Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и методики преподавания математики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, к.ф.-м.н.,доцент
______________ /Ю.С. Васильев/
«____» ___________ 2017 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,доцент
__________________ /В.Л. Дильман/
«____» ___________ 2017 г.

Задачи о разностных уравнениях с экономическим содержанием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 01.03.01 2017. 12-031-1408. ВКР

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент
__________________ /Д.А. Комиссарова/
«____» ___________ 2017 г.

Автор, студент группы ЕТ-481
__________________ /М.С. Хвощевская/
«____» ___________ 2017 г.

Нормоконтролер, к.ф.-м.н., доцент
____________________ /М.А. Корытова/
«____» ___________ 2017 г.

Челябинск 2017

УДК 517.9

Хвощевская М. С.

Задачи о разностных уравнениях с экономическим содержанием/ М.С. Хвощевская. – Челябинск, 2017. – 27с.

Работа посвящена исследованию положения устойчивости точек равновесия и решению экономических задач с использованием разностных уравнений.

Список лит. – 2 назв., рисунков – 9

Содержание

Введение

Разностные уравнения являются одним из разделов математики, который имеет большое прикладное значение. Кроме общематематического и теоретического интереса, разностные уравнения имеют широкое практическое применение. В частности, при решении задач, связанных с экономикой. При помощи разностных уравнений можно описать множество процессов макроэкономической динамики. Например, прирост населения (в рассматриваемый промежуток времени), динамика роста цен, процесс распространения рекламы, объем производства некоторого производителя и т.д.

Представление о точках равновесия занимает центральное место в изучении динамических и других физических систем. Во многих приложениях в биологии, экономике, физике, инженерии и т.д., желательно чтобы все состояния (решения) данной системы стремились к её равновесной точке. Это является предметом изучения теории устойчивости и имеет большое значение для учёных и инженеров. В данной работе будет рассмотрено приложение разностных уравнений к задачам экономического раздела.

Общая теория линейных разностных уравнений

Линейные неоднородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейное однородное уравнение первого порядка имеет вид:

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{1}$$

а связанное с ним неоднородное уравнение имеет вид:

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2}$$

где в обоих уравнениях предполагается, что $a(n) \neq 0$, и $a(n)$ и $g(n)$ являются вещественными функциями, определёнными при $n \geq n_0 \geq 0$.

Рассмотрим частные случаи уравнения (2), которые являются важными во многих приложениях. Первый случай задаётся уравнением вида

$$y(n+1) = ay(n) + g(n), y(0) = y_0. \tag{3}$$

В отличии от уравнения (2), a здесь является числом, а не функцией.
Решение уравнения (3) имеет вид

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} \cdot g(k). \tag{4}$$

Докажем эту формулу при помощи математической индукции.
База индукции:$y(n_0+1) = ay_0 + g(n_0)$
$y(n_0+2) = ay(n_0+1) + g(n_0+1)$
$y(n_0+3) = ay(n_0+2) + g(n_0+2) = a[ay(n_0+1) + g(n_0+1)] + g(n_0+2) = a[a(ay_0+g(n_0))+g(n_0+1)]+g(n_0+2) = a^3y_0+a^2g(n_0)+ag(n_0+1)+g(n_0+2)$
$y(n_0+4) = ay(n_0+3) + g(n_0+3) = a^4y_0 + a^3g(n_0) + a^2g(n_0+1) + ag(n_0+2) + g(n_0+3)$

Предположение:

$y(n-1) = a^{n-1}y_0 + a^{n-2}g(n_0) + a^{n-3}g(n_0+1) + a^{n-4}g(n_0+2) + \ldots + ag(n-3) + g(n-2) = a^{n-1}y_0 + \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-2} \cdot g(k)$

Шаг индукции:

$y(n) = ay(n-1) + g(n-1) = a[a^{n-1}y_0 + \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-2} \cdot g(k)] + g(n-1) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} \cdot g(k)$

Второй случай задаётся уравнением вида

$$y(n+1) = ay(n) + b, y(0) = y_0. \tag{5}$$

Используя формулу (4), получаем решения для уравнения (5):

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b\left[\frac{a^n-1}{a-1}\right], & a \neq 1; \\ y_0 + bn, & a = 1; \end{cases} \tag{6}$$

Ниже представлен вывод формулы (6).

Сначала применяем метод математической индукции.

$y(n+1) = ay(n) + b = y(n+1) = ay_0 + b$

$y(n+2) = ay(n_0+1) + b = a(ay_0+b) + b = a^2y_0 + b(a+1)$

$y(n+3) = ay(n_0+2) + b = a(ay(n_0+1)+b) + b = a^3y_0 + b(a^2+a+1)$

$y(n-1) = a^{n-1}y_0 + b[\frac{a^{n-1}-1}{a-1}]$

$y(n) = a^n + b\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} = a^n y_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1) = a^n y_0 + b[\frac{a^n-1}{a-1}]$

Далее рассмотрим изменение вида решения от значения параметра a. Второе слагаемое в решении это сумма геометрической прогрессии. Поэтому решение имеет два варианта для $a = 1$ и для $a \neq 1$

$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b\left[\frac{a^n-1}{a-1}\right], & a \neq 1; \\ y_0 + bn, & a = 1; \end{cases}$

Разностные уравнения в задачах ипотечного кредитования.

Амортизация (постепенное погашение кредита по определённому графику)

- процесс, при котором долг выплачивается последовательными периодическими платежами.

Пусть $p(n)$ представляет собой задолженность по выплате основной суммы кредита после n равных платежей $g(n)$. Допустим, что величина выплат начисляется в размере r в рассчёте на платёжный период.

Составим уравнение на основе того факта, что остаток долга $p(n+1)$ после $(n+1)$ платежа равен остатку долга за предыдущий месяц $p(n)$ после n платежей плюс начисленный процент $r \cdot p(n)$ внесённый за $(n+1)$ период и минус платёж $g(n)$, внесённый в n-ый месяц. Таким образом,

$$p(n+1) = p(n) + r \cdot p(n) - g(n), \tag{7}$$

$$p(n+1) = (1+r) \cdot p(n) - g(n), p(0) = p_0, \tag{8}$$

где p_0 - исходный кредит.

Так как каждый месяц вносится одинаковая сумма, обозначим

$g(n) = const = T$.

Тогда уравнение (8) принимает вид уравнения (5),

$p(n+1) = (1+r) \cdot p(n) - T, p(0) = p_0$ где $b = -T, a = (1+r)$.

По формуле (4) для случая неоднородного разностного уравнения получаем

$$p(n) = (1+r)^n \cdot p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} \cdot T \tag{9}$$

Так как платёж $g(n) = T$ постоянная величина, то

$$p(n) = (1+r)^n - ((1+r)^n - 1) \cdot \left(\frac{T}{r}\right). \tag{10}$$

Определение 1.

Точка x^* в области определения f называется точкой равновесия уравнения

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{11}$$

если она является неподвижной точкой f, т.е. $f(x^*) = x^*$. Другими словами, x^* является постоянным решением уравнения (1), так как если $x(0) = x^*$ является начальной точкой, то $x(1) = f(x^*) = x^*$, и $x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*$ и т.д. Графически точка равновесия представляет собой x-координату точки, где график f пересекает диагональную линию $y = x$.

Существует явление, уникальное для разностных уравнений и не возможное в дифференциальных уравнениях. В разностных уравнениях, возможно, что решение может не быть точкой равновесия, но может достигать единицы после конечного числа итераций. Другими словами, неравновесное состояние может перейти в равновесное состояние за конечное время. Это приводит к следующему определению.

Определение 2.

Пусть x - точка в области определения f. Если существует натуральное r и точка равновесия x^* уравнения (11) такая, что $f^r(x) = x^*$, $f^{r-1}(x) \neq x^*$. То x является, в конечном счете, равновесной (фиксированной) точкой.

Определение 3.

(a) Равновесная точка x^* уравнения (11) устойчива (рис. 1), если для данного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|x_0 - x^*| < \delta$ влечет $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ для всех $n > 0$. Если x^* не является устойчивой, то она называется неустойчивой (рис. 2).

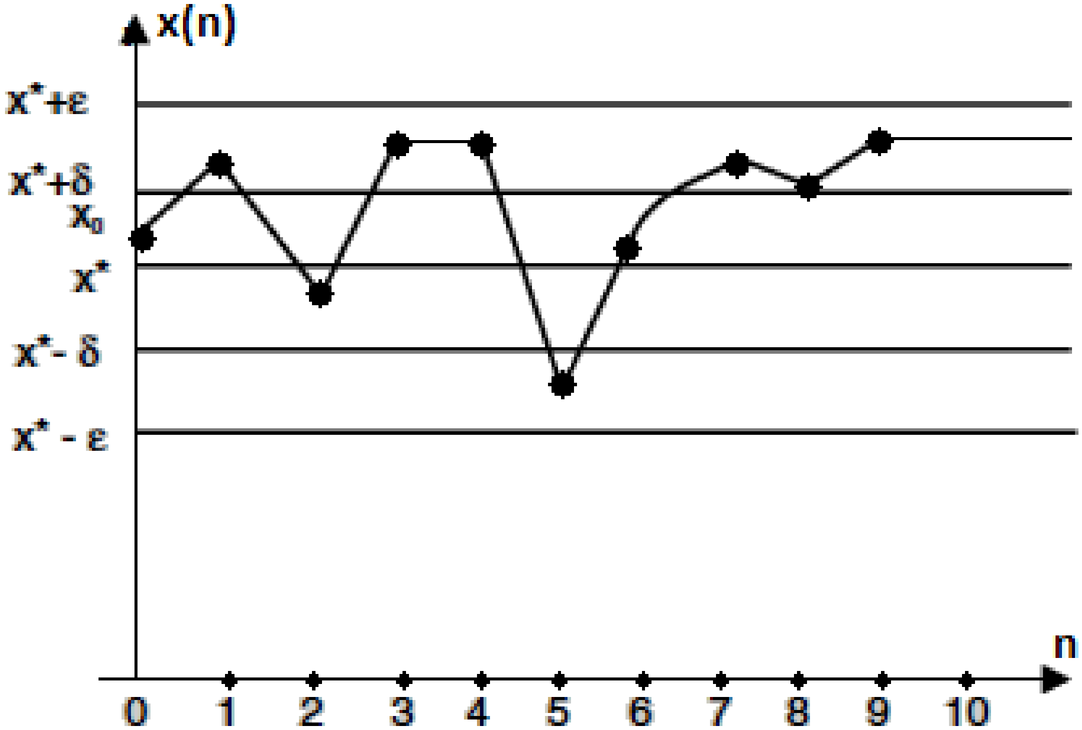

Рис. 1: Устойчивая точка x^*

(б) Точка x^* называется притягивающей (аттрактором), если существует такое $\eta > 0$, что $|x(0) - x^*| < \eta$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x^*$. Если $\eta = \infty$, то x^* называется глобальным аттрактором или глобально притягивающим.

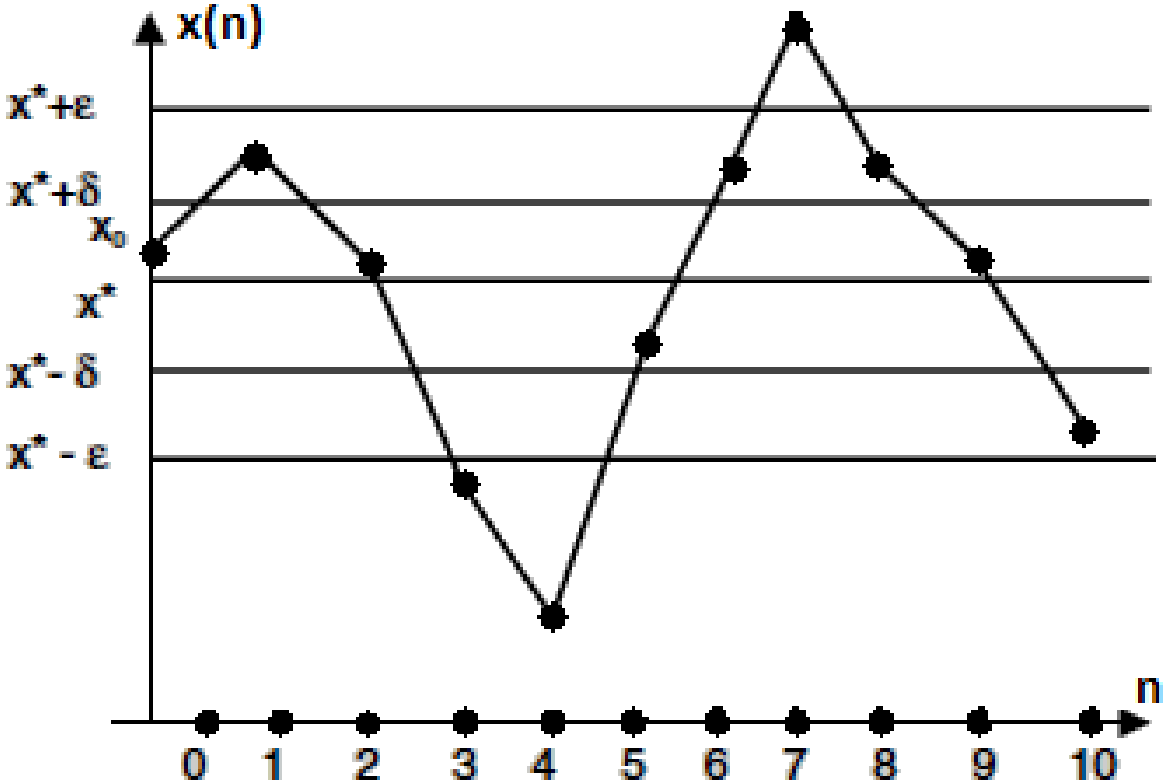

Рис. 2: Неустойчивая точка x^*

(в) Точка x^* является асимптотически устойчивой точкой равновесия, если она устойчивая и притягивающая (рис. 3).

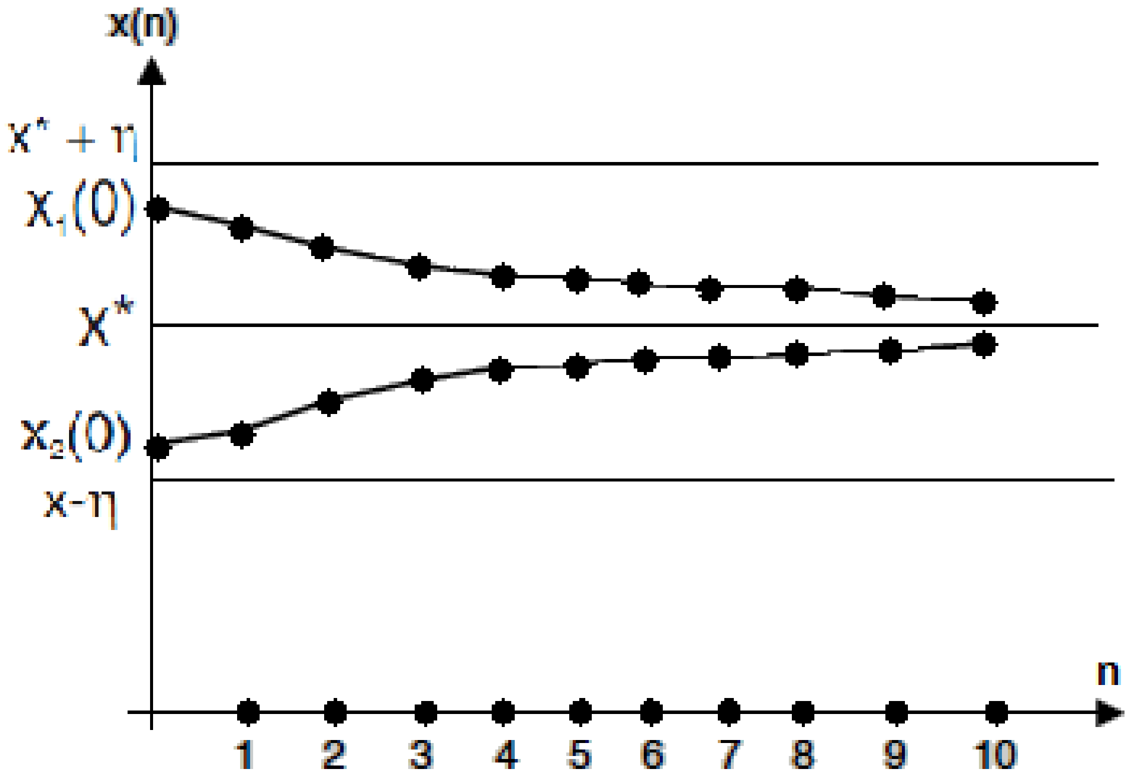

Рис. 3: Асимптотически устойчивая точка x^*

Если $\eta = \infty$, то x^* называется глобально асимптотически устойчивой (рис. 4).

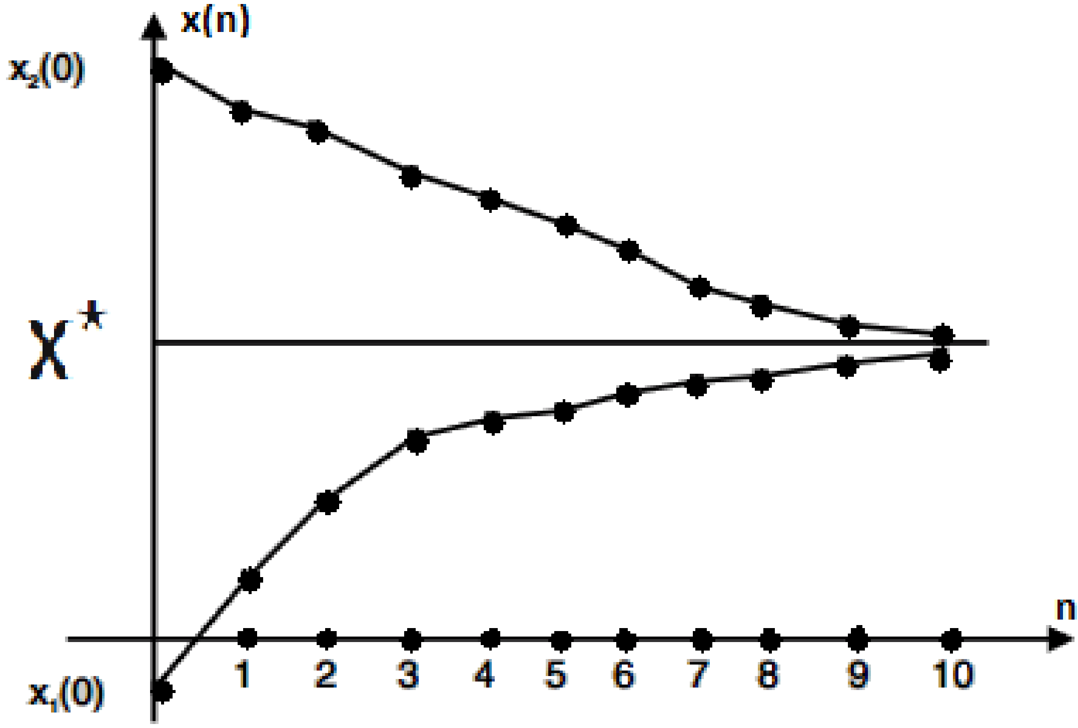

Рис. 4: Глобально асимптотически устойчивая точка x^*

Выяснить устойчивость точки равновесия из приведенного выше определения чаще всего невозможно. Это связано с тем, что мы, скорее всего, не сможем найти решение в замкнутой форме даже для простейшего уравнения вида (11).Далее рассмотрим графические методы, помогающие понять поведение решений уравнения (11) в окрестности точек равновесия.

Диаграмма лестничных ступеней (паутина).

Рассмотрим еще один важный графический метод анализа устойчивости равновесных (и периодических) точек для уравнения (11). Так как $x(n+1) = f(x(n))$, мы можем построить график функции f на плоскости $(x(n), x(n+1))$. Тогда при $x(0) = x_0$, мы точно определим значение $x(1)$, проведём вертикальную линию, проходящую через x_0 так, что она также пересечёт график функции f в точке $(x_0, x(1))$. Затем проведём горизонтальную линию от $(x_0, x(1))$, чтобы пересечь диагональную линию $y = x$ в точке $(x(1), x(1))$.

Вертикальная линия, проведенная из точки $(x(1), x(1))$, будет соответствовать графику f в точке $(x(1), x(2))$.Продолжая этот процесс, можно найти $x(n)$ для всех $n > 0$.

Пример.Явление паутины (Экономическое приложение)
Рассмотрим ценообразование на определенный товар. Пусть $S(n)$ - количество единиц, поставленных за период n, $D(n)$ количество единиц, требуемых в период n, и $p(n)$ цена единицы товара за период n.
Для простоты предположим, что $D(n)$ зависит линейно только от $p(n)$ и обозначается через

$$D(n) = -m_d p(n) + b_d, m_d > 0, b_d > 0. \tag{12}$$

Это уравнение называется кривой цены-спроса. Постоянная m_d представляет собой чувствительность потребителей к цене. Мы также предполагаем, что кривая цены-предложения связывает предложение в любой период с ценой за один предыдущий период, то есть,

$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s, m_s > 0, b_s > 0. \tag{13}$$

Постоянная m_s - это чувствительность поставщиков к цене. Наклон кривой спроса отрицательный, поскольку увеличение на одну единицу в цене приводит к уменьшению спроса на m_d единиц. Соответственно, увеличение одной единицы в цене вызывает увеличение единиц m_s в поставке, создавая положительный наклон для этой кривой.
Третье предположение, которое мы здесь делаем, заключается в том, что рыночная цена - это цена, при которой требуемое количество и поставленное количество равны, то есть, при котором $D(n+1) = S(n+1)$.
Таким образом, $-m_d p(n+1) + b_d = m_s p(n) + b_s$ или

$$p(n+1) = Ap(n) + B = f(p(n)), \tag{14}$$

где

$$A = -\frac{m_s}{m_d}, B = \frac{b_d - b_s}{m_d}. \tag{15}$$

Это уравнение является линейным разностным уравнением первого порядка. Равновесная цена p^* определяется в экономике как цена, которая приводит к пересечению кривых предложения $S(n+1)$ и спроса $D(n)$. Кроме того, так как p^* - единственная неподвижная точка $f(p)$ в уравнении (14), $p^* = \frac{B}{1-A}$. Поскольку A - отношение наклонов кривой спроса и предложения, это отношение определяет поведение ценовой последовательности. Необходимо рассмотреть три случая:

(а)$-1 < A < 0$,

(б)$A = -1$,

(в)$A < -1$.

Три случая теперь изображены графически с помощью ступенчатых диаграмм.

- В случае (а) цены чередуются выше и ниже, но сходятся к равновесной цене p^*. В экономике цена p^* считается "стабильной"; в математике мы называем ее "асимптотически устойчивой"(рис. 5).

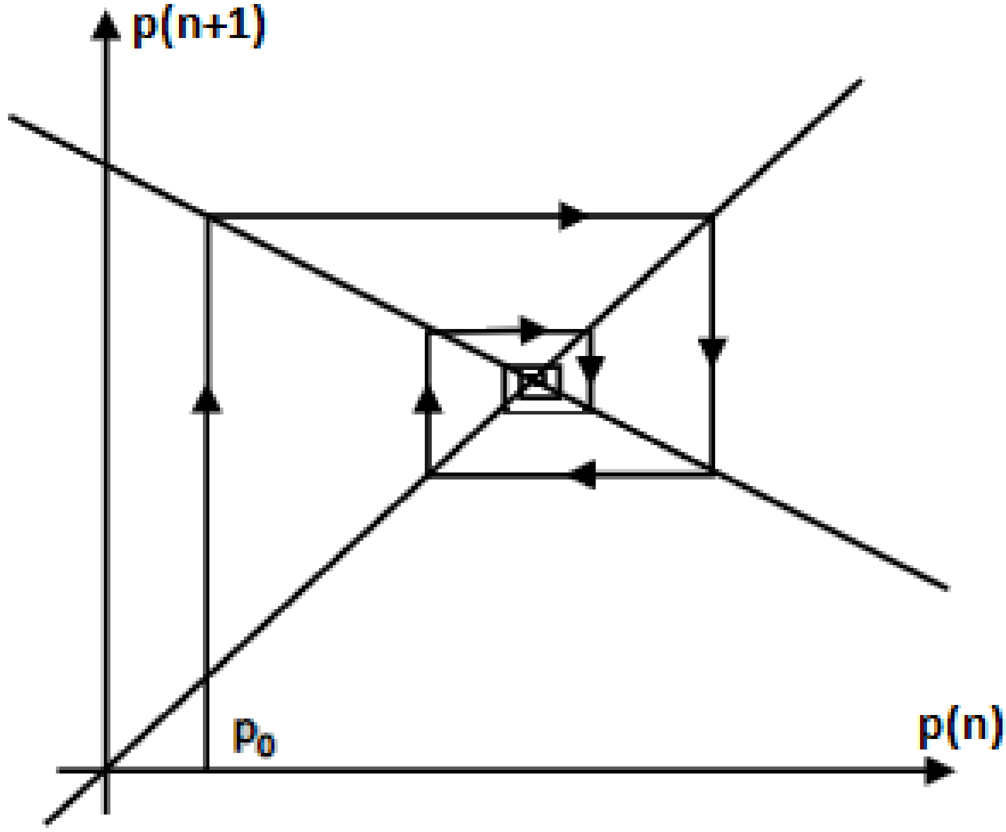

Рис. 5: Асимптотически устойчивая равновесная цена $-1 < A < 0$

• В случае (б) цены колеблются только между двумя значениями. Если $p(0) = p_0$, то $p(1) = -p_0 + B$ и $p(2) = p_0$. Следовательно, равновесная точка p^* устойчива (рис. 6).

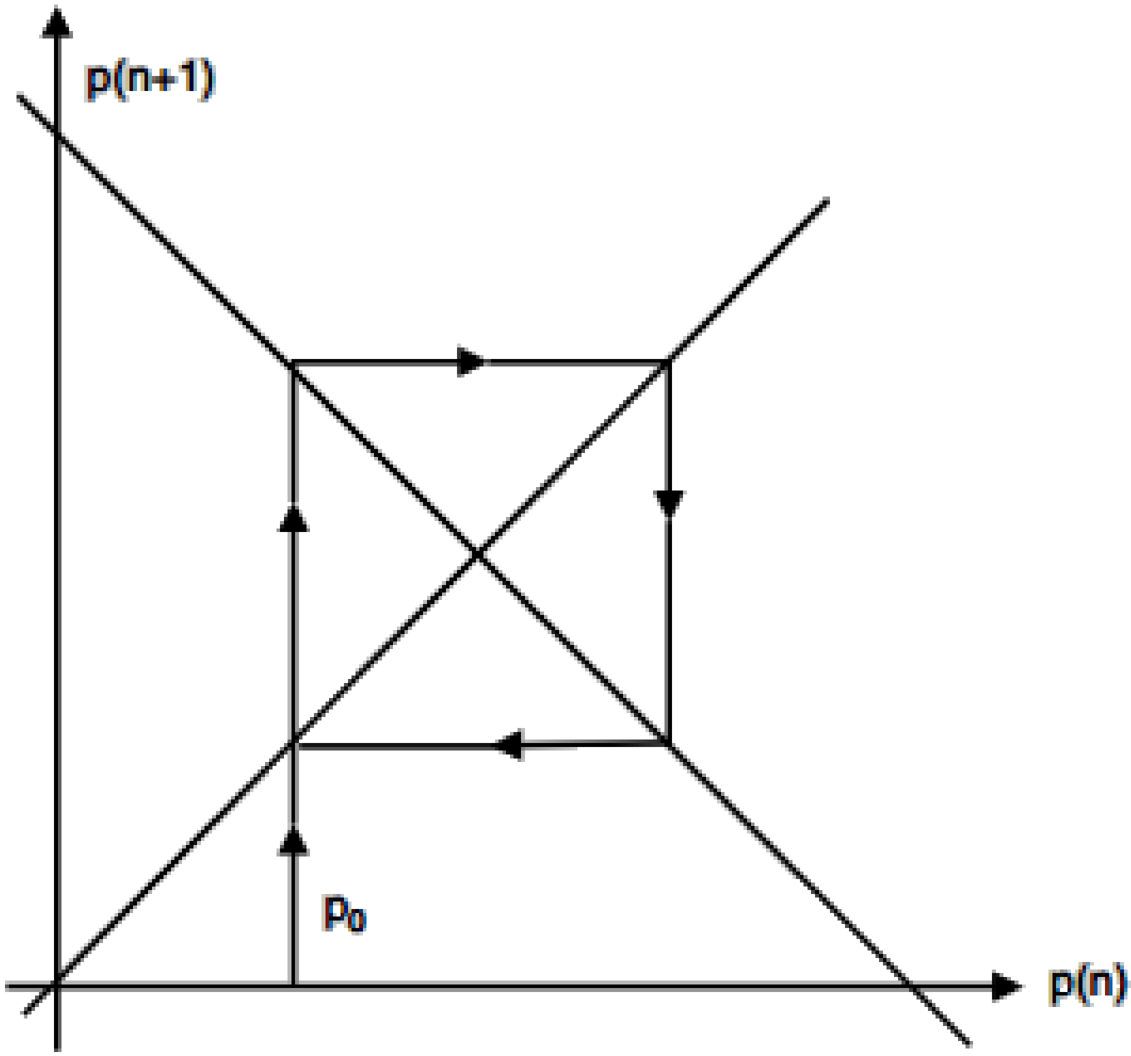

Рис. 6: Устойчивая равновесная цена $A = -1$

• В случае (в) цены колеблются бесконечно относительно равновесной точки p^*, но постепенно удаляются от нее. Таким образом, точка равновесия считается неустойчивой (рис. 7).

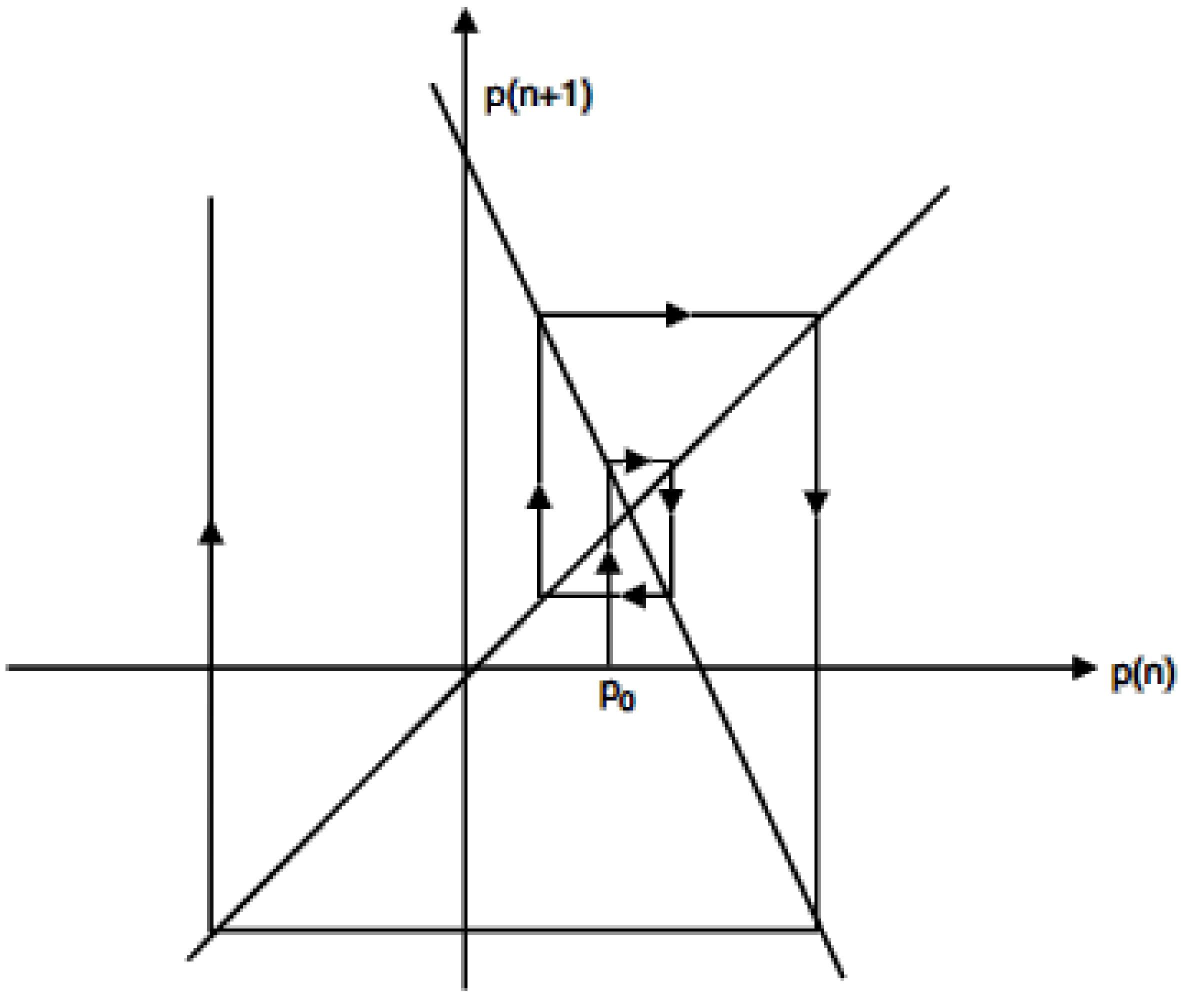

Рис. 7: Неустойчивая равновесная цена $A < -1$

Явное решение уравнения (14) с $p(0) = p_0$ дается формулой

$$p(n) = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^n + \frac{B}{1-A}. \tag{16}$$

Это явное решение позволяет нам переформулировать случаи (а) и (б) следующим образом.

Теорема паутины экономики. Если поставщики менее чувствительны к цене, чем потребители (т.е. $m_s < m_d$), то рынок будет стабильным. Если поставщики более чувствительны, чем потребители, рынок будет нестабильным.

Также можно было бы найти решение (16) в замкнутом виде, например, используя Maple. Для этого воспользуемся командой:
$rsolve(p(n+1) = a \cdot p(n) + b, p(0) = p_0, p(n))$.

Задачи

Задача 1.

Кредит 900 000 руб. выплачивается равными платежами 14 200 в конце каждого месяца, а оставшаяся часть вносится после последнего платежа (14 200). Процентная ставка по кредиту составляет 14,5 % годовых. Постройте график, показывающий изменение суммы долга за n месяцев.

Дополнительное условие. Предположим, что после 12-го платежа вносится один раз платёж в размере 100 000 руб. Как изменится график?

Сравнить суммы выплат.

Решение:

Воспользуемся формулой (10):

$$p(n) = ((1+r)^n)p_0 - ((1+r)^n - 1)\left(\frac{T}{r}\right)$$

$p(n) = (1 + \frac{0{,}145}{12})^n \cdot 900000 - \left((1 + \frac{0{,}145}{12})^n - 1\right)\left(\frac{14200}{0{,}0120833}\right) = (1,0120833)^n \cdot 900000 - (1,0120833)^n \cdot 1175175,7 + 1175175,7 = -(1,0120833)^n \cdot 275175,66 + 1175175,7$

Пусть p(n)=0.

$(1,0120833)^n \cdot 275175,66 = 1175175,7$

$(1,0120833)^n = 4,2706383$

Отсюда находим n: $n = \log_{1{,}0120833} 4,2706383 = 120,870688 \approx 120$

Получаем, что сумма кредита будет выплачена за 120 равных платежей (120 месяцев).

Остаток долга после 120 платежей

$p(120) = 1,0120833^{120} * 900000 - (1,0120833^{120} - 1) * \frac{14200}{0{,}0120833} = 12225,6$ В этом случае сумма выплат составит $120 * 14200 + 12225,6 = 1716225,6$ руб.

Рассчитаем сумму выплат после 12 платежа

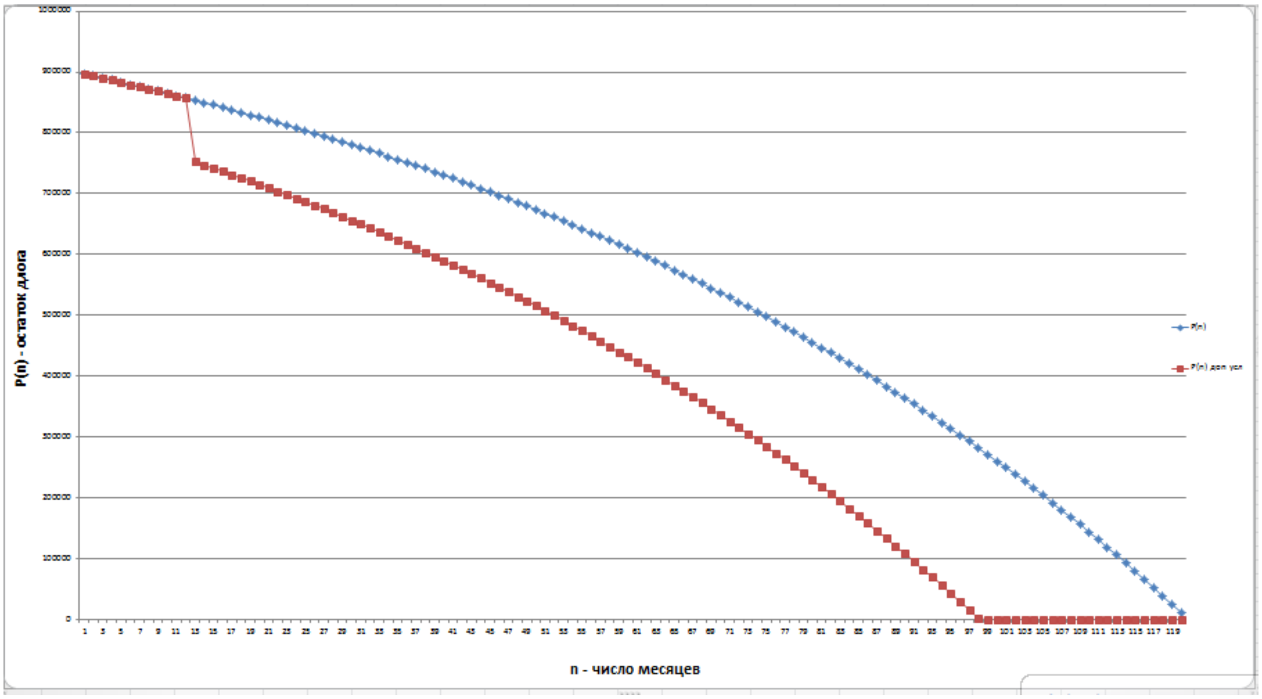

Рис. 8: Зависимость величины долга от времени.

$p(12) = 1,0120833^{12} * 900000 - (1,0120833^{12} - 1) * \frac{14200}{0,0120833} = 857338,2$. Дополнительно вносится единоразовый платёж в размере 100000 рублей. Оставшийся долг 757 338,2 рублей. Рассчитаем за какой период будет выплачен оставшийся долг. $p(n) = (1 + \frac{0,145}{12})^n \cdot 757338,2 - ((1 + \frac{0,145}{12})^n - 1)\left(\frac{14200}{0,0120833}\right) = (1,0120833)^n \cdot 757338,2 - (1,0120833)^n \cdot 1175175,7 + 1175175,7 = -(1,0120833)^n \cdot 417837,5 + 1175175,7$

Пусть p(n)=0.

$(1,0120833)^n \cdot 417837,5 = 1175175,7$

$(1,0120833)^n = 2,813$

Отсюда находим n: $n = \log_{1,0120833} 2,813 = 86,109 \approx 86$

Получаем, что сумма кредита будет выплачена за 86 равных платежей (86 месяцев). Рассчитаем сумму долга, оставшуюся после последней выплаты. $p(86) = 1,0120833^{86} * 757338,2 - (1,0120833^{86} - 1) * \frac{14200}{0,0120833} = 1344,52$ Во втором случае кредит будет погашен за 98 месяцев.

Размер выплат составит

$14200 * 12 + 100000 + 86 * 14200 + 1344.52 = 1492944.52$

Таким образом при внесении единоразового платежа в размере 100 000 рублей общая сумма выплат уменьшится на 223 281,05 рублей.

Задача 2.

Проверить, что формула (16)

$$p(n) = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^n + \frac{B}{1-A}$$

является решением уравнения (14)

$$p(n+1) = Ap(n) + B = f(p(n)).$$

Проверим это при помощи метода математической индукции.

База индукции:

$p(n_0 + 1) = Ap(n_0) + B$

$p(n_0 + 2) = Ap(n_0 + 1) + B = A(Ap(n_0) + B) + B = A^2 p(n_0) + AB + B = A^2 p(n_0) + \frac{B(1+A)(1-A)}{1-A} = A^2 p(n_0) + \frac{B}{1-A} - \frac{BA^2}{1-A} = A^2(p(n_0) - \frac{B}{1-A} - \frac{B}{1-A}) + \frac{B}{1-A}$

Предположение:

$p(n-1) = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^{n-1} + \frac{B}{1-A}$

Шаг индукции:

$p(n) = Ap(n-1) + B = A(\left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^{n-1} + \frac{B}{1-A}) + B = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^n + \frac{AB}{1-A} + B = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^n + \frac{B}{1-A}$

Задача 3.

Используя формулу (16), показать, что:

(a) если $-1 < A < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \frac{B}{1-A}$

(б) если $A < -1$, то $p(n)$ неограничена

(в) если $A = -1$, то $p(n)$ принимает только два значения

$$p(n) = \begin{cases} p(0), \text{ если } n \text{ чётно} \\ p(1) = B - p_0, \text{ если } n \text{ нечётно} \end{cases}$$

Решение:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty}((p_0 - \frac{B}{1-A})A^n + \frac{B}{1-A}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_0(1-A)-B}{1-A}A^n + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{B}{1-A} = 0 + \frac{B}{1-A} = \frac{B}{1-A}$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \infty$, последовательность $p(n)$ бесконечно большая $\Rightarrow p(n)$ неограниченная.

(в) Подставив $A = -1$ в формулу, получаем $p(n) = (p_0 - \frac{B}{2})(-1)^n + \frac{B}{2}$
если n чётно, $p(n) = p(2k) = (p_0 - \frac{B}{2})(-1)^{2k} + \frac{B}{2} = p_0 - \frac{B}{2} + \frac{B}{2} = p_0$
если n нечётно, $p(n) = p(2k+1) = (p_0 - \frac{B}{2})(-1)^{2k+1} + \frac{B}{2} = (p_0 - \frac{B}{2})(-1) + \frac{B}{2} = B - p_0$

Задача 4.

Предположим, что уравнения спроса и предложения задаются формулами $D(n) = -2p(n) + 3$ и $S(n+1) = p^2(n) + 1$.

(а) Предположим, что рыночная цена это цена, при которой предложение равно спросу. Найти разностное уравнение выражающее $p(n+1)$ через $p(n)$,

(б) найти положительное точку равновесия для этого уравнения,

(в) с помощью ступенчатой диаграммы определить устойчивость найденной положительной точки равновесия

Решение:

(а) $D(n+1) = -2p(n+1) + 3$, из условия равенства спроса и предложения $S(n+1) = D(n+1)$

$p^2(n) + 1 + 2p(n+1) - 3 = 0$

$2p(n+1) = 2 - p^2(n)$

$p(n+1) = -\frac{1}{2}p^2(n) + 1$

(б) $p = -\frac{1}{2}p^2 + 1$

$p^2 + 2p - 2 = 0$

$p_1 = -1 - \sqrt{3} < 0$ не подходит, т.к. нужно найти положительную точку равновесия

$p_2 = -1 + \sqrt{3} > 0$ подходящая точка.

(в) На рисунке 9 видно, что $p_2 = -1 + \sqrt{3}$ асимптотически устойчивая точка равновесия.

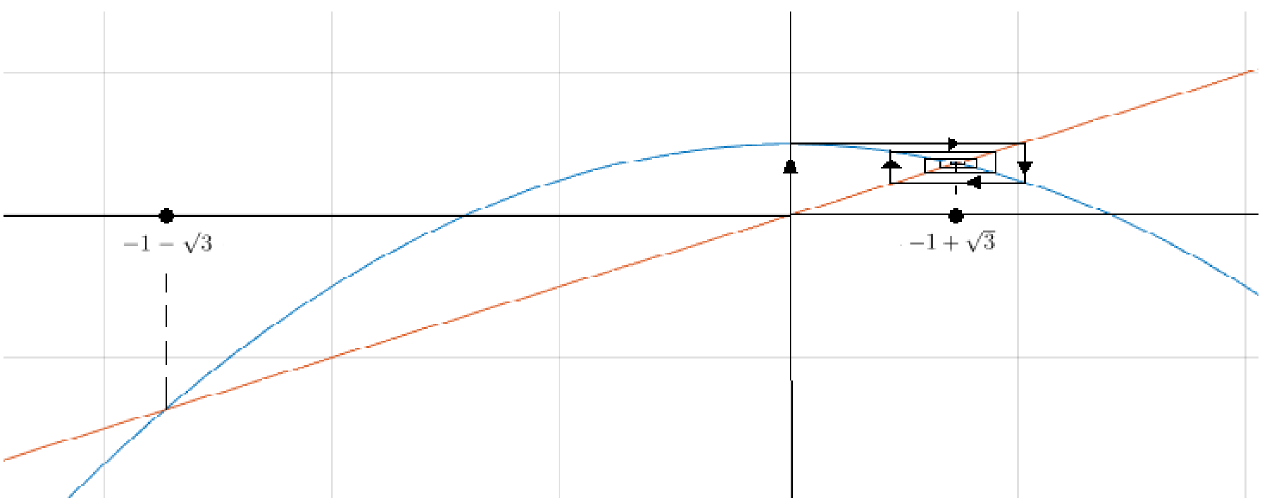

Рис. 9: график исследования устойчивости точки равновесия

Заключение

В первой части работы была изучена общая теория линейных разностных уравнений первого порядка. Так же было рассмотрено приложение разностных уравнений к таким разделам экономики как банковская сфера и ипотечное кредитование. Во второй части продемонстрировано исследование устойчивости точек равновесия в модели спроса-предложения и решение некоторых экономических задач при помощи разностных уравнений.

Список литературы

[1] Коврижных, А.Ю. Дифференциальные и разностные уравнения/ А.Ю. Коврижных, О.О. Коврижных. - Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. - 148с.

[2] Elaydi, S.N. An introduction to difference equations / S.N. Elaydi. - New York : Springer-Verlag, Inc., 1999.