что

$$\sigma(M) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k(M),$$

где $\sigma_k(M)(k=\overline{1,m})$ - непересекающиеся спектральные множества. Будем считать, что контур Γ_M состоит из непересекающихся частей $\Gamma_k(k=\overline{1,m})$, каждая из которых окружает область G_k, содержащую соответствующее спектральное множество $\sigma_k(M)$.

Зададим функции

$$\varphi_k(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{если } \lambda\in G_k,\\ 0, & \text{если } \lambda\in G_j, \quad j\neq k\end{cases}$$

Функции $\varphi_k(M)\in K_M(k=\overline{1,m})$, и поэтому имеют смысл операторы

$$P_k=\varphi_k(M)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_M}\varphi_k(\lambda)R_\lambda(M)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_M}R_\lambda(M)d\lambda.$$

Последний интеграл в этом равенстве известен под названием *интеграл Ф. Рисса.*

Поскольку в области$G=\bigcup\limits_{k=1}^{m}G_k$ *выполняются соотношения*

$$\varphi_k(\lambda)\varphi_j(\lambda)=\delta_{kj}\varphi_k(\lambda),$$

(δ_{kj} - символ Кронекера);

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\lambda)\equiv 1$$

справедливы равенства

$$P_kP_j=0\ \ (k\neq j);\quad P_k^2=P_k;\quad \sum_{k=1}^{m}P_k=I.$$

2 Вырожденные голоморфные группы операторов

2.1 Относительно резольвенты

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M^{-1}) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Замечание 2.1. Если пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, а оператор $L = \mathbb{I}$, то $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ совпадают с классическим определением резольвентного множества и спектра оператора M соответственно.

Замечание 2.2. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то L-резольвентное множество и L-спектр оператора M совпадают с резольвентным множеством и спектром оператора $L^{-1}M$ (или оператора ML^{-1}).

Замечание 2.3. Пусть пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$. Если оператор L непрерывно обратим, а оператор $M = \mathbb{I}$, то $\rho^L(M) = \rho(L^{-1})$ и $\sigma^L(M) = \sigma(L^{-1})$. Также, когда операторы L и M инволютивные, то $\rho^M(L) = \rho^L(M)$ и $\sigma^M(L) = \sigma^L(M)$, где определение множества $\rho^M(L)$ такое же определение множества $\rho^L(M)$ с заменой места операторов L и M.

Напомним, что оператор T называется инволютивным, если $T = T^{-1}$ такой, что $T^2 = \mathbb{I}$.

Лемма 2.1. *Множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, и, следовательно, $\sigma^L(M)$ всегда замкнут.*

Определение 2.1. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда оператор – функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно *L-резольвентой, правой и левой L-резольвентой* оператора M.

Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда из тривиальных тождеств:

$$(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = \mathbb{I} + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1},$$

$$(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) = \mathbb{I} + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}L \qquad (2.1.3)$$

справедливы L-резольвентные тождества, являющиеся аналогом тождества Гильберта:

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\lambda L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1} L (\lambda L - M)^{-1}, \quad (2.1.4)$$

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) R^L_\mu(M) R^L_\lambda(M), \quad (2.1.5)$$

$$L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) L^L_\mu(M) L^L_\lambda(M). \quad (2.1.6)$$

Отметим еще два полезных тождества:

$$L R^L_\mu(M) = L^L_\mu(M) L, \quad (2.1.7)$$

$$M R^L_\mu(M) = L^L_\mu(M) M. \quad (2.1.8)$$

Замечание 2.4. В случае, если существует L^{-1}, тогда в силу тождества (2.1.7) операторы $R^L_\alpha(M)$ и $L^L_\alpha(M)$ сопряжены, то есть $R^L_\alpha(M) = L^{-1} L^L_\alpha(M)(L^{-1})^{-1}$ или $L^L_\alpha = L R^L_\alpha(M) L^{-1}$. Аналогично, в силу тождества (2.1.8), если существует M^{-1}.

Напомним, что операторы L и $M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ являются сопряженными, если существует оператор T такой, что $L = TMT^{-1}$

Замечание 2.5. В случае, когда оператор L непрерывно обратим, то правая (левая) L-резольвента оператора M совпадает с резольвентой оператора $L^{-1}M(ML^{-1})$.

Лемма 2.2. *Пусть операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M непрерывны в $\rho^L(M)$.*

Теорема 2.1. *Пусть операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$.*

Замечание 2.6. В силу равенств (2.1.5) ((2.1.6)), доказательство того, что правая (левая) L-резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$ очевидно.

2.2 Относительно p-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Определение 2.1. Оператор M называется *спектрального ограниченным* относительно оператора L (коротко,(L,σ)-*ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in \mathbb{C}(|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Замечание 2.1. В силу замечание 2.1, оператор $M(L,\sigma)$- ограничен, если существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$.

Пусть оператор $M(L,\sigma)$-ограничен, а контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Рассмотрим интегралы типа Ф.Рисса

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L^L_\mu(M)d\mu \qquad (2.2.1)$$

Лемма 2.1. *Пусть оператор $M(L,\sigma)$- ограничен, тогда операторы $P \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ - проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{U}^1) = \ker P(\operatorname{im} P), \mathfrak{F}^0(\mathfrak{F}^1) = \ker Q(\operatorname{im} Q)$, через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^k, k = 0,1$. Из предыдущей леммы следует, что проекторы P и Q расщепляют пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ в прямые суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Замечание 2.2. В силу равенств (2.1.7) и (2.1.8), $\forall u \in \mathfrak{U}$ имеем следующие соотношения:

$$LPu = QLu, \qquad (2.2.2)$$

$$MPu = QMu. \qquad (2.2.3)$$

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \{0\}, \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^1$.

Теорема 2.1.(Теорема о расщеплении). *Пусть оператор $M(L,\sigma)$ – ограничен, тогда*

(i) операторы $L_k, M_k \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^k;\mathfrak{U}^k), k = 0,1$;

(ii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, тогда при всех $\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > a$ имеет место:*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q. \qquad (2.2.5)$$

Замечание 2.3. Из определении оператора H и L_0 оператор $L_0 \equiv \mathbb{O}$ точно тогда, когда оператор $H \equiv \mathbb{O}$. Оператор $S = H \equiv \mathbb{O}$, если $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \{0\}$. Также, когда оператор L обратим, тогда операторы S и M равны.

Определение 2.2. Бесконечно удаленная точка L-резольвенты оператора M называется:

- *устранимой особой точкой, если* $H \equiv \mathbb{O}$*;*
- *полюсом порядка* p*, если* $H^p \neq \mathbb{O}$*, а* $H^{p+1} \equiv \mathbb{O} \quad p \in \mathbb{N}$*;*
- *существенно особой точкой, если* $H^k \neq \mathbb{O}, \forall k \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем условимся устранимую особую точку называть полюсом порядка нуль.

Следствие 2.2. *Пусть оператор* L *непрерывно обратим, тогда* L*-спектр оператора* M *совпадает со спектром оператора* S *и* ∞ *является устранимой особой точкой резольвенты оператора* S*.*

Следствие 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, причем* ∞ *– устранимая особая точка* L*-резольвенты оператора* M*. Тогда,*
(i) $\ker L = \mathfrak{U}^0$ *и* $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} L$*;*
(ii) существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$*, если ядро* $\ker L = \{0\}$*.*

Определение 2.3. оператор M называется (L,p)-*ограниченным*, если (L,σ)-ограничен и ∞ является полюсом порядка p, где $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L-резольвенты.

Мы будем считать термины "оператор $M (L,p)$-ограничен,$p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$"и "оператор $M(L,\sigma)$-ограничен, причем ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты оператора M" эквивалентными.

Замечание 2.4. В силу пункта (ii) следствия 2.3 и замечания 2.1, оператор $M(L,0)$-ограничен, если $\ker L = \{0\}$.

2.3 Относительно присоединенные векторы

Напомним, что $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей, оператора $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Определение 2.1. Вектор $\varphi \in \mathfrak{U}$ назовем *M-присоединенным вектором* оператора L, если существует вектор $\psi \in \mathfrak{U}$ такой, что $L\psi = M\varphi$.

Определение 2.2. Пусть $\ker L \neq 0, \varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ собственный вектор оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_k : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ назовем *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k,\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N};$$

$$\varphi_k \notin \ker L \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}. \tag{2.3.1}$$

Цепочка операторов может быть бесконечной, однако она обязательно конечна, если существует вектор $\varphi_q \in \{\varphi_k :\in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ такой, что $M\varphi_q \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется длиной.

Определение 2.3. Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L называется *M-корневым линеалом* оператора L. Если линеал замкнут, то он называется *M -корневым пространством* оператора L.

Лемма 2.1. *Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда M-корневой линеал оператора L содержится в $\mathfrak{U}^0$.*

Определение 2.4. Оператор $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ называется *фрегольъмовым*, если $\dim \ker L = codimimL < \infty$.

Замечание 2.1. В случае, когда оператор L фредгольмов, то можно выбрать в $\ker L$ какой-нибудь базис $\{\varphi_0^1, \varphi_0^2, ..., \varphi_0^n\}$, где $n = \dim \ker L$ и предположить, что каждому вектору $\{\varphi_0^m\}$ поставлена в соответствие конечная цепочка M-присоединенных векторов $\{\varphi_0^m, \varphi_0^m, ..., \varphi_{p_m}^m\}$, где $1 \leq m \leq n, p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Введем в рассмотрение условие (А)

$$\psi = \sum_{m=1}^{n} a_m M \varphi_{p_m}^m \notin \operatorname{im} L, \text{ если } \sum_{m=1}^{n} |a_m| > 0, \tag{A}$$

где $\varphi_{p_m}^m = \{\varphi_0^m\}$, если вектор $\{\varphi_0^m\}$ не имеет M- присоединенных векторов.

Лемма 2.2. *Пусть выполнено условие (A). Тогда пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.*

Теорема 2.1. *Пусть оператор L фредгольмов и длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L не превышает p, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда условие (A) выполнено.*

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 2.1 справедливы все условия теоремы о расщеплении.*

Напомним, что оператор T называется нильпотентным, если $T^k = \mathbb{O}$, для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$. Оператор T называется квазинильпотентным, если его спектр $\sigma(T) = \{0\}$.

Следствие 2.2. *В условиях теоремы 2.1, оператор H нильпотентен степени не больше p, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, причем $\sigma(H) = \{0\}$.*

Замечание 2.2. Если $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \{0\}$, то оператор S является квазинильпотентным в силу следствия 2.1 и замечания 2.3.

Теорема 2.2. *пусть оператор L фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

(ii) длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L не превышает p, и существует по крайне мере одна цепочка длины p.

Замечание 2.3. В случае, когда оператор L фредгольмов, теорема 1.2 устанавливает необходимость и достаточность условия (ii) для (L,σ)-ограниченности оператора M, причем ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты оператора M.

Следствие 2.3. *Пусть длина любой цепочки M-присоединенных век-*

торов фредгольмова оператора L ограничена числом p, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, тогда все равенства в лемме 2.1 выполнены.

2.4 Разрешающие группы операторов

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Нас будут интересовать разрешающие группы линейного однородного оператор–но-дифференциального уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2.4.1}$$

Уравнение (2.1) будем называть уравнением соболевского типа.

Определение 2.1. Решением уравнения (2.4.1) называется вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{U})$, если она удовлетворяет этому уравнению.

Решение $u = u(t)$ уравнения (2.4.1) назовем решением задачи Коши

$$u(0) = u_0, \tag{2.4.2}$$

для уравнения (2.4.1) (коротко, задачи (2.4.1), (2.4.2)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (2.4.2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда уравнения (2.4.1) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\beta(M)\dot{u} = (\beta L - M)^{-1}Mu, \tag{2.4.3}$$

$$L^L_\beta(M)\dot{f} = M(\beta L - M)^{-1}f, \tag{2.4.4}$$

где $\beta \in \rho^L(M)$. Уравнения (2.4.3) и (2.4.4) будем рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2.4.5}$$

где вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{F})$ и операторы $A, B \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$, а $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство.

Определение 2.2. Отображение $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{L}(\mathfrak{F}))$ называется группой разрешающих операторов уравнения (2.4.1), если

(i) $U^sU^t = U^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ есть решение уравнения (2.4.1).

Замечание 2.1. Обычно, группу операторов отождествляют с ее образом $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$.

Определение 2.3. Группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется голоморфной группой разрешающих операторов, если она аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с сохранением условий (i) и (ii) из определения 2.4.2; и вырожденной, если ее единица $U^0 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ является проектором.

Теорема 2.1. Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует голоморфная разрешающая группа уравнения (2.4.1), которая к тому же имеет вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.6}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Замечание 2.2. Аналогично доказывается утверждение теоремы,что отображение

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} L^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.4.7}$$

будет группой разрешающих операторов уравнения (2.4.4) и (2.4.1).

Определение 2.4. Множество

$$\ker U^{\bullet} = \{u \in \mathfrak{U} : \exists t \in \mathbb{R}\; U^t u = 0\}$$

называется ядром, а множество

$$\operatorname{im} U^{\bullet} = \{u \in \mathfrak{U} : \exists t \in \mathbb{R}\; U^0 u = u\}$$

образом аналитической группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$.

Замечание 2.3. В силу определения аналитической группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ можно показать, что $\ker U^{\bullet} = \ker U^t$ и $\operatorname{im} U^{\bullet} = \operatorname{im} U^t \; \forall t \in \mathbb{R}$.

Замечание 2.4. В условиях теоремы 2.1 и замечания 2.2, единица группы $U^0(F^0)$ совпадает с проектором $P(Q)$. Следовательно, $PU^t = U^tP = U^t,\ QF^t = F^tQ = F^t$.

В силу выше изложенного замечания и определения проектора P и Q, справедливо следующее

Следствие 2.1. В условиях теоремы 2.4.1 и замечания 2.2,

$$\ker U^\bullet = \mathfrak{U}^0,\ \operatorname{im} U^\bullet = \mathfrak{U}^1; \quad \ker F^\bullet = \mathfrak{F}^0,\ \operatorname{im} F^\bullet = \mathfrak{F}^1.$$

Определение 2.5. Множество $\mathfrak{P}$ называется фазовым пространством уравнения (2.4.1), если

(i) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (2.4.1), (2.4.2);

(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2.4.1) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

Замечание 2.5. Очевидно, что из существования фазового пространства следует его единственность в силу определения 2.5.

Теорема 2.2. Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (2.4.1) ((2.4.4)) служит подпространство $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1)$.

Следствие 2.2. Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Если оператор $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ непрерывно обратим, то фазовое пространство уравнения (2.4.1) ((2.4.4)) совпадает с пространством $\mathfrak{U}(\mathfrak{F})$.

Замечание 2.6. Если $\ker L = \{0\}$, и $p = 0$, то доказательство следствия 2.2 очевидно в силу следствия 2.3.

Замечание 2.7. Если операторы L и M инволютивные или такие, как в замечании 2.1, то результат аналогичен следствию 2.2.

Следствие 2.3. Группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ будет единственной разрешающей группой уравнения (2.4.1), если

(i) вектор функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения(2.4.1) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$;

(ii) образ $\operatorname{im} U^\bullet$ совпадает с фазовым пространством уравнения (2.4.1).

Замечание 2.8. Аналогично следствия 2.3, группа $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ будет единственная разрешающая группа уравнения (2.4.1) в силу теоремы 2.6 и замечания 2.5.

2.5 Порождающие операторы вырожденных голоморфных групп

Пусть квазибанаховы пространства последовательностей $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 \tag{2.5.1}$$

Пусть существуют топлинейные изоморфизмы

$$A : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0 \quad \text{и} \quad B : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{F}^1 \tag{2.5.2}$$

Пусть на $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1)$ задана голоморфная группа операторов

$$e^{tS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!} t^k \qquad \left(e^{tT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} t^k \right), \tag{2.5.3}$$

где $S \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^1)$ $(T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1))$ — некоторый оператор.

Пусть существует такой оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, что оператор

$$A^{-1}C = H \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^0) \tag{2.5.4}$$

нильпотентен степени $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Построим операторы

$$L = C(\mathbb{I} - P) + BP \quad \text{и} \quad M = A(\mathbb{I} - P) + BSP, \tag{2.5.5}$$

где $P \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ — проектор из первого расщепления (2.5.1) (т.е. $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{U}^1) = \ker P(\operatorname{im} P)$). По построению операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Теорема 2.1. Оператор $M(L, p)$-ограничен точно тогда, когда все условия (2.5.1)–(2.5.5) выполнены.

Замечание 2.1. В силу теорем 2.1 и 2.1, простроенные операторы L и M порождают на $\mathfrak{U}$ голоморфную вырожденную группу операторов

$U^t = \mathbb{O}(\mathbb{I} - P) + e^{tS}P,\ t \in \mathbb{R}$. (Если вдобавок оператор $T = BSB^{-1}$, то эти же операторы порождают на $\mathfrak{F}$ голоморфную вырожденную группу $F^t = \mathbb{O}(\mathbb{I} - Q) + e^{tT}Q$).

Замечание 2.2. Согласно теореме 2.1, условия (2.5.1)–(2.5.5) в терминах голоморфных вырожденных групп, необходимых и достаточных для (L, p)-ограниченности оператора M.

3 Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной в квазисоболевских пространствах

3.1 Трехточечная начально-конечная задача для неоднородного уравнения

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим неоднородное уравнение соболевского типа на отрезке $[a, c] \subset \mathbb{R}$

$$L\dot{u} = Mu + g. \tag{3.1.1}$$

Путь L-спектр $\sigma^L(M)$ распадается на три попарно непересекающиеся компоненты, т.е. выполнено условие

$$\begin{aligned} &\sigma^L(M) = \sigma^L_a(M) \cup \sigma^L_b(M) \cup \sigma^L_c(M) \text{ и} \\ &\qquad \sigma^L_a(M) \cap \sigma^L_b(M) = \emptyset,\ \sigma^L_b(M) \cap \sigma^L_c(M) = \emptyset, \\ &\qquad\qquad \sigma^L_a(M) \cap \sigma^L_c(M) = \emptyset \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Тогда существуют непересекающиеся контуры γ_a, γ_b, γ_c, которые ограничивают области, содержащие в части спектра $\sigma^L_a(M)$, $\sigma^L_b(M)$, $\sigma^L_c(M)$ соответственно. Согласно относительной спектральной теореме в квазибанаховых пространствах последовательностей, возможно построение спектральных проекторов

$$P_a = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_a} R^L_\mu(M) d\mu \ \text{ и } \ Q_a = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_a} L^L_\mu(M) d\mu,$$

$$P_b = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_b} R^L_\mu(M) d\mu \ \text{ и } \ Q_b = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_b} L^L_\mu(M) d\mu$$

$$P_c = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_c} R^L_\mu(M) d\mu \ \text{ и } \ Q_c = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_c} L^L_\mu(M) d\mu,$$

где R^L_μ, $L^L_\mu(M)$ – правая и левая резольвенты.

Для этих спектральных проекторов выполняются условия $P = P_a + P_b + P_c,\ Q = Q_a + Q_b + Q_c$ и на основании относительной спектральной теоремы, подпространства $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}_a \oplus \mathfrak{U}_b \oplus \mathfrak{U}_c,\ \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}_a \oplus \mathfrak{F}_b \oplus \mathfrak{F}_c$, действия всех операторов соответственно так же расщепляются.

При выполнении условия (3.1.2) для уравнения (3.1.1) обозначим начально-конечные условия

$$P_a(u(a) - u_a) = 0, \quad P_b(u(b) - u_b) = 0, \quad P_c(u(c) - u_c) = 0 \tag{3.1.3}$$

с некоторыми элементами $u_a, u_b, u_c \in \mathfrak{U}$.

Решением начально-конечной задачи (3.1.1), (3.1.3) назовем вектор-функцию $u \in C^1([a, c]; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (3.1.1) и условиям (3.2.3).

Следуя из спектральной относительной теоремы, уравнение (3.1.1) редуцируется к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} H\dot{u}^0(t) &= u^0(t) + M_0^{-1} L_0 g_0(t), \\ u_a^1(t) &= S_a u_a^1(t) + L_a^{-1} g_a(t), \\ u_b^1(t) &= S_b u_b^1(t) + L_b^{-1} g_b(t), \\ u_c^1(t) &= S_c u_c^1(t) + L_c^{-1} g_c(t), \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

где операторы $H = M_0^{-1} L_0,\ S = L_1^{-1} M_1$; векторы $u_a \in \mathfrak{U}^a,\ u_b \in \mathfrak{U}^b$,
$u_c \in \mathfrak{U}^c,\ g_a \in \mathfrak{F}^a,\ g_b \in \mathfrak{F}^b,\ g_c \in \mathfrak{F}^c,\ k = 0, 1, 2.$

Лемма 3.1 *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M удовлетворяют условию (3.1.2). Тогда для любой вектор-функции $g^0 \in C^{p+1}([a, c]; \mathfrak{F}^0)$ существует единственное решение $u^0(t) = -\sum\limits_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} g^0(t)$.*

Лемма 3.2 *Пусть выполняются условия леммы (3.1.1) для любого вектора $u_a \in \mathfrak{U}$ $(u_b \in \mathfrak{U},\ u_c \in \mathfrak{U})$ и для любой вектор-функции $g_1 \in C([a, b]; \mathfrak{F}^1)$ существует единственно решение $u_a^1 \in C^1([a, b]; \mathfrak{U}_a^1),\ u_b^1 \in$*

$C^1([a,b];\mathfrak{U}_b^1),\ u_c^1 \in C^1([a,b];\mathfrak{U}_c^1)$ *задачи* $P_a(u(a)-u_a)=0,\ \ P_b(u(b)-u_b)=0,\ \ P_c(u(c)-u_c)=0$ *для уравнения (3.1.1), которое к тому же имеет вид*

$$u_a^1 = U^t u_a + \int\limits_a^t U^{t-s} L_a^{-1} g_a^1(s)ds,$$

$$u_b^1 = U^t u_b + \int\limits_b^t U^{t-s} L_b^{-1} g_b^1(s)ds,$$

$$u_c^1 = U^t u_c + \int\limits_c^t U^{t-s} L_c^{-1} g_c^1(s)ds.$$

Теорема 3.1 *Для любых векторов* $u_a,\ u_b,\ u_c \in \mathfrak{U}$ *и любой вектор-функции* $g\ :\ [a,c]\to\mathfrak{F}$, *которая удовлетворяет условиям лемм (3.1.1), (3.1.2), существует единственное решение* $u\in C^1([a,b];\mathfrak{U})$ *задачи (3.1.1), (3.1.3), которое к тому же имеет вид* $u(t)=u^0(t)+u_a^1(t)+u_b^1(t)+u_c^1(t)$.

3.2 Квазисоболевы пространства и квазиоператоры Лапласа и Грина

Пусть $\mathfrak{U}=(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F}=(\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ - квазибанаховы пространства последовательностей. Будем говорить, что

- $\mathfrak{U}$ *вложено* в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{F}$;
- $\mathfrak{U}$ *плотно вложено* в $\mathfrak{F}$, если замыкание $\overline{\mathfrak{U}}=\mathfrak{F}$;
- $\mathfrak{U}$ *плотно и непрерывно вложено* в $\mathfrak{F}$, если для всех $u\in\mathfrak{U}$ выполняется ${}_q\|u\|_{\mathfrak{U}} \geq C_q\|u\|_{\mathfrak{F}}$, где $C\in\mathbb{R}_+$ – некоторая константа, которая не зависит от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U}\hookrightarrow\mathfrak{F}$.

Пусть $W_2^1(\Omega)$ – соболевское пространство, а W_2^{-1} –сопряженное к нему пространство с негативной нормой относительно скалярного произведения

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ из $L_2(\Omega)$ из $L_2(\Omega)$. Из теоремы вложения следует, что

$$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega). \tag{3.2.1}$$

Известно, что оператор Лапласа $-\Delta$, определяемый формулой

$$-\langle \Delta u, v\rangle = \sum_{m=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{x_m} v_{x_m} dx,$$

задает топлинейный изоморфизм:

$$-\Delta \ : \ W_2^1(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega). \tag{3.2.2}$$

Теперь пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – множество собственных значений оператора Лапласа, нумеруется по неубыванию с учетом кратности.

Построим пространства:

$$l_2^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2 < \infty \right\},$$

$$l_2^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |u_k|^2 < \infty \right\}$$

здесь топлинейные изоморфизмы $l_2^1 \cong W_2^1(\Omega)$, $l_2^{-1} \cong W_2^{-1}(\Omega)$ и так же отметим плотность и непрывность вложений

$$l_2^1 \hookrightarrow l_2 \hookrightarrow l_2^{-1}, \tag{3.2.3}$$

которая следует из (3.2.1). Пространства l_2^1, l_2^{-1} – банаховы с нормами $\|u\|_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2$, $\|v\|_{-1}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |v_k|^2$. Рассмотрим квазиоператор Лапласа

$$\Lambda u = \lambda_k u_k, \tag{3.2.4}$$

Так как $\|\Lambda u\|_{-1} = \|u\|_1$, то из (3.2.4) следует топлинейность изоморфизма $\Lambda : l_2^1 \to l_2^{-1}$, который можно получить из (3.2.2), (3.2.3). Квазиоператор Грина Λ^{-1} является обратным к Λ и задается формулой

$$\Lambda^{-1} v = \lambda_k^{-1} v_k. \tag{3.2.5}$$

Построим квазисоболевы пространства

$$l_p^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{p}{2}} |u_k|^p < \infty \right\},$$

$$l_p^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\frac{p}{2}} |u_k|^p < \infty \right\},$$

где $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty, \quad p \in (0,1)$. Так же как в в пространствах Соболева W_p^m введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$\ell_p^m = \left\{ \quad \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \ \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|\right)^p < +\infty \ \right\},$$

где $m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$${}_p^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|\right)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0,1)$, то константа $C = 2^{\frac{1}{p}}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_p^0 = \ell_p$.

Теорема 3.2 *При всех $p \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{R},\ l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_p^m \hookrightarrow \ell_p^l$.*

Теорема 3.3 *При всех $p \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_p^{m+2} \to \ell_p^m$ – топлнейный изоморфизм.*

3.3 Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной

Пусть $\mathfrak{U} = \ell_p^{m+2},\ \mathfrak{F} = \ell_p^m$, операторы $L,\ M$ зададим формулами $L = \lambda - \Lambda,\ M = \alpha\Lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ –константы.

Лемма 3.3 *Для любых $\lambda \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ операторы $L,\ M \in \mathfrak{L}(\ell_p^{m+2}; \ell_p^m)$.*

Лемма 3.4 *Для любого $\lambda \notin \sigma(\lambda)$ существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\ell_q^{m+2}; \ell_q^m)$.*

Теорема 3.4 *Для любых $\lambda \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Рассмотрим аналог уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной как один из широко известных из неклассических уравнений математической физики.

$$(\lambda - \Lambda)\dot{u} = \alpha \Lambda u. \tag{3.3.1}$$

Покажем, что голоморфная разрешающая группа уравнения будет иметь вид:

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\mu_k t} e_k, & \text{если } \lambda \notin \lambda_k, k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\mu_k t} e_k, & \text{если существует } l \in \mathbb{N} : \lambda_l = \lambda. \end{cases}$$

Здесь $\mu_k = \frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}$ – такой L-спектр оператора M, что последовательность $u_{0k} = u_0 \in \ell_q^{m+2}$, векторы $e_k = \{0, 0, ..., 0, 1, 0, ...\}$, где единица стоит на k-том месте.

Фазовым пространством уравнения (3.3.1) будет множество $\mathfrak{U}^1$ из доказательства теоремы (3.4).

Теперь рассмотрим аналог неоднородного уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной

$$(\lambda - \Lambda) u_t = \alpha \Lambda u + f. \tag{3.3.2}$$

И обозначим трехточечную начально-конечную задачу. Условия (3.1.3), где проектор

$$Pu = \begin{cases} \{u_k\}, & \text{если } \lambda \notin \lambda_k, k \in \mathbb{N}; \\ \{(u_k \ : \ k \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda = \lambda_l\}), \ \ (u_l \ : \ \lambda = \lambda_l)\}. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Приступим к рассмотрению трехточечной начально-конечной задачи

$$P_a(u(a) - u_a) = 0, \ \ P_b(u(b) - u_b) = 0, \ \ P_c(u(c) - u_c) = 0,$$

для уравнения (3.3.2). Так как L-спектр оператора M имеет вид

$$\mu_k = \frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{l \ : \ \lambda = \lambda_l\},$$

то он дискретен и имеет только одну точку "накопления": – α. Исходя из этого всегда можно выбрать части сектра, которые удовлетворяют условию (3.1.1). Следовательно, проекторы будут иметь вид (3.3.3), где элементы последовательности выбираются по выделенным индексам.

Исходя из этого, а так же теоремы (3.4) справедливо

Следствие 3.1 *Для любых векторов* u_a, u_b, $u_c \in \ell_q^{m+2}$ *и любой вектор-функции* $f : [a,c] \to \ell_q^m$, *удовлетворяющей условиям*

$$(\mathbb{I} - Q)f \in C^1([a,c];\ell_q^m) \;\text{ и }\; Qf \in C([a,c];\ell_q^m)$$

существует единственное решение $u \in C^1([a,c];\ell_q^{m+2})$ *задачи (3.3.2), (3.1.1), которое имеет вид*

$$u(t) = -M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f(t) + U^{t-a}u_a - U^{b-t}u_b - U^{c-t}u_c +$$
$$+ \int_a^b U^{t-s}L_1^{-1}Q_a f(s)ds - \int_b^t U^{t-s}L_1^{-1}Q_b f(s)ds - \int_t^c U^{t-s}L_1^{-1}Q_c f(s)ds.$$

Заключение

В выпускной квалификационной работе получены следующие результаты: 1) Разобраны квазибанаховы и квазисоболевские пространства 2) Рассмотрен квазиоператор Лапласа 3) Изучены вырожденные голоморфные группы операторов 4) Построена трехточечная начально-конечная задача для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной.

Список литературы

1. Аль-Дельфи Дж.К.: Исследование вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль-Дельфи. – дис. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. наук – Челябинск, 2015. – 98с.

2. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной на графе / Г.А.Свиридюк, В.В.Шеметова // Вестник МаГУ. Математика. – Магнитогорск. – 2003.-Вып. 4. – С. 129 – 139.

3. Загребина, С.А. Начально-конечная задача на линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Обозрение приклад. и пром. математики. -М., 2009. – Т. 16, вып. 2.– С. 329 –330.

4. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия ММФ. – 2012. –№5 (264), вып.11.– С.4-12.

5. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для уравнения соболевского типа с (L, p)-ограниченным оператором / С.А. Загребина // Материалы докл. Междунар. симпозиума, Челябинск, 10-14 нояб. 2014г. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ.–2014.– С.19-31.

6. Аль-Дельфи Дж.К.: Квазисоболевы пространства l_p^m / Дж.К. Аль-Дельфи // Вестник ЮУрГУ. Серия ММФ. – 2013. –№5 , вып.1.– С.107-109.

7. Свиридюк, Г.Ф. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. – Новосибирск, 2002. – С.221 – 225.

8. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика.-2005.-№10.-С. 47 – 52.

9. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения.-2006.-Т. 42, №1.-С. 126 – 131.

10. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах на уравнений Хоффа на

графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки.- 2009.-№1 (18). - С. 6 –17.
11. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида – М.: Мир, 1967.
12. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т.49, №4. –С.47-74.
13. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 27.12.05: утв. 10.05.06 / Шеметова Вероника Владимировна. – Магнитогорск, 2005. – 109 с. – Библиогр.:с.93 – 109.
14. Kosugi, S.A Semilinear Elliptic Equation In A Thin Network – Shaped Domain / S. Kosugi // J. Math. Soc. Jap. – 2000. – Vol. 52, №3. – P. 672 – 697.