Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент,
_____
«____»_____20___г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н., доцент
_____А.А. Замышляева
«____»_____2017 г.

Разработка и исследование алгоритма оптимизации транспортных потоков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.04.2017.074.ПЗ ВКР

Руководитель работы, доцент
_____/Т.Ю. Оленчикова
«____»_____2017 г.
Автор работы
Студент группы ЕТ-483
_____/А.А. Хасанова
«____»_____2017 г.
Нормоконтролер, доцент
_____/Т.Ю. Оленчикова
«____»_____2017 г.

Челябинск 2017

АННОТАЦИЯ

Хасанова А.А. Разработка и исследование алгоритма оптимизации транспортных потоков.– Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-483, 36 с., 9 ил., 1 табл., библиогр. список – 20 наим., 1 прил.

В работе исследованы методы решения задачи маршрутизации. Разработан алгоритм и реализована программа для решения задачи по оптимизации транспортных потоков с учетом на пропускную способность путей. Исследованы результаты работы алгоритма в зависимости от изменений управляющих параметров. Проведены экспериментальные исследования с целью оптимизации управляющих параметров.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....5
1 ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ.....5
1.1 Общая теория и определения.....5
1.2 Модели определения матрицы корреспонденций.....5
1.2.1 Гравитационные модели.....5
1.2.2 Энтропийная модель.....5
1.3 Модели движения транспортных потоков.....5
1.3.1 Модель Лайтхилла – Уизема - Ричардса.....5
1.3.2 Модель Танака.....5
1.3.3 Модель Уизема.....5
1.4 Методы оптимизации транспортных потоков.....5
1.4.1 Модель оптимальной скорости Ньюэлла.....5
1.4.2 Модель равновесного распределения потоков.....5
1.4.3 Модель следования за лидером GM.....5
1.5 Постановка задачи.....5
1.6 Выводы по разделу.....5
2 РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА МАРШРУТИЗАЦИИ.....5
2.1 Математическая постановка задачи.....5
2.1.1 Модель равновесного распределения потоков.....5
2.2 Алгоритм распределения потоков.....5
2.3 Оптимизация выбора коэффициента перераспределения потоков.....5
2.4 Выводы по разделу.....5
3 ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА.....5
3.1 Исследование способов λ.....5
3.1.1 Методы исследования.....5
3.1.2 Результаты.....5
3.2 Сравнение времени работы на разреженных и полном графах.....5
3.2.1 Методика эксперимента.....5
3.2.2 Результаты.....5
3.3 Оценка сходимости от погрешности.....5

3.3.1 Методика исследования.....5
3.3.2 Результаты.....5
3.4 Выводы по разделу.....5
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....5
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....5
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 ТЕКСТ ПРОГРАММЫ.....5

ВВЕДЕНИЕ

Транспорт – одна из ключевых составляющих, обеспечивающих функционирование современной экономики. Потребности расширения транспортных перевозок требуют совершенствования и развития инфраструктуры транспортных сетей (ТС). Особенной актуальна проблема увеличения пропускной способности ТС за счет управления транспортными потоками в городах, где строительства новых дорог не только очень дорого, но наносит огромный ущерб экологии. Поэтому в настоящее время усилия разработчиков направлены на проектирование интеллектуальных ТС (ИТС), обеспечивающих оптимальное управление транспортными потоками.

С точки зрения управления движением при малой загрузке дорожной сети (20-30% пропускной способности) движения транспорта является свободным и управление сводится к локальному светофорному регулированию, которое вводится по критериям безопасности [1]. Потребностей в применении каких-либо моделей и алгоритмов управления при этом не возникает.

Интервал 20-70% загрузки от пропускной способности ТС – сфера традиционных автоматизированных систем управления [5] дорожным движениям, которые решают задачу увеличения пропускной способности за счет координированного управления светофорной сигнализацией.

При загрузке в 80% и более задача управления принципиально меняется. Любая перезагрузка ТС сверх пропускной способности приводит к фатальным последствиям [15, 16]. При этом известно, что однажды возникшая дорожная пробка подвержена явлению гистерезиса. Как только трафик превышает пропускную способность дороги, движение входит в нестабильную зону функционирования и никакие алгоритмы координации в условиях перезагрузки не дают. Положительного эффекта Возврат к свободному движению возможен лишь после того, как «спрос» станет существенно ниже пропускной способности.

Эффективное управление дорожным движением в этих условиях должно обеспечивать загрузку ТС на грани ее пропускной способности и поддерживать непрерывное равномерное движение, пусть даже на небольших скоростях. То есть задача пропуска возможно большего качества транспортных средств меняется на задачу достижения транспортного баланса между реальной пропускной способностью ТС и «спросом» на объемы движения при максимальном использовании возможностей, предоставляемых геометрическими параметрами уличной сети.

Построение подобных интеллектуальных ТС требует разработки новых моделей движения и соответствующих алгоритмов управления. При этом ИТС должна в реальном масштабе времени оценивать текущую пропускную способность, учитывая погодные условия, работу светофоров, интенсивность движения и т.п., и перераспределять транспортные потоки. Достижение транспортного баланса осуществляется за счет ограничение «спроса» на дорожное

движение путем информирования участников движения о загрузке ТС и возможных альтернативных маршрутах движения, а также, возможно, ограничения на въезд на критические участки дороги.

Данная работа посвящена нахождению оптимального пути для каждой транспортной единицы в бескоалиционной игре. Рассматривается модель сетевой игры, в которой участники стремятся попасть из одного узла отправления в другой узел прибытия сети с уменьшением собственных затрат.

1 ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ

1.1 Общая теория и определения

Теория сетевых игр – относительно молодой раздел теории игр, акцентирующий внимание на формировании сетевых структур – устойчивых связей между игроками – в условиях несовпадения интересов и / или различной информированности последних.

Среди игр на сетях можно выделить[6]:

- игры маршрутизации (networking games);
- «когнитивные» игры (cognitive maps games);
- игры на социальных сетях (social networks games);
- игры на сетевых графиках.

Игры маршрутизации на сегодняшний день представляют собой не только наиболее развитый, но и очень бурно развивающийся раздел сетевых игр.

Когнитивные игры – используется для учета причинно-следственных связей и взаимовлияния факторов, а также для моделирования динамики слабоформализуемых систем[7].

Игры на социальных сетях, в которых вершинами являются агенты-участники социальной сети, а взвешенные дуги отражают степени их «доверия» друг другу или влияния друг на друга. Мнение каждого агента формируется под влиянием его начального мнения и мнений других агентов с учетом доверия друг другу.

Игры на сетевых графиках – теоретико-игровое обобщение задачи распределения ресурсов на сетях. Для данного класса не было уделено должного внимания исследователей.

Задачи маршрутизации транспорта (*Vehicle Routing Problems, VRP*) [20] — задачи комбинаторной оптимизации, в которых для некоторых транспортных средств, расположенных в одном или нескольких пунктах, задается определенный маршрут от начального до конечного пункта.

Под оптимизацией дорожной сети подразумевают комплекс мероприятий по организации транспортных потоков для снижения проблем, возникающих на дорогах, что значительно сокращает "пробки" в период интенсивного движения, снижает количество аварий и ускоряет потоки транспорта на участке.

Одной из плодотворных форм реализации представлений об оптимальности можно считать понятие равновесия, состоящее в следующем. Ситуация называется *равновесной*, если ни один из игроков не заинтересован в том, чтобы ее не нарушить, отклониться от нее.

Равновесие Вардропа (Wardrop) [4]:

- при самостоятельной маршрутизации каждый участник стремится минимизировать стоимость своего собственного пути;
- допустимый поток f называется *равновесием Вардропа,* если для любой пары путей *p* и *q,* где $f_p > 0$ (то есть путь *p* кем-либо используется), выполнено

неравенство: $c_p(f) \le c_q(f)$, где $c_p(f)$ определяется, как сумма стоимостей по всем ребрам из *p;*

- стоимости всех путей, которые используются уравновешенным потоком, равны;
- с любой сети (G, r, c) такое равновесие существует, и оно единовременно;
- стоимость C(*f*) допустимого потока f: $C(f) = \sum C_p(f) f_p$, по всем путям *p* из *P;*
- допустимый поток является *оптимальным,* если его стоимость минимальна среди всех допустимых потоков.

На сегодняшний день предлагается множество вариантов решения проблемы, как технических, так и организационно-управленческих, таких как: переход на малолитражные автомобили, создание резиновых дорог, повышение культуры вождения, использование информационных технологий и математических методов и моделей управления.

Существующие методы анализа и обработки статистической информации позволяют выявлять закономерности и анализировать процессы в сложных организационно-технических системах, к которым можно отнести и транспортно-дорожный комплекс. Для этих целей создаются информационные системы, используются имитационные модели, методы статистического анализа и прогнозирования.

Оптимизация транспортных потоков позволяет снизить затрудненное движение дорожно-транспотрной сети и значительно способствует решению транспортных проблем.

1.2 Модели определения матрицы корреспонденций

1.2.1 Гравитационные модели

Основой построения гравитационной модели стал всемирный закон тяготения, утверждающий, что все тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Применительно к транспортной системе в качестве тел выступают пункты, порождающие/поглощающие потоки, за массу тела принимается суммарный объем выезжающего/въезжающего потока, физическое расстояние можно заменить на любые другие затраты, связанные с передвижением. В самой простой форме гравитационная модель имеет вид:

$$\rho_{ij} = k \frac{s_i d_j}{c_{ij}^2}, i \in S, j \in D, \qquad (1)$$

где s_i – общий объем выезжающих из пункта $i \in S$, d_j – общий объем въезжающих в пункт $j \in D$, c_{ij} – удельные затраты на передвижение из i в j, $k > 0$ – калибровочный коэффициент.

Но классическая гравитационная модель имеет недостатки, поэтому вместо этой модели (1) на практике используют ее модификацию, в которой к условию (1) добавляют дополнительные условия, например, балансовые ограничения на выезд и въезд. Кроме того, квадрат расстояния (затрат) c_{ij}^2 заменяют на

функцию тяготения f (c_{ij}), характеризующую предпочтения индивидуумов при выборе пары источник-сток (i,j) для передвижения. В результате модифицированная гравитационная модель имеет вид:

$$c$$

$$f(¿¿ij^{\square}), \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} = s_i, \sum_{i=1}^{m} \rho_{ij} = d_j, \rho_{ij} \geq 0, i \in S, j \in D,$$

$$\rho_{ij} = \frac{s_i d_j}{¿}$$

или, что то, же самое:

$$\rho_{ij} = \alpha_i \beta_j s_i d_j f(c_{ij}), i \in S, j \in D,$$

где калибровочные коэффициенты $\alpha_i u \beta_j$ определяются из системы

$$\alpha_i = \left[\sum_{j \in D}^{\square} \beta_j d_j f(c_{ij}) \right]^{-1}, \beta_j = \left[\sum_{i \in S}^{\square} \alpha_i s_i f(c_{ij}) \right]^{-1}.$$

Очевидно, что система будет совместной только тогда, когда суммарные объемы по выезду и въезду равны: $\sum_{i \in S} s_i = \sum_{j \in D} d_j$.

Выбор функции тяготения *f* осуществляется либо в процессе калибровки модели на основе сопоставления расчетных данных по модели и эмпирических наблюдений, либо на основе некоторых соображений о предпочтениях при выборе пары источник-сток. Одна из аппроксимаций функции имеет следующий вид: $f(c_{ij}) = e^{-\gamma c_{ij}^{\theta}}$, где при расчете корреспонденций трудовых миграций полагают $\gamma \approx 0{,}065, \theta \approx 1$.

Важно отметить, что величины $\alpha_i u \beta_j$ зависят от всего набора $s_i u d_j$, а следовательно, и объемы корреспонденций ρ_{ij} зависят от загрузки всей системы.

Численные значения $\alpha_i u \beta_j$ определяют специальной итеративной процедурой. В отечественной литературе такая процедура известна как метод балансировки Шацкого – Шелейховского [3].

1.2.2 Энтропийная модель

Пусть задано фиксированное пространственное распределение населения по зонам:

- порождающим потоки, как и ранее, назовем такие зоны источниками и объединим их в множество *S*;
- поглощающим потоки, назовем их стоками и объединим в множество D.

Источниками, например, могут служить районы жилых массивов, стоками – места приложения труда. Индивидуумы в транспортной системе перемещаются от источников к стокам. Предположим, что каждый индивидуум имеет уникальный идентификатор, например номер паспорта. Состояние транспортной системы определяется распределением « помеченных » индивидуумов между парами источник-сток.

При определении объемов корреспонденций значимым является только общее количество индивидуумов без детализации по составу их идентификаторов.

Поэтому каждой паре источник-сток соответствует величина корреспонденции ρ_{ij} – количество индивидуумов, выезжающих из источника $i \in S$ и прибывающих в сток $j \in D$. Очевидно, что существует множество состояний, приводящих к одной и той же матрице корреспонденций $\rho = ¿ \; : i \in S, j \in D$). Следуя принципу максимизации энтропии, будем искать значения ρ_{ij}, доставляющие максимум функции $P(\rho)$, определяющей вероятность реализации состояния системы, соответствующего матрице корреспонденций ρ.

Обозначим через v_ρ вероятность каждой реализации матрицы ρ, через Q(ρ) – количество состояний системы, соответствующих ρ. Тогда

$$P(\rho) = v(\rho)Q(\rho). \qquad (2)$$

Пусть в системе имеется n источников и m стоков. Обозначим через $R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\rho_{ij}$ общее количество индивидуумов в системе, через $v_{ij} > 0$ – вероятность выбора индивидуумом коммуникации ρ_{ij}.

По аналогии со схемой Бернулли значение $v(\rho)$ определяется формулой

$$v(\rho) = v_{11}^{\rho_{11}} \cdot v_{12}^{\rho_{12}} \cdot v_{nm}^{\rho_{nm}} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} v_{ij}^{\rho_{ij}}.$$

Вычислим количество состояний Q(ρ). Если объем корреспонденции из источника 1 в сток 1 равен ρ_{11}, то количество способов достижения этого объема равно $C_R^{\rho_{11}}$. Далее, из оставшейся части индивидуумов количество способов достижения объема корреспонденции ρ_{12} равно , $C_{R-\rho_{11}}^{\rho_{12}}$,объема корреспонденции ρ_{13} равно $C_{R-\rho_{11}-\rho_{12}}^{\rho_{13}} u$ так далее. В итоге получаем следующую формулу для Q(ρ):

$$Q(\rho) = C_R^{\rho_{11}} \cdot C_{R-\rho_{11}}^{\rho_{12}} \cdot C_{R-\rho_{11}-\rho_{12}}^{\rho_{13}} \cdot \ldots \cdot C_{R-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j-1}^{m-1}\rho_{ij}}^{\rho_{nm}} = ¿$$

$$¿ \frac{R!}{(R-\rho_{11})!\,\rho_{11}!} \cdot \frac{(R-\rho_{11})!}{(R-\rho_{11}-\rho_{12})!\,\rho_{12}!} \cdot \frac{(R-\rho_{11}-\rho_{12})!}{(R-\rho_{11}-\rho_{12}-\rho_{13})!\,\rho_{13}!} \cdot \ldots \cdot$$

$$R - \sum_{i-1}^{n-1}\sum_{j-1}^{m-1} \rho_{ij} ¿$$

$$\cdot ¿$$

Очевидно, что результат не зависит от того, в каком порядке берутся корреспонденции ρ_{ij} для вычисления количества способов распределения индивидуумов в системе.

Подставив рассчитанные значения v (ρ) и Q(ρ) в формулу (2), получаем критерий выбора наиболее вероятного состояния системы:

$$P(\rho)=R!\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\frac{v_{ij}^{\rho_{ij}}}{\rho_{ij}}\to max. \qquad (3)$$

Помимо требования максимизации вероятности $P(\rho)$ на значения ρ_{ij}, как правило, накладываются дополнительные условия. Самыми естественными из них являются балансовые ограничения и условия неотрицательности. Пусть в каждой зоне-источнике $i\in S$ задан общий объем выезжающих s_i, в каждой зоне-стоке $j \in D$ — общий объем въезжающих d_j. Рассмотрим только те корреспонденции ρ_{ij}, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{j=1}^{m}\rho_{ij}=s_i,\ \sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}=d_j,\ \rho_{ij}\geq 0,\ i\in S,\ j\in D. \qquad (4)$$

Очевидно, для совместности системы суммарный объем выезжающих должен быть равен суммарному объему въезжающих:

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{j=1}^{m}d_j=R.$$

Дополнительно к условиям баланса (4) введем ограничение на общие затраты при проезде:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\rho_{ij}=C, \qquad (5)$$

где c_{ij} —удельные затраты на передвижения из источника i в сток j, C – полные затраты в транспортной системе. Таким образом, проблема построения матрицы корреспонденций $\rho_{ij}=(\rho_{ij}: i\in S, j\in D)$ сводится к задаче условной оптимизации (3), (4), (5).

Исходными данными для задачи определения матрицы корреспонденций являются статистические данные, полученные в результате анализа спроса на корреспонденции, что требует отдельного исследования. В рамках данной работы эта задача не ставится. Мы будем полагать, что матрица корреспонденций, привязанная к узлам дорожной сети, известна.

1.3 Модели движения транспортных потоков

1.3.1 Модель Лайтхилла – Уизема - Ричардса

В модели поток автомобильных транспортных средств (АТС) рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости. В модели Лайтхилла – Уизема – Ричардса предполагается, что[12]

1) существует взаимнооднозначная зависимость между скоростью $v(t,x)$ и плотностью (погонной) $p(t,x)$ потока;

2) выполняется закон сохранения плотности АТС $p(t,x)$.

Запись $p(t,x)$ обозначает число АТС на единицу длины в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой *x*. Аналогично, $v(t,x)$ – скорость в момент времени *t* в окрестности точки трассы с координатой *x*. Мы считаем что транспортный поток подчиняется некоторой микроскопической модели, в которой детально описывается поведение АТС, в зависимости от обстановки

впереди, и эта модель является разностным или дифференциально-разностным аналогом рассматриваемой нами макроскопической модели. Таким образом, корректность, предложенного здесь подхода к определению $p(t,x)$, $v(t,x)$ основывается на устойчивой аппроксимации макроскопической модели микроскопической. При этом необходимость рассмотрения макроскопических моделей обусловлена в первую очередь более простой техникой их исследования и большей наглядностью (в виду гидродинамических параллелей).

Первое предположение выразим условием:

$$v(t,x)=V(p(t,x)). \tag{6}$$

Относительно функции $V(p)$ делается следующее предположение:

$$V'(p)<0, \tag{7}$$

где $Q(p)=pV(p)$ – величина потока АТС (количество АТС, проходящих в единицу времени через заданное сечение). Зависимость $Q(p)$ часто называют фундаментальной (или основной) диаграммой.

Второе предположение выразим законом сохранения

$$\int_a^b p(t+\Delta,x)dx-\int_a^b p(t,x)dx=-\left\{\int_t^{t+\Delta} Q(p(\tau,b))d\tau-\int_t^{t+\Delta} Q(p(\tau,a))d\tau\right\}.$$

1.3.2 Модель Танака

В данной модели также рассматривается однополосный транспортный поток[2].

Максимальную скорость обозначим за v_{max}.

Плотность p определяется так:

$p(v)=\frac{1}{d(v)}$, где:

$d(v)=L+c_1v+c_2v^2$ – среднее расстояние между АТС при заданной скорости v;

L – средняя длина автомобиля;

c_1 – среднее время реакции водителей;

c_2 – коэффициент пропорциональности тормозного пути, который определяется экспериментально и зависит от дорожных условий (снег, гололед, дождь и т.д.).

В модели Танака уравнение V(p) определяется аналогично модели, который описан выше.

1.3.3 Модель Уизема

В данной модели учитывается «дальнозоркость» водителя, что предполагает снижение скорости автомобиля при увеличении потока впереди и повышения скорости при его уменьшении[2].

Используется следующее уравнение:

$$v(t,x)=V(p(t,x))-\frac{D(p(t,x))}{p(t,x)}\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}, D(p)>0.$$

Учитывая интерпретацию закона сохранения массы:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(vp)}{\partial x}=0,$$

получим уравнение типа Бюргерса (закон сохранения с нелинейной дивергентной диффузией):

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial Q(p)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(p)\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

1.4 Методы оптимизации транспортных потоков

1.4.1 Модель оптимальной скорости Ньюэлла

Модель была предложена Алленом Ньюэллом в 1961 году и считается первой успешной микроскопической моделью[2].

$v_n(t+\tau)=V\left(\frac{1}{h_n(t)}\right)$ – безопасная скорость движения АТС, которая зависит от дистанции до лидера, где τ – время реакции водителей и $V'(p)<0$.

Необходимо ввести функции от двух переменных *t, x:* $h(t,x)=\frac{1}{h(t,x)}, v(t,x)$.

Построим систему, которая будет представлять собой модель Ньюэлла:

$$\begin{cases} v+(v_t+v\,v_x)\tau\cong V(p)+\frac{V'}{2p}p_x \\ p_t+(vp)_x\cong 0 \end{cases}$$

1.4.2 Модель равновесного распределения потоков

В основе модели равновесного распределения транспортных потоков по путям в сети лежит предположение о том, что все участники движения выбирают пути следования, исходя из минимизации индивидуальной обобщенной цены поездки. Обобщенная цена пути представляет собой агрегированный критерий оценки пути. В результате индивидуальных выборов складываются значения интенсивности потока на всех элементах сети. Значения интенсивности, в свою очередь, являются главным фактором, определяющим обобщенную цену элементов и влияющим на критерии индивидуального выбора.

Предполагается, что в результате процесса «проб и ошибок» в системе устанавливается равновесное распределение потоков, при котором ни один из участников движения не может изменить свой путь так, чтобы уменьшить цену пути. Сформулированное условие обладающее следующими свойствами, известно как требования Вардропа (Wardroop, [8]):

- все пути, соединяющие районы i и j, которые используются для движения представителями корреспонденции F_{ij}, имеют одинаковую цену;

- цена любого пути между районами i и j, который не используется для движения, превосходит цену используемых путей.

Основной сутью данных свойств является то, что каждый участник движения стремится добраться до цели как можно быстрее (в более общей формулировке – стремится минимизировать обобщенную цену пути). На первый взгляд это тривиальное предположение, но возникают некоторые трудности при его реализации. Действительно, для выбора оптимального пути необходимо знать цену движения на всех элементах сети. Однако цена движения на каждом элементе сети зависит от загрузки этого элемента, в частности, она увеличивается при возрастании загруженности путей. Таким образом, в задаче возникает обратная связь: для правильного распределения корреспонденций по путям нужно знать загрузку сети, а сама эта загрузка возникает как результат распределения. Особенно важно учитывать эту обратную связь при распределении автомобильных потоков, поскольку время движения в улично-дорожной сети очень сильно зависит от загрузки.

Анализ этой ситуации приводит к концепции равновесного распределения потоков. Согласно этой концепции в транспортной системе постоянно происходит «игра», в ходе которой водители пробуют те или иные пути движения, исходя из предшествующего опыта. Выбирая тот или иной путь, каждый водитель косвенно влияет на другого водителя через формирование загрузки сети. В результате этого процесса в системе устанавливается некоторое равновесное состояние, суть которого может быть кратко выражена в следующем предложении: при равновесном распределении ни один из участников движения не может изменить свой путь так, чтобы уменьшить цену своей поездки, и, следовательно, не имеет мотивации к изменению своего пути.

Математическая сложность задачи поиска равновесного распределения связана с тем, что эта задача не является задачей оптимизации, т.е. в формулировке отсутствует определение глобального критерия, минимум или максимум которого достигался бы на равновесном распределении. Можно показать, однако, что при некоторых дополнительных упрощающих предположениях эта задача может быть сведена к задаче оптимизации специально сконструированного глобального критерия [10].

1.4.3 Модель следования за лидером GM

Одной из первых и простейших вариантов моделей следования за лидером является следующая модель, предложенная концерном General Motors[12]:

$$s''_n(t+\tau)=\alpha\frac{s'_{n+1}(t)-s'_n(t)}{s_{n+1}(t)-s_n(t)}, a>0.$$

Основной принцип стратегии данной модели в том, чтоб определить «лидера» транспортной сети и придерживаться при движении безопасной дистанции до него.

Ускорение n-го автотранспортного средства, обозначающееся как $s_n''(t)$ прямо пропорционально разности скоростей:

$$\Delta v_n(t) = s'_{n+1}(t) - s'_n(t)$$

Коэффициент пропорциональности $h_n(t)$ обратно пропорционален расстоянию до впереди идущего АТС:

$$h_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t)$$

Эту модель можно записать следующим образом:

$$\frac{d v_n(t)}{dt} = a \frac{d}{dt} \ln h_n(t).$$

1.5 Постановка задачи

В результате проведенного анализа существующих методов оптимизации транспортных потоков для исследования выбрана модель равновесного распределения потоков, потому что она наибольшим образом подходит для нашей задачи.

Целью работы является разработка алгоритма оптимизации транспортных потоков на основе выбранной модели.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) модифицировать алгоритм с учетом ограничения на пропускную способность;
2) реализовать процесс оптимизации выбора шага итерации для улучшения скорости сходимости алгоритма;
3) разработать методику исследования полученного алгоритма;
4) реализовать программу и провести экспериментальное исследования для оценки качества сходимости алгоритма.

В качестве платформы для решения задачи и ее реализации используется MatLab. Так как это высокоуровневый язык и интерактивная среда для программирования, численных расчетов и визуализации результатов; и с помощью MatLab можно анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели и приложения, это среда разработки идеально подходит для достижения поставленной цели в данной работе.

1.6 Выводы по разделу

В ходе работы были изучены задачи маршрутизации. Рассмотрены модели маршрутизации транспортных потоков и алгоритмы их решения. Для решения поставленной задачи был выбран метод равновесного распределения потоков, который необходимо модифицировать для наиболее быстрого нахождения оптимального распределения транспортных потоков.

2 РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА МАРШРУТИЗАЦИИ

2.1 Математическая постановка задачи

Задача маршрутизации сводится к комбинаторной задаче, которую можно представить в виде графа.

Транспортная сеть может быть представлена в виде графа (рисунок 1.1), дуги которого - транспортные магистрали, а узлы - пункты отправления и назначения.

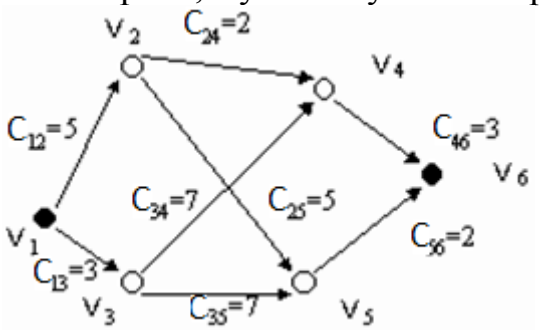

Рисунок 1.1 – Граф транспортной сети

Графически транспортная сеть изображается в виде совокупности n пунктов V_1, V_2, …, V_n, причем некоторые упорядоченные пары (V_i, V_j) пунктов назначения соединены дугами заданной стоимости (V_i, V_j)=C_{ij}. Некоторые или все дуги могут быть ориентированы, т.е. по ним возможно движение только в одном направлении, указанном стрелками.

На рис.1 построена ориентированная транспортная сеть, содержащая шесть пунктов V_1,V_2,...,V_6, которые связаны между собой восемью транспортными путями.

Необходимо определить маршрут минимальной стоимости из пункта V_1 в V_6. Определение этого маршрута состоит в указании последовательности пройденного маршрута через промежуточные пункты и суммарной длины маршрута.

В задаче транспортного равновесия с фиксированным спросом каждая корреспонденция ρ_{ij} рассматривается как средний поток пользователей, который из источника $i \in S$ должен прибыть в сток $j \in D$, где S, D множества вершин источников и стоков потока пассажиров соответственно.

2.1.1 Модель равновесного распределения потоков

Рассмотрим сначала задачу о распределении матрицы корреспонденций пользователей одного класса. Введем следующие обозначения:

I – множество узлов сети;

A – множество дуг сети;

A_i^- – множество дуг, входящих в узел $i \in I$;

A_i^+ – множество дуг, выходящих из узла $i \in I$;

R – множество узлов, между которыми выполняются корреспонденции

u_a – суммарный поток по дуге $a \in A$;

u_a^{pq} – поток по дуге $a \in A$ представителей корреспонденции F_{pq} .

Суммарные потоки на дугах и поворотах связаны с потоками представителей отдельных корреспонденций следующими соотношениями:

$$u_a = \sum_{p,q \in R} u_a^{pq}, a \in A. \tag{8}$$

Имеют место также линейные соотношения, выражающие «закон сохранения пользователей в сети».

$$\begin{array}{cc} -¿, & +¿, i \in I; p, q \in R. \\ a_2 \in A_i^{+¿} u_{a_1 a_2}^{pq}, a_1 \in A_i^{¿} & a_1 \in A_i^{-¿} u_{a_1 a_2}^{pq}, a_2 \in A_i^{¿} \\ u_{a_1}^{pq} = \sum_{¿} ¿ & u_{a_2}^{pq} = \sum_{¿} ¿ \end{array} \tag{9}$$

Данное равенство означает, что поток по каждой входящей в узел дуге равен сумме потоков поворотов с этой дуги (к повороту относится также и «движение прямо»), а поток по выходящей дуге равен сумме потоков поворотов на эту дугу, причем баланс должен соблюдаться для представителей каждой корреспонденции в отдельности. «Источниками» и «стоками» для участников движения являются районы прибытия-отправления:

$$\begin{array}{c} a \in A_q^{-¿} u_a^{pq}, p, q \in R. \\ a \in A_p^{+¿} u_a^{pq} = \sum_{¿} ¿ \\ F_{pq} = \sum_{¿} ¿ \end{array} \tag{10}$$

Введем также ценовую функцию, т.е. функцию, выражающие зависимость обобщенной цены от суммарного потока: $c_a(u)$ – ценовая функция дуги a ∈ A.

Ценовая функция $c_a(u)$ описывается следующим образом [13]:

$$c_a(u_a) = \tau_a \left(1 + \mu \left(\frac{u_a}{k_a}\right)^n\right) , \tag{11}$$

где τ_a — время проезда по свободной дуге e, k_a — пропускная способность дуги a , μ и n—некоторые положительные константы.

Существенным для построения критерия является упрощающее предположение, что обобщенная цена является функцией от потока на данной дуге (повороте) и не зависит от потоков по другим дугам (например, пересекающим данную дугу). Ценовые функции предполагаются положительными неубывающими функциями потоков. По ценовым функциям можно построить интегральные ценовые функции по формулам:

$$C_a(u) = \int_0^u c_a(v)\, dv, a \in A, \tag{12}$$

Требуемый глобальный критерий строится как сумма интегральных ценовых функций всех дуг и поворотов. Таким образом, в принятых обозначениях модель

равновесного распределения может быть сформулирована в виде задачи оптимизации [6]

$$\min_u F(u) = \sum_{a \in A} C_a(u_a) \tag{13}$$

при системе линейных ограничений (8)-(10).

Интегральный критерий (13), применяемый для поиска равновесного распределения, является чисто математической конструкцией и не имеет содержательной интерпретации в транспортных терминах или терминах принятия решений. Строгое доказательство того, что минимизация этого критерия действительно приводит равновесному распределению, можно найти, например, в [17]. Здесь приводится строгое рассуждение, позволяющее понять возникновение этого критерия.

Пусть задана некоторая функция от распределения потоков, представляющая собой сумму функций от потоков по каждой дуге:

$$F(u) = \sum C_a(U_a). \tag{14}$$

Рассмотрим распределение потоков, доставляющее минимум этой функции. Точка минимума любой функции обладает следующим свойством: при всякой вариации аргумента в этой точке изменение функции в линейном приближении неотрицательно. Рассмотрим простую вариацию распределения, состоящую в том, что малая доля δu потока снимается с одного из путей и перекладывается на альтернативный путь. Тогда изменение функции на каждой из дуг в линейном приближении равно $C_a^{'}(u_a)(\pm \delta u)$. При этом на дугах исходного пути, где поток уменьшился, изменение отрицательно, а на дугах альтернативного пути положительно. Поскольку суммарное изменение должно быть неотрицательно, получаем, что сумма производных $C_a^{'}(u_a)$ по дугам альтернативного пути не меньше, чем сумма производных по дугам исходного пути. Подберем функции $C_a(u_a)$ с тем расчетом, чтобы их производные давали значения цен дуг, как это сделано в (11)-(12). Тогда окажется, что в точке минимума суммарная цена альтернативного пути не меньше цены исходного пути, что и требуется условиями равновесного распределения.

Задача минимизации (1)-(6) может быть решена методом последовательных приближений, известном как метод Франка-Вульфа (Frank and Wolfe, [14]). Метод состоит в следующем: пусть на очередном k-м шаге итераций достигнуто некоторое распределение потоков $u^k = \{u_a^{pq}\}^k$. Линеаризуем целевую функцию в точке u^k и обозначим решение линеаризованной задачи u_L^k. Решение линеаризованной задачи используется для определения «направления смещения» при поиске очередного приближения, т.е. (k + 1)-е приближение ищется в виде

$$u^{k+1} = (1-\lambda)u^k + \lambda u_L^k, 0 < \lambda < 1. \tag{15}$$

Величина λ определяет долю потоков, которая на очередном шаге итерации снимается с прежней системы путей и перекладывается на новую систему путей.

Определение доли, которую следует перераспределить на каждом шаге, является отдельной задачей. Интересно отметить, что теоретически точное значение этой доли не важно для нахождения равновесного распределения. Именно, можно заранее задаться произвольной последовательностью долей λ_k, которые будут перераспределяться на каждом k-м шаге. Тогда, если выполнены простые условия

$$\lambda_k \to 0, k \to \infty, \sum_k \lambda_k = \infty \tag{16}$$

последовательность итераций сойдется к равновесному распределению [13].

Рассмотрим теперь линеаризованную задачу (1)-(6). Дифференциал целевой функции в точке u_k имеет вид:

$$F(u^k) = \sum_{a \in A} c_a(u_a^k) d u_a. \tag{17}$$

Входящие в это выражение цены соответствуют распределению u^k и являются константами в этой задаче. Получаем, что линеаризованная задача заключается в отыскании распределения, при котором минимальна сумма постоянных (не зависящих от потоков) цен дуг и поворотов. Решение такой задачи совершенно очевидно: сумма цен будет минимальна, если каждую корреспонденцию наложить на единственный кратчайший путь, рассчитанный при этих ценах. Таким образом, для решения линеаризованной задачи не требуется применения численных методов линейной оптимизации, достаточно произвести расчет системы кратчайших путей. Для расчета кратчайших путей разработаны специальные эффективные алгоритмы.

2.2 Алгоритм распределения потоков

Основной целью разработки данного алгоритма заключается в том, чтобы позволить без изменений инфраструктуры сети повысить ее пропускную способность. Таким образом, управляя транспортными потоками можно позволить с высокой эффективностью использовать имеющиеся автомобильные дороги, увеличить их пропускные способности и безопасность движения всех видов пассажирского и грузового транспорта, без необходимости расширения или строительства новых полос, развязок и эстакад.

Рассматриваем модель сетевой игры, в которой n игроков стремятся попасть из узлов отправки (исток) в узел прибытия (сток) сети с минимальными затратами.

Первичными переменными в задаче являются потоки представителей отдельных корреспонденций u_a^{pq}, так как именно для этих переменных сформулированы ограничения. Однако целевая функция зависит только от суммарных потоков на дугах $u_a^{\square}$. Далее, если для распределений $u_{\square}^k, u_L^k$ ограничения задачи выполнены, то они автоматически будут выполняться на решении одномерной задачи. Действительно, если перераспределяется фиксированная доля λ представителей каждой корреспонденции, то это приводит к перераспределению ровно той же доли суммарного потока на каждой дуге.

Единственное место в алгоритме, где рассматриваются потоки представителей отдельных корреспонденций, это вычисление u_L^k путем наложения корреспонденций на кратчайшие пути. Сам способ такого вычисления гарантирует выполнение ограничений задачи. Таким образом, мы можем рассчитать равновесное распределение, оперируя только значениями суммарных потоков на дугах и поворотах, что значительно экономит оперативную память при компьютерных расчетах. Если для анализа свойств загрузки все же требуется знать полную раскладку корреспонденций по путям, можно организовать сохранение рассчитываемых путей на диске компьютера «по мере использования», т.е. не занимая оперативной памяти.

Окончательно получаем алгоритм вычисления равновесного распределения потоков

1. Формируется начальное распределение u^0. Самым простым способом для этого является распределение всех корреспонденций по кратчайшим путям, рассчитанным по незагруженной сети с помощью алгоритма Дейкстры с бинарной кучей.

После этого распределения появляется загруженность. Последующие итерации алгоритма делаются следующим образом.

2. Цены всех элементов сети пересчитываются в соответствии с полученными на данной итерации значениями потоков u^k.

3. В соответствии с новыми ценами отыскивается система кратчайших путей между центрами въезда-выезда.

4. Рассчитываются потоки u_L^k, которые получаются в результате наложения корреспонденций на кратчайшие пути (решение линеаризованной задачи).

5. Новое распределение потоков рассчитывается по формуле $u^{k+1}=(1-\lambda)u^k+\lambda u_L^k$, где λ определяется решением одномерной задачи (19).

Далее рассмотрим вопрос о критерии остановки алгоритма. Алгоритм должен заканчивать свою работу, если полученное на очередном шаге распределение «достаточно близко» к равновесному распределению. Если распределение уже находится в равновесии, то сумма всех цен на системе кратчайших путей в точности совпадет с суммой всех цен на самом распределении. Действительно, цены кратчайших путей в равновесии в точности равны ценам всех других используемых путей. Поэтому оценкой степени приближения к равновесию на каждом шаге может служить разность между суммой всех цен при достигнутом распределении и суммой всех цен по кратчайшим путям:

$$\left|\frac{\sum c(u^k)(u^k-u_L^k)}{\sum c(u^k)u^k}\right|<E, \qquad (18)$$

где подразумевается суммирование по всем дугам (индексы для краткости опущены). Разность сумм цен отнесена к общей сумме цен, чтобы получить

безразмерную характеристику сходимости. Полезной при практических расчетах является следующая модификация начального шага алгоритма: корреспонденции расщепляются на фиксированное число долей и перед распределением очередной доли осуществляется пересчет кратчайших путей с учетом уже достигнутой загрузки. Полученное таким образом начальное распределение значительно ближе к равновесию, чем распределение всего объема корреспонденций на единственную систему кратчайших путей. Это приводит к значительному сокращению числа последующих итераций.

Теперь рассчитаем оценку временной сложности алгоритма.

На каждой итерации происходят следующие действия:

- вычисление цены – $O(n^2)$;
- поиск распределения по кратчайшим путям – $O(k*(m*\log(n)))$;
- поиск лямбды – $O(1)$ осуществляется с помощью функции fminbnd пакета MatLab, она ограничена 500 итерациями [20];
- пересчет загруженности – $O(n^2)$,

где n – количество вершин, k – количество корреспонденций ($k \leq n$), m – количество дуг в графе($m \leq n^2$), c – константа.

Таким образом, оценка сверху одной итерации – $O(n^3*\log(n))$.

2.3 Оптимизация выбора коэффициента перераспределения потоков

Уравнения (16) определяют условие сходимости алгоритма к равновесному распределению. Основное требование состоит в том, чтобы доли λ убывали (иначе распределение будет бесконечно колебаться вокруг равновесия), но «не слишком быстро» (иначе перераспределяемые доли станут слишком малы до того, как мы приблизимся к равновесию). Однако при неудачном выборе последовательности λ_k алгоритм может сходиться довольно медленно, поэтому предпочтительным является индивидуальный подбор перераспределяемой доли на каждом шаге. Наилучшее значение λ_k на каждом шаге можно получить, решив вспомогательную задачу оптимизации

$$\lambda_k = arg\,min_\lambda F(u(\lambda)), u(\lambda) = (1-\lambda)u^k + \lambda u_L^k. \quad (19)$$

Задача (19) представляет собой общую задачу (13), «суженную» на одномерное направление, полученное на данном шаге итерации. Это – одномерная задача без ограничений, более того, целевая функция выпукла (это следует из монотонности ценовых функций), поэтому ее численное решение не составляет труда.

На рисунке 2.1 представлена общая схема алгоритма решения задачи оптимизации транспортных потоков.

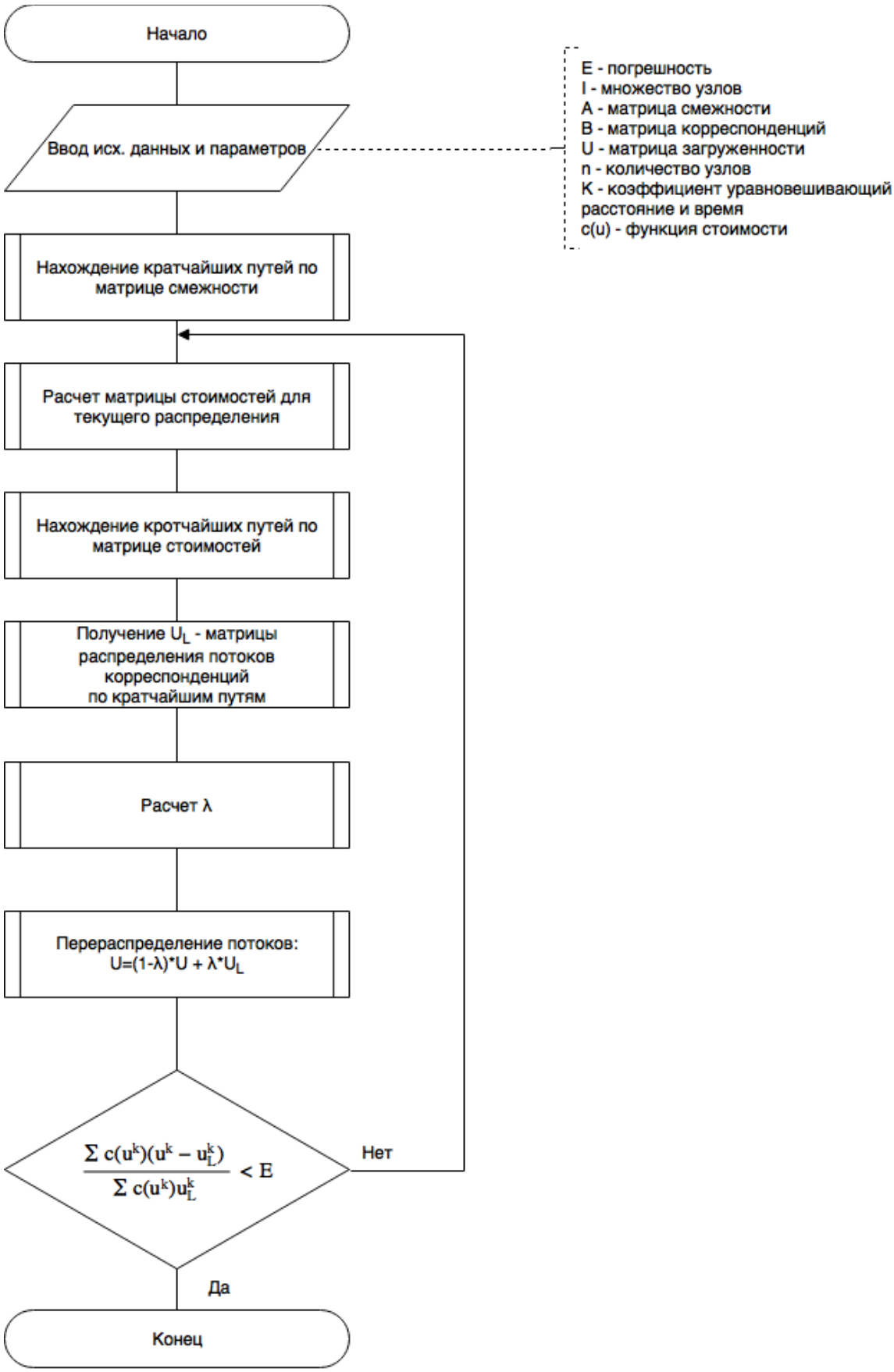

Рисунок 2.1 – Схема алгоритма маршрутизации

На рисунке 2.2 представлена схема алгоритма распределения корреспонденций по кратчайшим путям по найденным ценам.

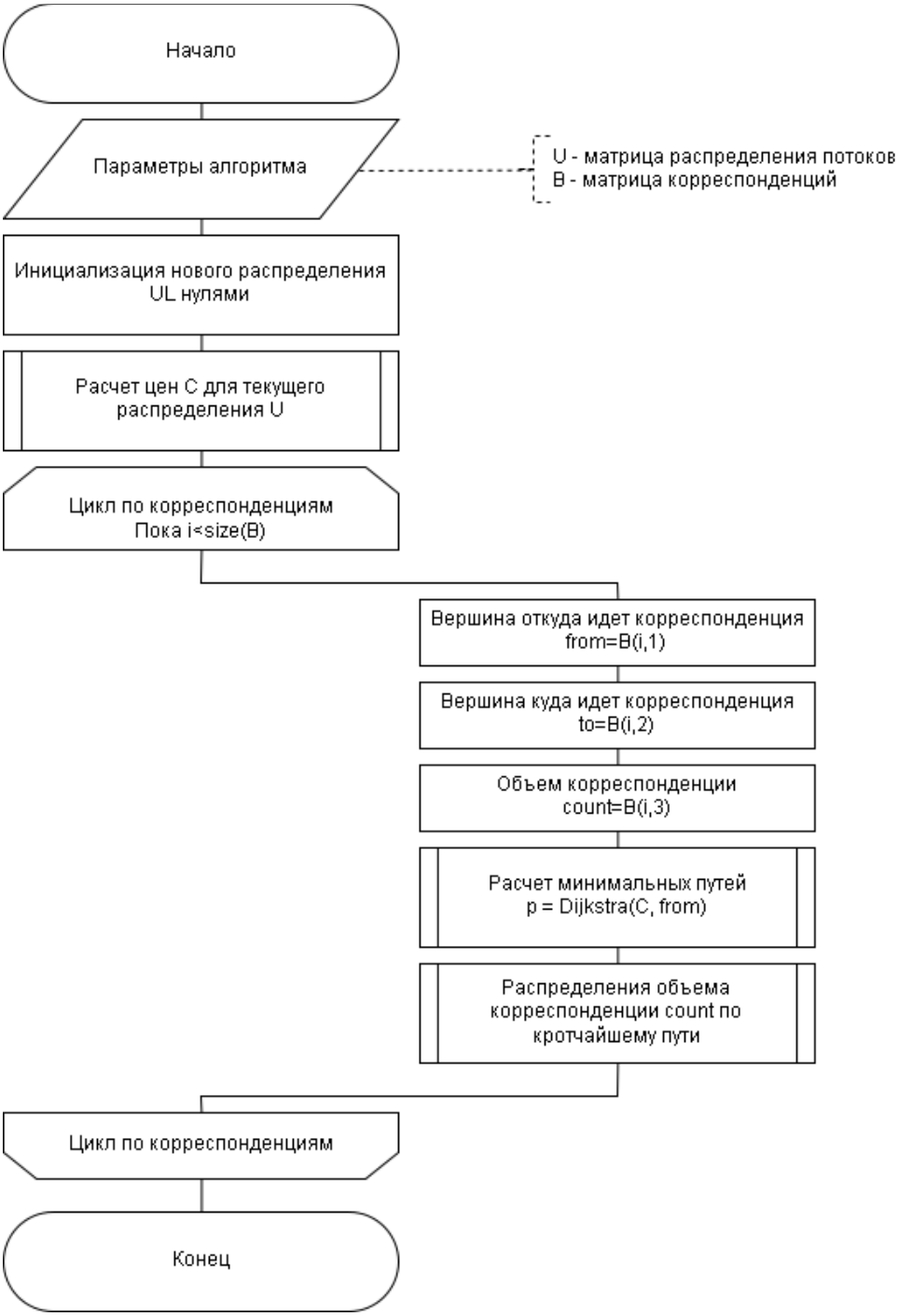

Рисунок 2.2 – Схема алгоритма распределения по кратчайшим путям

2.4 Выводы по разделу

Для решения задачи маршрутизации был разработан алгоритм распределения транспортных потоков. Проведена оценка временной сложности алгоритма. И в последующем, для наиболее быстрого нахождения решения поставленных цели и

задач, алгоритм распределения по кратчайшим путям был оптимизирован за счет наилучшего выбора коэффициента перераспределения потоков.

3 ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА

3.1 Исследование способов выбора λ

На каждой итерации новое распределение вычисляется как:

$$u^{k+1} = (1-\lambda_k)u^k + \lambda_k u^k ,$$

где u^{k+1} – новое распределение,
u^k – распределение полученное на предыдущем шаге,
u^k – распределение по минимальным путям,
$\lambda_k \in (0,1)$.

На каждом шаге λ_k можно выбирать разными способами. От нее зависит скорость сходимости – это стремление к нулю, при стремлении k к бесконечности.

Целью исследования является сравнение двух способов выбора последовательности λ_k:

1) задание λ_0 самостоятельно, и вычисление $\lambda_{k+1} = \alpha\ \lambda_k$, где $\alpha \in (0,1)$;
2) решение задачи (19).

Сравнение производиться по скорости сходимости и общей цене.

3.1.1 Методы исследования

Для исследования возьмем граф, показанный на рисунке 3.1 В нем 11 вершин и 18 дуг. На нем указаны расстояния между узлами.

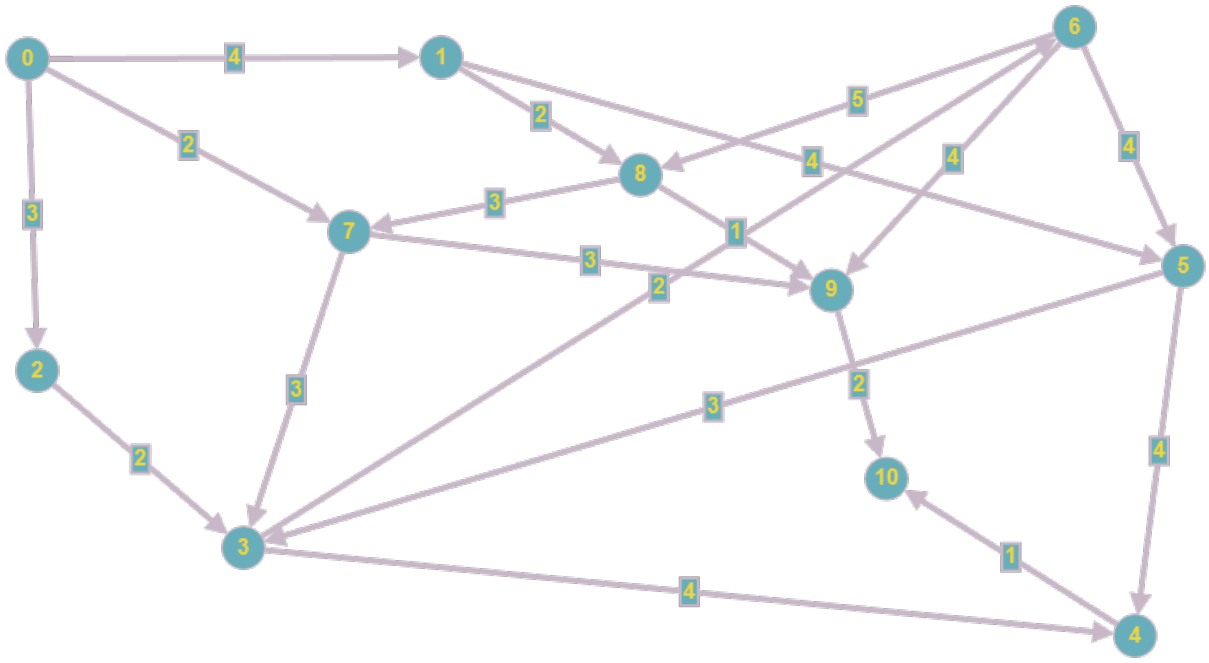

Рисунок 3.1 – Граф транспортной сети

Процесс эксперимента:

1) находим распределение потоков с $\lambda_0 = 0.8$, $\alpha = 0.9$,

2) строим график зависимости общей цены от итераций,

3) находим распределение потоков с выбором λ как решение задачи (19),

4) строим график зависимости общей цены от итераций.

3.1.2 Результаты

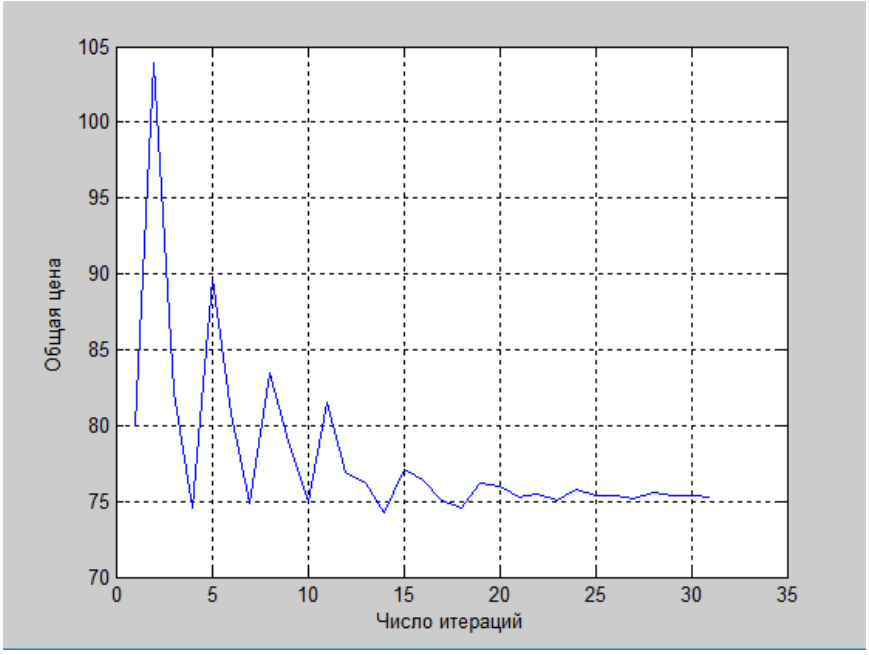

Рисунок 3.2 – График сходимости при самостоятельном задании λ_0= 0.8

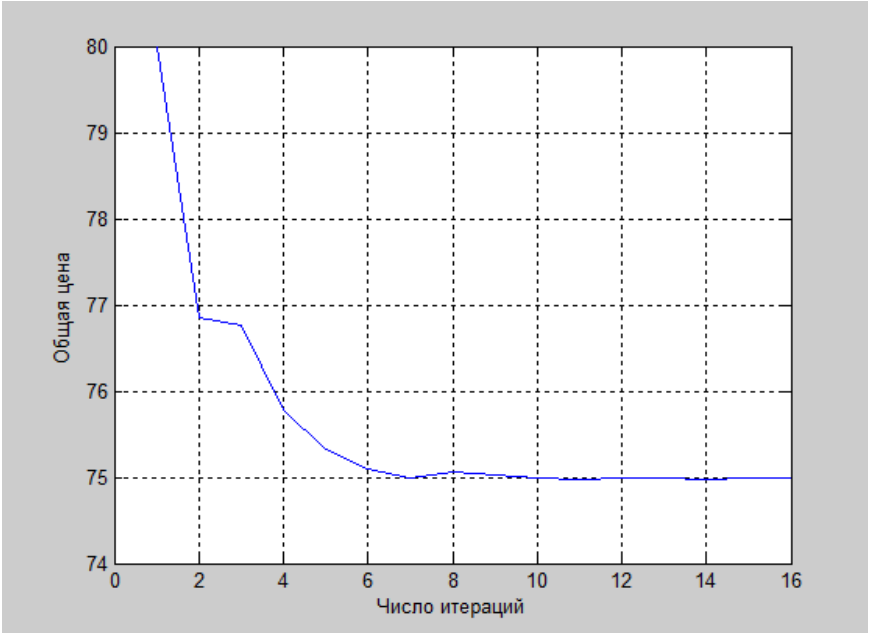

Рисунок 3.3 – График сходимости при самостоятельном задании λ_0 = 0.2

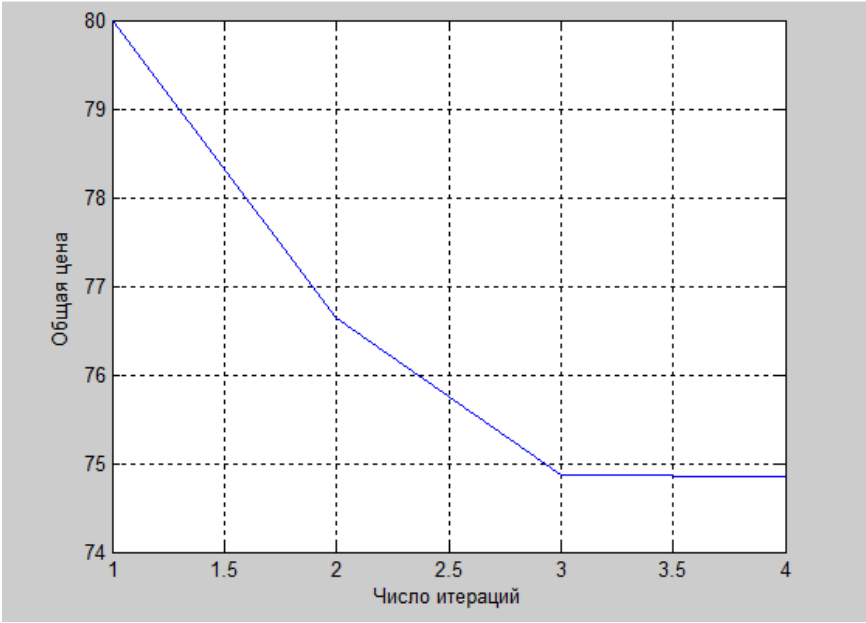

Рисунок 3.4 – График сходимости при нахождении λ

Как видно из графиков, скорость сходимости и общая цена оказались лучше при нахождении λ, как решение задачи (19). Однако полученное таким образом решение сильнее отличается от равновесного. Это происходит из-за того, что на очередной итерации цена полученного распределения потоков гораздо меньше, чем при распределении корреспонденций по минимальным путям.

Решение на рис. 3.2 сильно колеблется относительно равновесного значения из-за слишком большого, не оптимального, выбора λ. Происходит излишнее перераспределение потоков, а алгоритм сходится за большее число итераций, чем при оптимальном λ. Решение на рис. 3.3 сходиться в два раза быстрее, но недостаточно быстро, чем решение на рис. 3.4, при λ заданное решением задачи оптимальности (19).

3.2 Сравнение времени работы на разреженных и полном графах

Так как схемы дорожной сети имеют намного меньше дуг, чем полный граф, было решено использовать алгоритм Дейкстры с двоичной кучей для поиска минимальных путей [18].

Цель данного исследования найти и сравнить время работы для полного графа и разреженных графах.

3.2.1 Методика эксперимента

Проведем несколько тестов с разным процентом количества дуг от количества дуг в полном графе.

Процесс эксперимента:

1) построим полный граф,
2) находим распределение,
3) уменьшаем количество дуг на 10%,

4) если количество дуг > 20% переходим на шаг 2,
5) выход.

3.2.2 Результаты

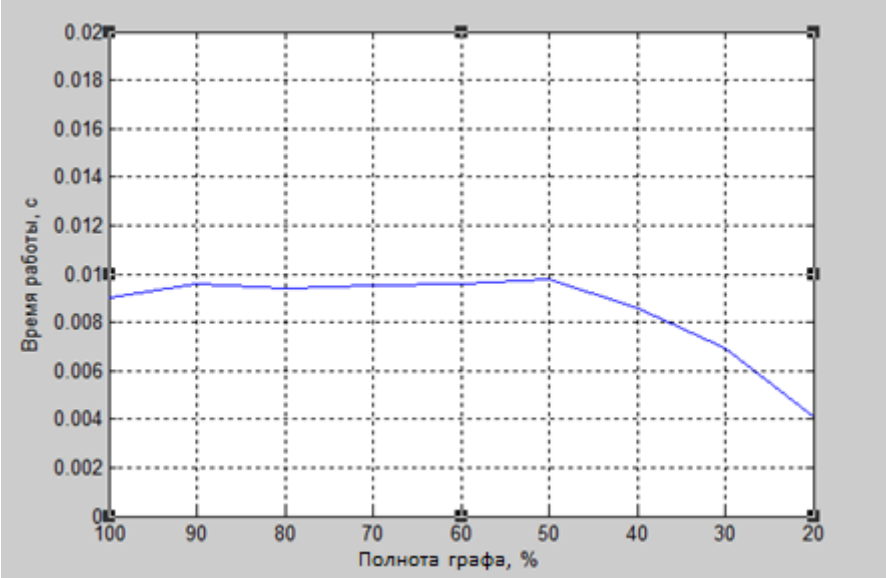

Рисунок 3.5 – Зависимость времени сходимости от разреженности графа

Как видно из графика, для сильно разреженного графа скорость сходимости на почти 60% быстрее, чем у полного.

3.3 Оценка сходимости от погрешности

Алгоритм выполняется, пока не будет выполнено условие:

$$\left|\frac{\sum c(u^k)(u^k - u_L^k)}{\sum c(u^k)u^k}\right| < E,$$

где $c(u)-$ цена распределения u, E – погрешность вычислений.

Сложность заключается в том, что при быстром уменьшении λ, алгоритм не успевает сходиться с заданной погрешностью. Для того чтобы протестировать зависимость, необходимо сначала найти такое α, при котором алгоритм сходится для каждого из E.

Цель исследования: определить α, при котором алгоритм сходится для каждого из E. Построить график зависимости количества итераций от величины погрешности E.

3.3.1 Методика исследования

Для исследования будем находить распределение для графа (рис. 3.1) с разными значениями E.

Процесс эксперимента:

1) инициализируем E=1,
2) находим распределение для данного E,
3) присваиваем E=E * 10^{-1},

4) если $E>10^{-8}$ на шаг 2,
5) выход.

3.3.2 Результаты

Таблица 3.1

Количество итераций для сходимости с определенной точностью

E / α	10^{0}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
0.5	1	3	5	-	-	-	-	-	-
0.6	1	3	8	8	-	-	-	-	-
0.7	1	3	9	-	-	-	-	-	-
0.8	1	4	4	12	24	-	-	-	-
0.9	1	4	10	31	41	41	-	-	-
0.95	1	5	25	58	85	148	-	-	-
0.99	1	5	77	86	86	709	717	717	1362

Для построения зависимости возьмем α = 0.99.

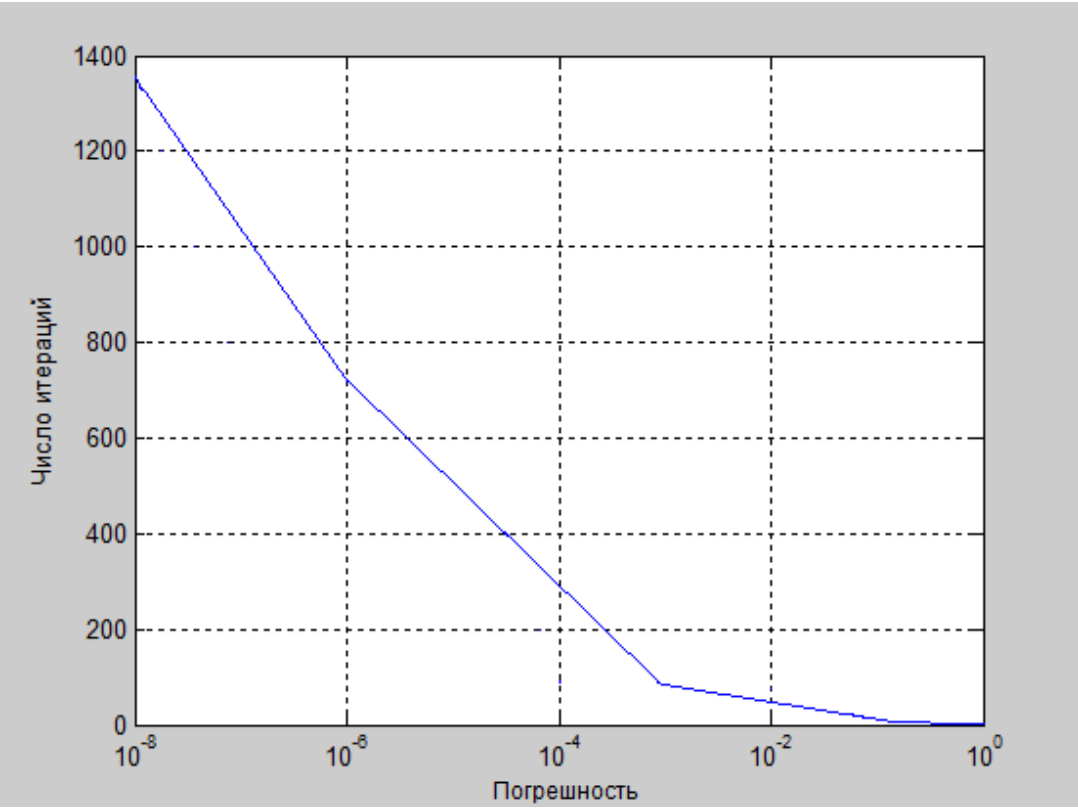

Рисунок 3.6 – Зависимость числа итераций от точности

Как видно из таблицы, коэффициент α требует осторожного выбора. Если его задать маленьким, для высокой точности, то решение не сойдется к ответу. В противном случае, когда не требуется высокая точность, можно сильно замедлить процесс сходимости.

3.4 Выводы по разделу

Проведены исследования способов выбора λ. По результатам наилучшим оказалось нахождение ее решением задачи (19). В результате сравнения времени работы на разреженных и полном графах, в качестве графа транспортной сети был выбран граф разреженный. Также провели исследования для оценки сходимости от погрешности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования данной работы были рассмотрены модели определения матрицы корреспонденций, модели движений транспортных потоков, модели оптимизации. Для достижения поставленных цели и задачи была выбрана модель распределения транспортных потоков. Был разработан алгоритм решения задачи распределения транспортных потоков с учетом ограничений на пропускную способность путей. Решением задачи является равновесие по Вардропу, при котором каждый участник движется независимо от других, но цены путей для любого из участников минимальны. С помощью проведенных исследований способов выбора λ, был модифицирован сам алгоритм, что позволило улучшить его сходимость. По проведенному ряду исследований построили график зависимости времени сходимости от разреженности графа и график зависимости количества итераций от величины погрешности.

Все поставленные задачи выполнены.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Гасников, А.В. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие// Издание 2-е, испр. и доп. Гасников, А.В. и др. – М.: МЦНМО, 2013. – 215с.

2 Гасников, А.В. Математическая физика транспортных потоков. – 2009.

3 Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными (Лекции). Ч. 2. Уравнения первого порядка. – М.: Изд-во МГУ, 1970.

4 Мазалов, В. В. Математическая теория игр и приложения: учебное пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 446 с.

5 Николаев, А.Б. Автоматизированные системы управления на автомобильном транспорте: учебник для СПО// Николаев, А.Б., Алексахин, С.В., Кузнецов, И.А. и др. 2-е изд., стер. М.: Академия, 2012. – 288с.

6 Новиков, Д.А. Игры и сети.// Математическая теория игр и ее приложения, т.2, в.1, 2010. – с.107-124

7 Новиков, Д.А. «Когнитивные игры»: линейная импульсная модель // Проблемы управления №3, 2008. – с. 14–22

8 Парфенов, А.П. Игра маршрутизации с ограничением на пропускную способность и постоянными функциями стоимости.// Новая наука: История становления, современное состояние, перспективы развития: сборник статей Международной научно-практической конференции (13 апреля 2016 г, г. Саратов). В 2ч. Ч.1 – Уфа: МЦИИ ОМЕГП САЙНС, 2016.

9 Петросян, Л.А. Одна транспортная теоретико-игровая модель на сети.// Математическая теория игр и ее приложения, т.3, в.4, 2011. – с.89–98

10 Пожидаев, М.С. Алгоритмы решения задачи маршрутизации транспорта: дис. канд. тех. наук // М.С. Пожидаев. – Томск, 2010. – 136 с.

11 Сесекин, А.Н., Ченцов, А.А., Ченцов, А.Г. Задачи маршрутизации перемещений: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 256 с.

12 Семенов, В.В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса. – М., 2004. – 44с.

13 Шведов, В.И. Математическое моделирование транспортных потоков. – Автоматика и телемеханика №11, 2003. – с.3-46

14 Frank M., Wolfe P. An algorithm for quadratic programming// Nav. Res. Log. Q. v. 3,1956. – p. 95–110

15 Frazier, C Chaos Theory and Transportation Systems: An Instructive Example// 83th Annual Meeting of the Transformation Research Board/ C. Frazier, K.M. Kochelman. Washington D.C, January, 2004. – p. 1-15

16 Kerner, B.S. Introduction to Modern Traffic Flow Theory an Control/ B.S. Kerner. Berlin: Sprenger, 2009. – 266p

17 LeBlanc L. J., Morlok E. K., Pierskalla W. An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem // Transpn. Res. B. v. 9, 1975. – p. 309–318.

18 Алгоритм Дейкстры для разреженных графов. – Дата обновления 09.07.2009. URL: http://www.e-maxx-ru.1gb.ru/algo/dijkstra_sparse (дата обращения: 24.04.2017)
19 Задача маршрутизации транспорта. – URL: http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/theory/unsorted/vrp-2006
20 URL: https://www.mathworks.com

ПРИЛОЖЕНИЕ

Текст программы

Файл main.m

```
clear all;
close all;
%% Исходные данные
% Матрица смежности ориентированного графа - A
% Матрица корреспонденций - B
% Матрица пропускных способностей - K
% Матрица загруженности - U
% Количество узлов - n
global k n U UL A K m G v columns
A = [0 4 3 0 0 0 0 2 0 0 0
    0 0 0 0 0 4 0 0 2 0 0
    0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 4 0 2 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
    0 0 0 3 4 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 4 0 0 5 4 0
    0 0 0 3 0 0 0 0 0 3 0
    0 0 0 0 0 0 0 3 0 1 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    ];
B = [1 5 40
    7 4 30];
K = [0 15 10 0 0 0 0 20 0 0 0
    0 0 0 0 0 10 0 0 20 0 0
    0 0 0 20 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 20 0 20 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10
    0 0 0 30 10 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 20 0 0 25 20 0
    0 0 0 20 0 0 0 0 0 20 0
    0 0 0 0 0 0 0 30 0 10 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 20
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    ];

G = getGraph(A);

% Константы:
alpha = 0.7;
lambda = 0.4;
k = 2;
m = 0.5;
E = 0.001;

% Размер графа
n = size(G,1); % вершины
v = sum(sum(G ~= 0)); % дуги
columns = size(G,2); % максимальное количество смежных вершин
U = zeros(n);
tic

%% Формируем начальное распределение
C = Price(U);
U = Distribute(C ,B);
```

```
%% Итерации
I = 1;
UL = zeros(n);
Prices(I) = TotalPrice(0);
C = Price(U);
   edge1(I) = C(1,3) + C(3,4) + C(4,5);
    edge2(I) = C(1,8) + C(8,4) + C(4,5);
    edge3(I) = C(1,2) + C(2,6) + C(6,5);

 difference = abs(sum(sum(U .* C - UL .* C))) / sum(sum(C .* U));
 while (difference > E && lambda > E)
    I = I + 1;

    UL = Distribute(U, B);

     lambda = lambda * alpha;

    t = 0:0.01:1;
    for i = 1:101
        y(i) = TotalPrice(t(i));
    end
    plot(t,y);

    U = U .* (1-lambda) + UL .* lambda;
    Prices(I) = TotalPrice(0);

    C = Price(U);
    difference = abs(sum(sum(U .* C - UL .* C))) / sum(sum(C .* U));

    edge1(I) = C(1,3) + C(3,4) + C(4,5);
    edge2(I) = C(1,8) + C(8,4) + C(4,5);
    edge3(I) = C(1,2) + C(2,6) + C(6,5);
    edge4(I) = C(8,4);
end

toc

figure(1);
i = 1:I;
plot(i,Prices(1:I));
xlabel('Число итераций');
ylabel('Общая цена')
grid();

figure(2);
hold on;
plot(i,edge1(1:I));
plot(i,edge2(1:I),'r');
plot(i,edge3(1:I),'g');
hold off;
xlabel('Число итераций');
ylabel('Цена пути');
legend('Путь 0-2-3-4','Путь 0-7-3-4','Путь 0-1-5-4');
grid();
```

Файл DijkstraBinHeap.m

```
function p = DijkstraBinHeap( A ,s )
```

```
global G n v columns
d = ones(1, n) .* realmax; % расстояния
p = zeros(1, n); % пути
d(s) = 0; % расстояние до вершины s
b = BinaryHeap(v); % двоичная куча для вершин, v - максимальный размер
b = b.insert(0, s);

while b.heapSize ~= 0

    [ cur_d v b] = b.extractMin();

    if cur_d > d(v)
        continue;
    end

    for j = 1:columns

        if G(v, j) == 0
            break;
        end

        to = G(v, j);
        len = A(v,to);

        if d(v) + len < d(to)
            d(to) = d(v) + len;
            p(to) = v;
            b = b.insert(d(to), to);
        end

    end

end

end
```

Файл Distribute.m

```
% Функция распределения корреспонденций B по кратчайшим путям для матрицы
% смежности A
function UL = Distribute( U, B)

global G

%Инициализация
UL = zeros(size(U));
C = Price(U);

for i = 1:size(B, 1)

    from = B(i, 1);
    to = B(i, 2);
    count = B(i, 3);

    p = DijkstraBinHeap( C, from);

    from = p(to);
    while from ~= 0
```

```
        UL(from, to) = UL(from, to) + count;
        to = from;
        from = p(from);
    end

end

end
```

Файл Price.m

```
% Ценовая функция
function C = Price( U)

global k m n K A

for i = 1:size(U)
     for j = 1:size(U,2)
         if K(i,j) == 0
            C(i,j) = 0;
         else
            C(i,j) = A(i,j) * (1 + m*(U(i,j)/K(i,j)).^k);
         end
     end
end

end
```

Файл getGraph.m

```
function G = getGraph( A )
G = zeros(size(A),1);
for i = 1:size(A)
    k = 1;

    for j = 1:size(A, 2)
        if A(i,j) ~= 0 && i ~= j
            G(i,k) = j;
            k = k + 1;
        end
    end
end

end
```

Файл TotalPrice.m

```
function p = TotalPrice( lambda)
global U UL

p = sum(sum(Price((1 - lambda)*U + UL * lambda)));

end
```